Physique Générale C

Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Chapitre 0

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

Bibliographie

[1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
[2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
[3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
[4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

0

Rappel mathématique

Chiffres significatifs

Les valeurs numériques de chaque mesure sont toujours une approximation. Considérons la longueur d'un objet qui vaut 15.7 cm. Par convention, cela veut dire que la mesure a été effectuée avec un instrument permettant d'apprécier le millimètre et que la valeur exacte se trouve entre 15.65 cm et 15.75 cm. Si la mesure de ce même objet est effectuée avec un instrument permettant d'apprécier le dixième de millimètre, on aurait pu écrire 15.70 cm. Le nombre de chiffres significatifs dépend donc de l'outil de mesure utilisé.

Le résultat d'un calcul prend le nombre de chiffres significatifs de la donnée de départ qui en a le moins. Par exemple, si on calcule le poids W sur la Terre d'un objet de masse $m = 10$ kg où $g = 9.81$ m/s^2 (on vera plus tard que le poids est égal au produit $W = m \cdot g$), la réponse doit être exprimée avec 2 chiffres significatifs (la mass m est exprimée avec 2 chiffres significatifs et g avec 3 chiffres significatifs), soit $W = 98$ N.

Les règles sont:

- les 0 placés à gauche du nombre ne comptent pas; par exemple, 0.06 est exprimé avec 1 chiffre significatif;
- les 0 placés à droite du nombre comptent; par exemple, 2'800 est exprimé avec 4 chiffres significatifs;
- la position de la virgule n'intervient pas; 1.28 et 12.8 sont exprimés avec 3 chiffres significatifs.

La notation scientifique ($\times 10^n$) est souvent utilisée. Au lieu de 0.000304, on écrira plutôt 3.04×10^{-4}. En plus d'être facilement lisible, cette notation permet de voir rapidement le nombre de chiffres significatifs (3 dans cet exemple) puisque la puissance 10 n'intervient pas dans le compte des chiffres significatifs.

Arrondissement des nombres

Pour arrondir un nombre, on élimine les chiffres superflus, puis, si le nombre formé par ces chiffres est:

- supérieur au égal à 5, 50, 500, etc., on ajoute une unité au dernier chiffre conservé;
- inférieur à 5, 50, 500, etc., on ne change pas le dernier chiffre conservé.

La notation delta: la variation d'une quantité

La lettre majuscule grecque Δ, placée devant le symbole d'une quantité physique, représente une *variation de cette quantité*. Ainsi, Δl (lire "delta el") est la variation de la distance l, c'est à dire, la distance parcourue entre une position finale l_f et une position initiale l_i: $\Delta l = l_f - l_i$.

Conversion d'unités

Pour convertir une mesure d'une unité à une autre, il suffit de multiplier par la relation des unités. Par exemple:

$$50 \text{ km} = 50 \text{ km} \cdot \frac{1'000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 50'000 \text{ m}.$$

Pour des conversions plus compliquées, par exemple celles de la vitesse, qui est exprimée en [distance]/[temps], nous utilisons une double multiplication par l'unité, une fois pour la distance au numérateur, une fois pour le temps au dénominateur. Par exemple:

$$50 \text{ km/h} = \frac{50 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{50 \text{ km}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1'000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \frac{50'000 \text{ m}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 13.9 \text{ m/s}$$

Puissances et notations scientifiques

Souvent, les variables physiques sont soit très grandes soit très petites. La vitesse de la lumière est $\sim 300'000'000$ m/s et les dimensions typiques des constituants de la matière (les atomes) sont de l'ordre de $0.000'000'000'1$ m. Pour éviter de travailler avec ce type de nombres très peu pratiques, on introduit une notation en puissances de 10:

$10^0 = 1$	
$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0.1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0.01$
$10^3 = 1000$	$10^{-3} = 0.001$
$10^4 = 10000$	$10^{-4} = 0.0001$
$10^5 = 100000$	$10^{-5} = 0.00001$
...	...

avec les règles suivantes:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \quad \text{et} \quad \frac{10^{\mathrm{n}}}{10^{\mathrm{m}}} = 10^{\mathrm{n}} \times 10^{-\mathrm{m}} = 10^{\mathrm{n}-\mathrm{m}}$$

Alors on peut écrire la vitesse de lumière comme 3×10^8 m/s et la dimension typique de l'atome comme 1×10^{-10} m.

Préfixes du système d'unités international (SI)

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deka	d	10^{-1}	deci	d

Équations quadratiques et identités remarquables

Factorisation:

$$ax + ay - az = a(x + y - z)$$

Identités:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

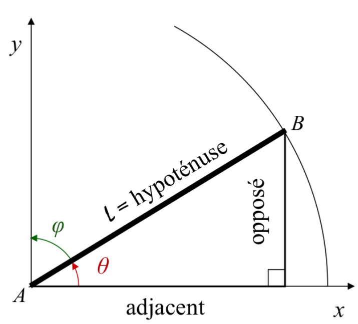
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Equation quadratique:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\text{avec} \;\; b^2 - 4ac > 0$$

Trigonometrie



Les projections sur les axes x et y d'un segment AB connaissant sa longueur l et son angle θ sont:

- opposé = hypoténuse $\cdot \sin\theta$
- adjacent = hypoténuse $\cdot \cos\theta$

et aussi:

- $\tan\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Pour des angles pour lesquelles $\theta + \phi = \pi/2 (= 90^o)$:

$$\sin\theta = \cos\phi; \quad \cos\theta = \sin\phi; \quad \tan\theta = \frac{1}{\tan\phi}$$

Quelques relations utiles:

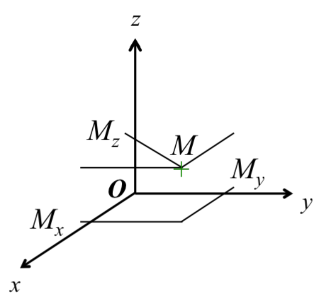
$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Référentiels

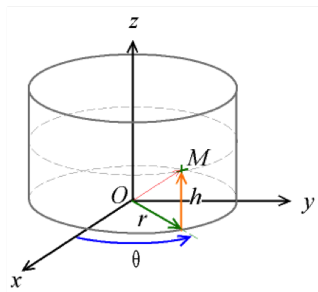
On identifie la position d'un corps dans l'espace au moyen de coordonnées dans un système de référence. On choisi un référentiel spécifique en fonction de la symétrie du problème.

Cartésien



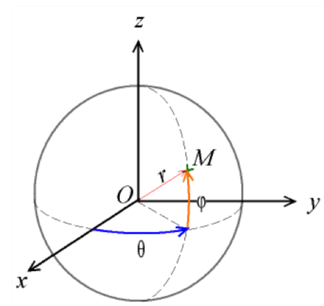
$x = M_x$
$y = M_y$
$z = M_z$

Cylindrique



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = h$

Sphérique



$x = r\cos\phi\cos\theta$
$y = r\cos\phi\sin\theta$
$z = r\sin\phi$

Référentiel et vecteur

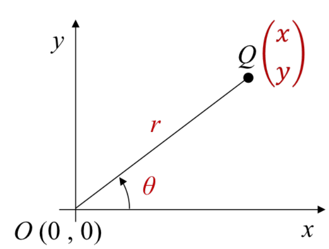
Un point Q dans l'espace 2-d peut-être identifié de deux manières:

- par ses coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- par ses coordonnées polaires: distance r et angle θ par rapport à un point et un axe de références.

Le point Q de coordonnées (x_Q, y_Q) définit le vecteur $\vec{Q}$ dont les composantes dans le référentiel (x, y) sont:

$$x_Q = r\cos\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{y_Q = r\sin\theta}$$

La longueur (ou norme) du vecteur est $r = |\vec{Q}| = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$.



Référentiel cartésien

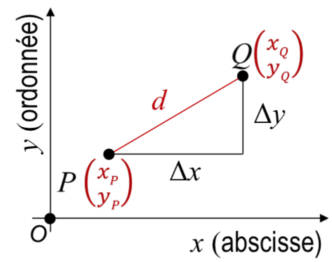
Dans un référentiel cartésien en deux dimensions chaque point P est identifié par une paire de coordonnées (x_P, y_P) ou plutôt $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$.

La distance d entre deux points P et Q de coordonnées (x_P, y_P) et (x_Q, y_Q) est donnée par:

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_Q^2 - x_P^2)^2 + (y_Q^2 - y_P^2)^2} = \sqrt{|\vec{PQ}|^2}$$

Utilisant annotation vectorielle, le vecteur $\vec{PQ}$ devient:

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$$



Equations linéaires

Une équation linéaire est une équation du type:

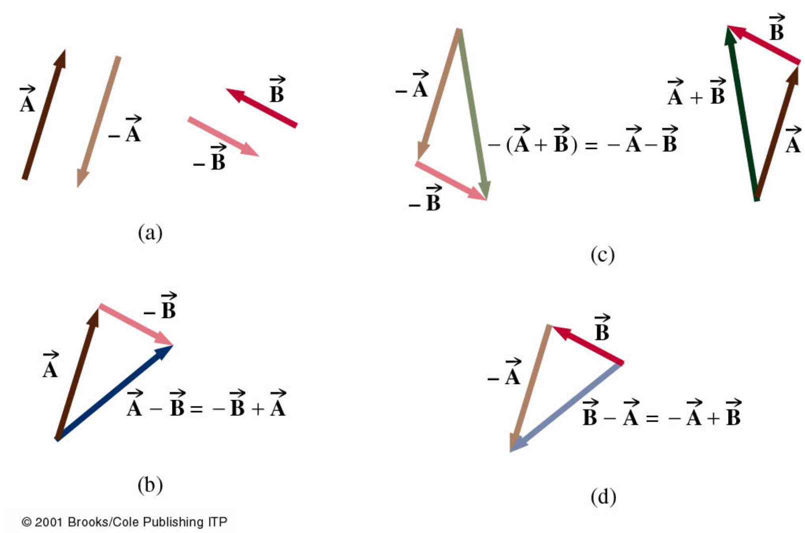
$$y(x) = ax + b$$

Dans une équation linéaire $y(x)$, un graphique de y en fonction de x représente une ligne droite où a est la pente de la droite et b est l'ordonnée de l'intersection avec l'axe y. Deux points arbitraires de la droite permettent de définir la pente a comme:

$$\text{pente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Opérations vectorielles

La notation vectorielle trouve de nombreuses applications en physique. L'utilisation des vecteurs repose sur un certain nombre de règles mathématiques.



Notez qu'il est plus simple d'additionner ou de soustraire des vecteurs en notation cartésienne en ajoutant simplement leurs composantes.

Si $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$:

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \begin{pmatrix} \alpha a_x - \beta b_x \\ \alpha a_y - \beta b_y \end{pmatrix}$$

Produits des vecteurs

- **Le produit scalaire**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

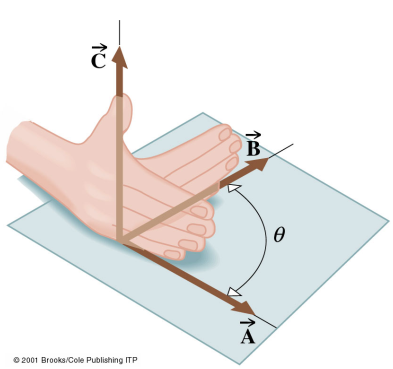
où α est l'angle entre les deux vecteurs. Cette quantité scalaire correspond au produit de la norme d'un vecteur par la norme de la projection de l'autre. Elle est maximale pour des vecteurs parallèles. Elle vaut zéro pour $\alpha = 90^o$.

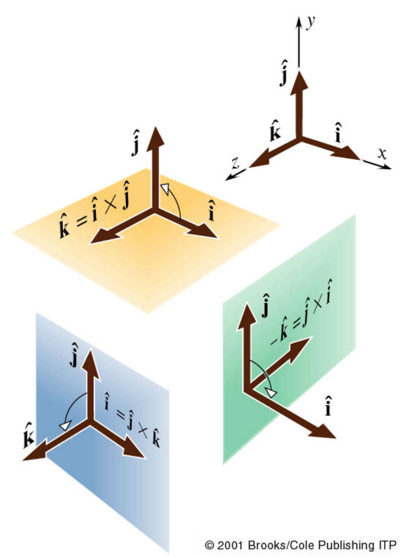
- **Le produit vectoriel**

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin\alpha$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs. La norme correspond à la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs. Elle est maximale pour $\alpha = 90^o$ et elle vaut zéro pour des vecteurs parallèles. Sa direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs du produit vectoriel. Son sens est déterminé par la règle de la main droite.



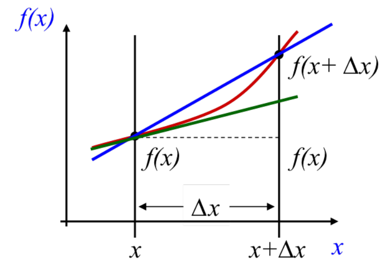


Dérivée

L'étude des changements (la dynamique) de notre Univers est une thématique importante de la physique. Le calcul différentiel est l'outil mathématique qui permet ces études.

On définit le taux de variation d'une fonction $f(x)$ par rapport à x par:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Ce quotient n'est autre que la pente de la droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$.

Plus on réduit l'intervalle Δx plus cette droite se rapproche de la tangente à la courbe (indiqué en vert sur le dessin à coté). On définit la dérivée au point x de la fonction $f(x)$ par:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

La dérivée mesure le taux de variation instantané de $f(x)$ par rapport à x.

Exemple

Soit $x(t)$ une fonction qui décrit la position x d'un corps sur une trajectoire rectiligne en une dimension au cours du temps t. Le taux de variation de la position est une mesure de la vitesse:

$$\frac{dx(t)}{dr}=v(t)$$

Si la position du corps ne varie pas, $x(t)=cte$. Donc $dx/dt=0$, c'est à dire que sa vitesse est nulle. L'accélération a mesure le taux de variation de la vitesse v de ce corps:

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{dx(t)}{dt})=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

L'accélération est la dérivée première de la vitesse par rapport au temps, ou la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

Exemple

L'utilisation combinée des dérivées première et seconde permet de trouver des points particuliers d'une fonction $f(x)$:

- Maximum de $f(x)$: $\frac{df}{dx}=0$ et $\frac{d^2f}{dx^2}<0$
- Minimum de $f(x)$: $\frac{df}{dx}=0$ et $\frac{d^2f}{dx^2}>0$

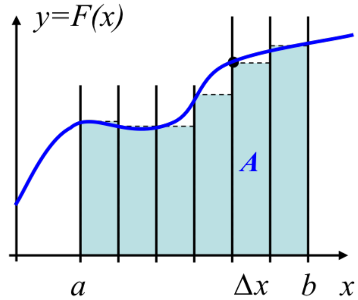
Ces équations permettent, par exemple, de trouver le point culminant de la trajectoire balistique d'un projectile dans le champ gravitationnel, comme une balle de tennis ou un bouchon de champagne.

Integrale

L'intégrale permet de calculer l'effet intégré d'une force sur la quantité de mouvement. L'intégrale peut être vue comme l'opération inverse de la dérivée. Si $F(x)$ est la première dérivée de $f(x)$ par rapport à x:

$$F(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ alors } f(x) = \int F(x)dx$$

L'intégrale $\int F(x)dx$ représente la surface A du rectangle défini par $F(x)$ et Δx. Donc $\sum_a^b F(x)\Delta x$ est la surface approximative entre la courbe $F(x)$ et l'axe des x. Dans la limite où Δx tend vers 0, on obtient la valeur exacte de la surface sous la courbe. C'est par définition l'intégrale de la fonction $F(x)$:



$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b F(x)\Delta x$$

En physique, les intégrales trouvent de nombreuses applications.

Exemple

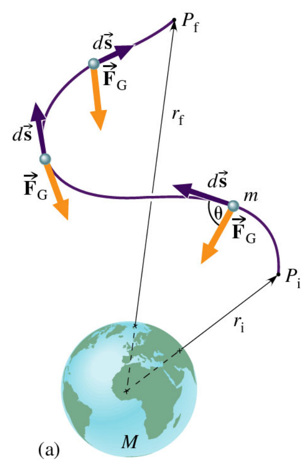
Calculer le travail effectué par une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace le long d'un chemin C dans l'espace. Le travail est définit comme le produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cos\theta s = F_{\|} s$$

Pour un parcours arbitraire, l'angle entre la force et le déplacement change en tout point et on doit sommer les contributions sur des petits segments Δs sur lesquels F est constant:

$$W = \sum \Delta W = \sum F_{\|} \Delta s$$

$$W = \int_C F_{\|}(s) ds$$



À savoir

Fonction $f(t)$	Dérivée df/dt	Primitive $F = \int f(t)dt$
$f_1 + f_2$	$df_1/dt + df_2/dt$	$F_1 + F_2$
$a\ f_1 + b\ f_2$	$a\ df_1/dt + b\ df_2/dt$	$a\ F_1 + b\ F_2$
$f_1 \cdot f_2$	$f_1 \cdot df_2/dt + f_2 \cdot df_1/dt$	
$f(g(t))$	$dg/dt \cdot df(g)/dg$	
a, $a =$ const.	0	$at + b$
at, $a =$ const.	a	$at^2/2 + b$
$at + b$, $a, b =$ const.	a	$at^2/2 + bt + c$
at^2, $a =$ const.	$2at$	$at^3/3 + b$
Ae^{at+b}	$Aae^{at+b} = a\ f(t)$	$(A/a)\ e^{at+b} = f(t)/a$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$x^{n+1}/(n+1) + const$

Exercices

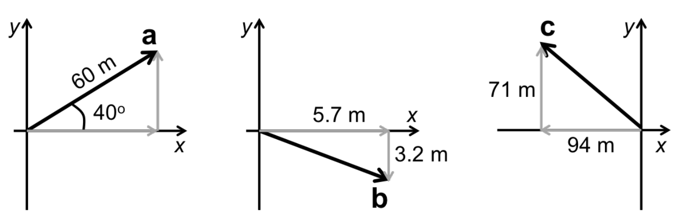
Exercice 0.1. Transformer la vitesse de 0.2 cm/s en unités de km/h et km/année.

Exercice 0.2. Trouver les composantes x et y d'un vecteur déplacement de 25 m à une angle de 210^o par rapport à l'horizontale.

Exercice 0.3. Exprimer les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ à la forme $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ensuite, estimer:

1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $\vec{a} - \vec{b}$
3. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
5. $\vec{a} \times \vec{b}$

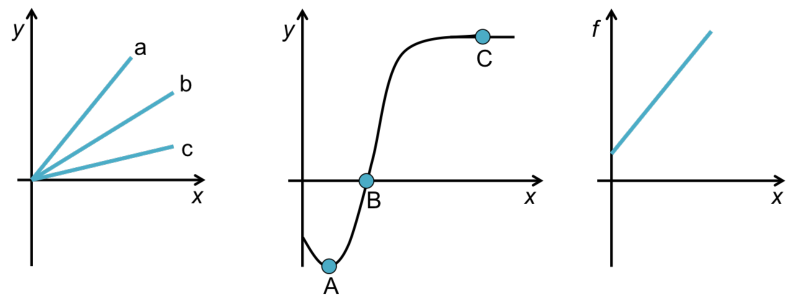


et representer les résultats graphiquement.

Exercice 0.4. Considérons une quantité qui est définie comme:

$$f(x) = \frac{dy(x)}{dx}$$

Trois situations différentes sont montrées à la figure dessous.
(a) Dans lequel des trois cas $f(x)$ est plus grande?
(b) Dans quel point du diagramme $f(x)$ se minimise? Dessiner approximativement le diagramme de $f(x)$.
(c) Vous connaissez que $f(x) = \frac{dy}{dx}$ et vous voyez au dessin $f(x)$. Exprimer mathématiquement et graphiquement $y(x)$.



(a) (b) (c)