Physique Générale C

Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Chapitre 2

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

Bibliographie

[1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
[2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
[3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
[4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

2

La cinématique: le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Dans le chapitre précédent, nous avons appris ce que c'est la vitesse, c'est à dire la variation de la distance en fonction du temps. Ce chapitre développe le concept d'accélération, c'est à dire la variation de la vitesse en fonction du temps. Nous allons considerer les mouvements à acceleration constante.

2.1 Accélération

L'acceleration est le taux de variation de la vitesse en fonction du temps. Cette variation peut concerner le module de la vitesse, sa direction, ou les deux. Sans accélération, la vitesse reste constante aussi bien en direction qu'en module. Si l'accélération et la vitesse sont colinéaires, la vitesse ne change pas de direction. Si l'accélération a une composante normale à la vitesse, la vitesse change de direction.

2.1.1 Accélération moyenne

L'accélération moyenne (a_m) d'un corps est définie comme le quotient de la variation de la vitesse par le temps écoulé, ainsi:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - ti} \tag{2.1}$$

Notez l'analogie à la définition de la vitesse moyenne, equation 1.3.

La vitesse et l'accélération sont donc toutes les deux des grandeurs vectorielles. Il y a accélération lorsqu'il y a une variation dans la direction de la vitesse ou lorsqu'il y a une variation de son module. Lorsqu'un corps se déplace le long d'une trajectoire courbe, la direction du vecteur vitesse change nécessairement; son accélération n'est donc pas dans la direction du mouvement. Par contre, dans le cas plus simple d'un mouvement sur une ligne droite, que nous considérons le plus souvent dans ce chapitre, la vitesse et l'accélération sont toutes deux dans la direction du mouvement.

Dans le cas du **mouvement rectiligne**, le déplacement, la vitesse et l'accélération sont colinéaires. L'accélération est positive si la vitesse augmente dans la direction du déplacement ($\vec{v}_f > \vec{v}_i$). L'accélération est negative si la vitesse diminue dans cette direction ($\vec{v}_f < \vec{v}_i$).

L'unité d'accélération est une vitesse divisée par le temps, par exemple:

$$[\text{acceleration}] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2$$

Exemple 2.1.1. Un robot jaune se déplace à la vitesse 1.0 m/s le long d'une rampe rectiligne dans un vaisseau spatial. Quelle est son accélération moyenne si sa vitesse passe à 2.50 m/s en 0.50 s?

Solution Données: $v_i = 1.0$ m/s, $v_f = 2.5$ m/s, et $\Delta t = 0.5$ s. A déterminer: a_m. D'après la définition:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2.5 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s}}{0.5 \ s}$$

soit $a_m = 3.0$ m/s^2.

Pour une accélération moyenne constante dans le cas du mouvement rectiligne, la vitesse en fonction du temps peut être représentée graphiquement comme une droite ($v = a \cdot t$), et sa pente est égale à l'accélération (figure 2.1).

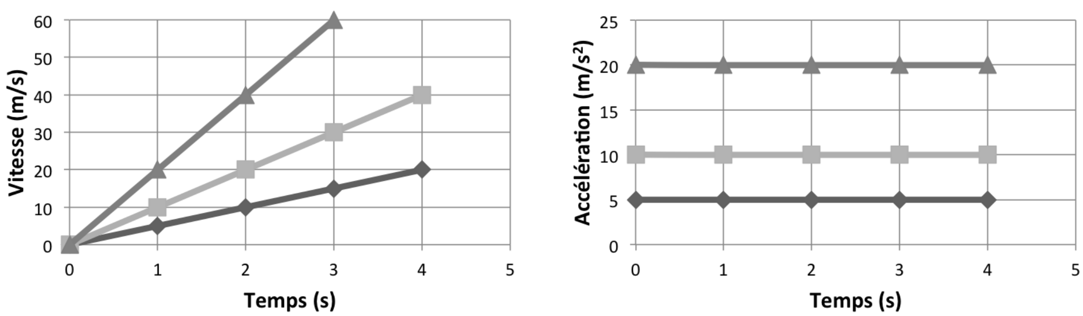


Figure 2.1: Dans le cas d'un objet en mouvement rectiligne uniformément accéléré, le graphique de la vitesse en fonction du temps est une droite et sa pente représente l'accélération. Plus l'accélération est grande, plus la pente est forte. Le graphique de l'accélération en fonction du temps est une ligne droite parallèle à l'axe du temps. L'aire sous la courbe entre deux instants quelconques est la hauteur (accélération) multipliée par la longueur (temps) et représente la vitesse atteinte.

Le vecteur accélération moyenne, $\vec{a}_m$, n'est pas très utile en soi, tout comme la vitesse moyenne $\vec{v}_m$, mais il permet de définir l'accélération instantanée.

2.1.2 Accélération instantanée

Dans le cas d'un mouvement accéléré, qui naturellement varie avec le temps, nous devons considérer ce qui arrive à chaque moment. Ce que nous voulons, c'est connaître l'accélération moyenne à tout moment sur un intervalle de temps très court. La valeur limite de l'accélération moyenne lorsque l'intervalle de temps s'approche de zéro est l'accélération instantanée qui s'exprime par:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} [\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}] = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.2}$$

L'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. Comme le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur déplacement (equation 1.4), il en résulte que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\frac{d\vec{s}}{dt}] = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} \tag{2.3}$$

L'accélération est donc la dérivée seconde du déplacement par rapport au temps.

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, mais l'accélération $\vec{a}$ est dans la direction de $\Delta\vec{v}$ et non celle de $\vec{v}$. Cela veut dire que $\vec{a}$ peut avoir à la fois une composante tangentielle et une composante perpendiculaire à la trajectoire. Il y a une accélération dans la direction de la trajectoire (composante tangentielle) si le module de la vitesse de l'objet augmente ou diminue; il y a une accélération perpendiculaire à la trajectoire si la direction de la vitesse du mobile change, c'est à dire si la trajectoire est courbe. Nous allons étudier le mouvement curviligne au chapitre 6.

Le cas le plus simple est celui d'un objet qui se déplace sur une trajectoire rectiligne. Dans ce cas, l'acceleration n'a pas de composante perpendiculaire, elle est complètement tangentielle.

Exemple 2.1.2. Un train roulant sur une voie ferrée rectiligne, a un déplacement donné par $x(t) = A+Bt^2$, où A et B sont deux constantes avec des unités appropriées. Déterminer les expressions de la vitesse (scalaire) et de l'accélération (scalaire) en fonction du temps.

Solution Données: $x(t)$. À déterminer: $v(t)$ et $a(t)$.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2Bt$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2B$$

2.2 Mouvement uniformément accéléré

Nous considérons les situations dans lesquelles a peut être prise constante, donc égale à l'accélération moyenne a_m. Donc dans un interval de temps Δt:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_\mathrm{f} - \vec{v}_\mathrm{i}}{t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}}$$

Puisque le mouvement est rectiligne, nous pouvons traiter la vitesse et l'accélération comme des quantités scalaires (algébriques) en faisant attention aux signes que nous attribuons. Nous pouvons aussi simplifier la notation en considérant que $t_\mathrm{i} = 0$ et donc le temps peut être simplement représenté par t. La vitesse initiale correspond à l'instant $t = 0$, donc on peut changer v_i en v_0. Nous pouvons aussi changer la vitesse finale en $v(t)$. Par conséquent, l'accélération devient:

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t} \tag{2.4}$$

d'où nous pouvons isoler la vitesse en temps t:

$$v(t) = v_0 + at \tag{2.5}$$

Sachant que (equation 2.2)

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \int_0^t a\, dt$$

pour $a =$ constante nous pourrions arriver au même résultat en integrant:

$$v(t) = \int_0^t a\, dt = a\, t|_0^t + c = at + c, \text{ avec } c \text{ constante}$$

et comme $v(t = 0) = v_0 \Rightarrow c = v_0$, qui nous donne l'equation 2.5.

La vitesse moyenne, représentant la vitesse qui produirait le même déplacement pendant le même intervalle de temps que le mouvement uniformément accéléré en question, est donnée par:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \tag{2.6}$$

Nous pouvons déduire la distance parcourue en considérant l'integral de la vitesse (equation 2.5) en fonction du temps:

$$x(t) = \int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t (v_0 + at)\, dt = (v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2)|_0^t + d = v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2 + d, \text{ avec } d \text{ constante}$$

Si x_0 est la position initiale, i.e. $x(t = 0) = x_0 \Rightarrow d = x_0$, donc:

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2 \tag{2.7}$$

Le premier terme est la position initiale, pour $t = 0$. Le second terme est la distance que parcourerait le mobile s'il se déplaçait avec sa vitesse initiale et sans accélération ($a = 0$). Le troisième terme est la modification de la vitesse à partir de sa valeur initiale v_0 due à l'accélération. Si l'accélération est négative, ce troisième terme est aussi négatif et le movement se ralentit.

Graphiquement nous voyons tout ça à la figure 2.2. L'aire sous la droite de la vitesse représente la distance parcourue:

$$x(t) = v_0\, t + \frac{1}{2}(v - v_0)\, t = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2}[v_0 + (v_0 + at)]\, t = v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

En combinant les equations 2.5 et 2.7 nous calculons la relation entre la vitesse et le déplacement:

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a\, [x(t) - x_0] \tag{2.8}$$

C'est l'équation à utiliser pour résoudre tout problème de mouvement uniformément accéléré où le temps n'apparaît pas explicitement.

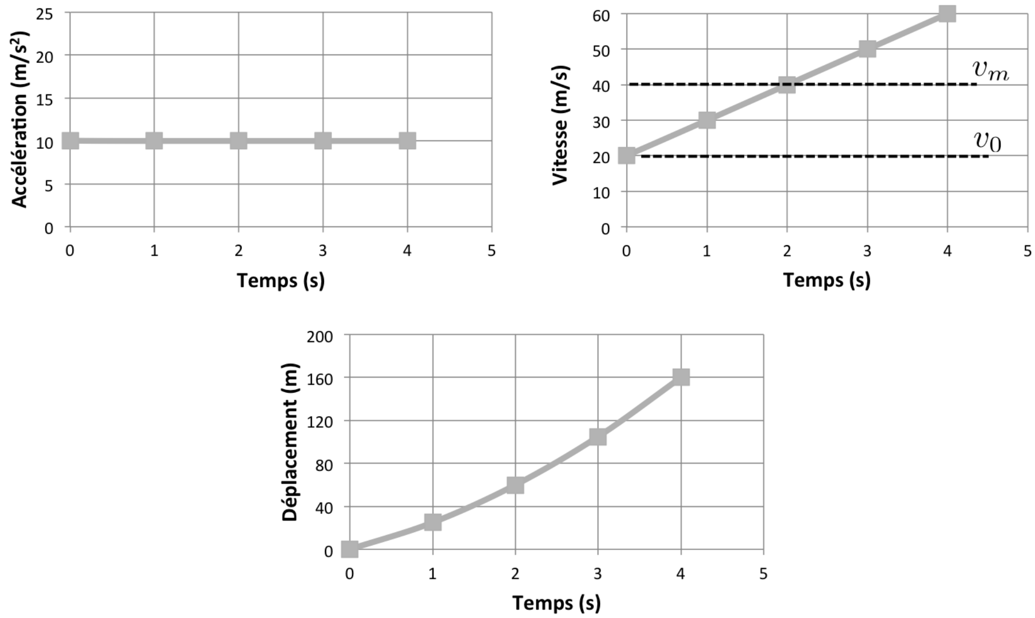


Figure 2.2: Graphiques d'accélération, vitesse et déplacement pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré. L'aire sous la droite du diagramme de l'accélération en fonction du temps représente la vitesse acquise. L'aire sous la droite inclinée du diagramme de la vitesse en fonction du temps représente la distance parcourue. La distance est aussi égale à l'aire sous la droite horizontale v_m. Autrement dit, $v_m t = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t$, ce qui correspond bien à $v_m t = \frac{1}{2}(v + v_0)t$ et donc l'equation 2.6. Le diagramme du déplacement en fonction du temps montre le cas special de $x_0 = 0$.

Résumé – MRUA Pour un mobile qui se trouve à l'instant $t = 0$ en position x_0 avec une vitesse v_0, et à l'instant t en position x avec une vitesse v, nous avons les équations suivantes:

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad \text{(voir éq. 2.5)}$$

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \qquad \text{(voir éq. 2.6)}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \qquad \text{(voir éq. 2.7)}$$

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a\,[x(t) - x_0] \qquad \text{(voir éq. 2.8)}$$

2.3 Applications de MRUA

Nous examinerons dans cette section quelques exemples de MRUA. Pour tous ces exemples les équations 2.5-2.8 sont appliquées avec des conditions initiales spécifiques.

2.3.1 La chute libre

La situation la plus courante où l'accélération est constante est la chute libre. Si on lâche un corps pesant au voisinage de la surface de la Terre, il tombe en obéissant exactement aux équations de MRUA. L'accélération dans ce cas est celle de la pesanteur (accélération gravitationnelle), mesurée dans la direction descendante. Elle est représentée par le symbole g, est égale à une valeur moyenne 9.80665 m/s à la surface de la Terre et diminue progressivement avec l'altitude.

En absence du frottement de l'air, tous les corps tombent avec la même accélération uniforme quel que soit leur poids. L'accélération gravitationnelle est indépendante de la masse bien qu'elle résulte de la force gravitationnelle due à la masse des objets.

Les conditions initiales spécifiques à la chute libre sont qu'au temps $t_0 = 0$, un objet se trouve à une position $x_0 = 0$, en hauteur h (avec $h << R_0$, où R_0 le rayon de la Terre) et on le lâche avec une vitesse initiale $v_0 = 0$. L'objet tombe avec une accélération $a = g$ ($g = 9.81$) m/s^2 en ligne droite. Les equations du MRUA nous donnent alors:

$$v(t) = g\,t\ ; \quad x(t) = \frac{1}{2}g\,t^2\ ; \quad v^2(t) = 2g\,x(t) \tag{2.9}$$

Exemple 2.3.1. On lâche un objet d'une hauteur h. Combien de temps va-t-il mettre pour arriver au sol? L'accélération gravitationnelle est g.

Solution Le temps sera donné par le temps nécessaire pour traverser la distance h, soit (equation 2.7) $x(t) = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

2.3.2 Le mouvement purement vertical

En chute libre, l'accélération est toujours parfaitement verticale et dirigée vers le bas. Si un objet est lancé verticalement vers le haut (e.g. comme à la figure 2.3), il restera sur une trajectoire verticale rectiligne.

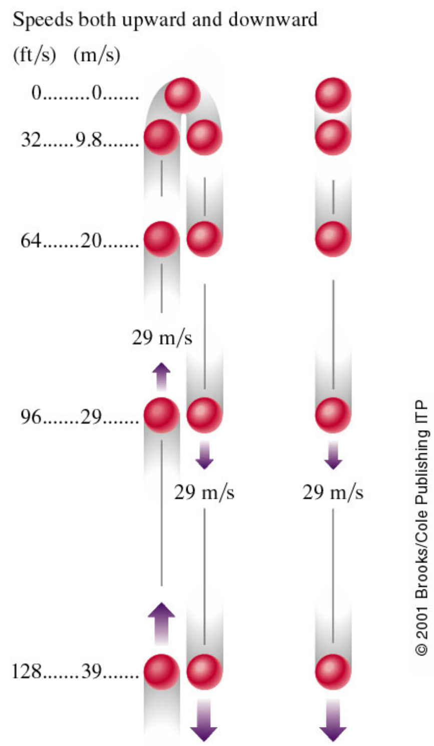


Figure 2.3: Une balle lancée verticalement vers le haut avec une certaine vitesse, ici 39 m/s, revient à son point de départ à la même vitesse (si on néglige la résistance de l'air). En montant, il subi une accélération négative, $a = -g$. Sa vitesse diminue jusqu'à l'arrêt (momentané) au sommet de sa trajectoire. La descente est la même que pour un objet lâché avec vitesse nulle du sommet de la trajectoire : il subit une accélération positive $a = +g$ à partir de $v_0 = 0$.

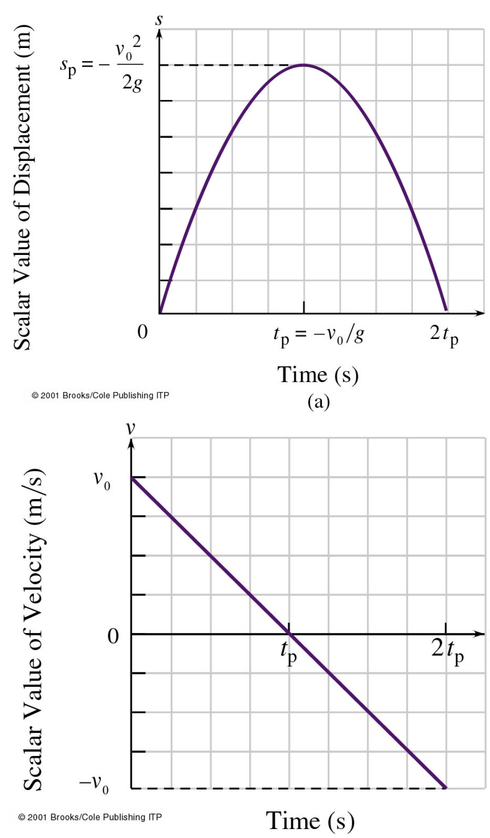


Figure 2.4: Le mouvement d'une balle lancée verticalement vers le haut. (a) La courbe représentant le déplacement en fonction de t est une parabole. (b) La courbe de la vitesse en fonction de t est une droite qui passe sous l'axe des abscisses pendant la descente.

Exemple 2.3.2. Une balle est tirée d'un revolver, verticalement vers le haut à une vitesse initiale 200 m/s. On négligera la résistance de l'air. (a) Quelle est la hauteur maximum, h, atteinte par cette balle? (b) Quelle sera sa vitesse, v, lorsqu'elle redescend à la même altitude que l'arme et (c) Quelle est la durée, t_{max} du trajet?

Solution Données: MRUA avec v_0 =200 m/s.

(a) Au sommet: $v = 0$, donc equation 2.8 pour $a = -g$: $v_0^2 = -2gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} = 2.04 \times 10^3 m$.

(b) On connait par (a) la hauteur h du quel la balle tombe. Pour la partie de la descente la vitesse sera donnée par l'équation 2.8 pour $v_0 = 0$: $v^2 = 2gx(t)$, donc pour $x(t) = h = \frac{v_0^2}{2g}$: $v^2 = v_0^2$, soit, la balle revient rigoureusement à la hauteur du fusil à la même vitesse 200 m/s.

(c) Le temps de montée, t_m, peut être calculé en utilisant les équations du MRUA, e.g. equation 2.5: $v = v_0 - gt \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$, pour $a = -g$ et pour $v = 0$ au sommet. Pour la descente on aura de la même façon: $v_0 = gt \Rightarrow t_d = \frac{v_0}{g}$. Le temps total sera donc $t_{max} = t_m + t_d = 2\frac{v_0}{g} = 40.8$ s.

Dans l'atmosphère, la présence de l'air génère un frottement qui peut modifier ce comportement. Par exemple, il existe une vitesse limite due au frottement.

2.3.3 Le mouvement en deux dimensions

Supposons que nous lancions obliquement un objet vers le haut. Le mouvement est le même que s'il y avait deux mouvements indépendants et simultanés: un mouvement horizontal rectiligne et uniforme et une chute verticale uniformément accélérée sous l'effet de la gravité. L'interaction gravitationnelle est la cause de l'accélération verticale, et n'agit pas dans la direction horizontale. L'accélération horizontale (si l'on néglige la résistance de l'air) est donc nulle. Nous étudierons ici la description de ce mouvement.

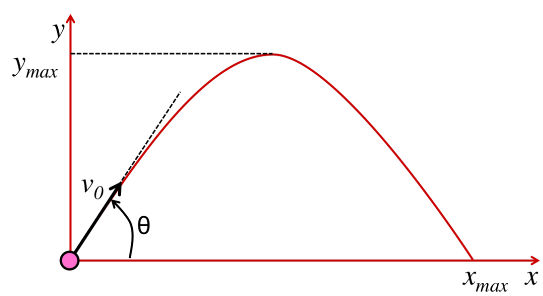


Figure 2.5: Représentation générale du mouvement à deux dimensions. E.g. lancement d'une balle de golf.

Nous pouvons décomposer le mouvement en deux dimensions: une dimension le long de l'axe horizontal x, et une le long de l'axe vertical y. Le point de départ sera noté $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ avec $g = 9.8$ m/s^2. Au moment $t = 0$ on donne à la balle une vitesse initiale de module v_0 dans une direction qui fait un angle θ avec l'axe x et telle que les deux composantes horizontale et verticale de la vitesse sont positives.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix}$$

Dans la direction x nous avons un MRU et dans la direction y un MRUA. Les équations du déplacement en fonction du temps dans les deux directions sont:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}\, t \\ -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_{0y}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta\, t \\ -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\theta\, t \end{pmatrix}$$

et les équations de la vitesse en fonction du temps:

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta - g\, t \end{pmatrix}$$

Le mouvement vertical est déjà étudié à la section 2.3.2. On peut extraire l'hauteur y_{max} et le temps total du movement, t_{max} comme dans l'example 2.3.2:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \quad \text{et} \quad t_{max} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{2.10}$$

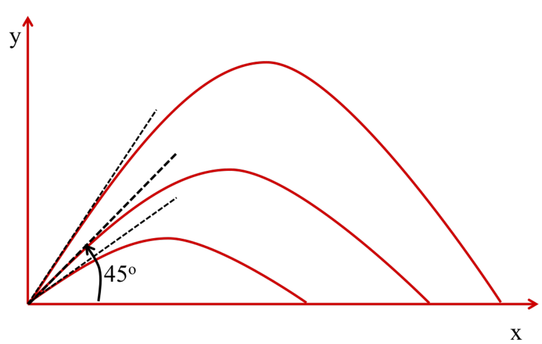
La distance x_{max} est la distance parcourue dans la direction x pendant un temps t_{max}:

$$x_{max} = v_0 \cos\theta\, t_{max} = v_0 \cos\theta\, \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \Rightarrow$$

$$x_{max} = 2\frac{v_0^2}{g} \cos\theta \sin\theta \tag{2.11}$$

La quantité $\cos\theta \sin\theta$ est maximum pour $\theta = 45^o$. À cet angle la portée du tir pour une vitesse donnée est maximale.

Question pour réfléchir.



Le dessin est-il correct? Trois obus tirés d'un meme point sous des angles différents par rapport à l'horizontale: 30^o, 45^o et 60^o. Leurs trajectoires sont représentées sur le dessin. Est-il correct?

Exercices

Exercice 2.1. Superman court le long de la voie ferrée à la vitesse 100 km/h. Il atteint l'arrière d'un train de marchandise de longueur 500 m roulant à 50 km/h. À ce moment là il accélère à 10 m/s^2. Quelle distance parcourt le train jusqu'à ce que Superman atteigne la locomotive?

Exercice 2.2. Un jeune enfant joue seul en jetant une balle verticalement vers le haut. À quelle vitesse doit-il la lancer pour qu'elle revienne dans ses mains exactement une seconde plus tard? La résistance de l'air est négligeable.