# Physique Générale C

Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

## Chapitre 7

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

**Bibliographie**

[1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
[2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
[3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
[4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

# Table des matières

# 7

# Mouvement de rotation

Tout mouvement peut-être décomposé en deux contributions, un mouvement de translation et un mouvement de rotation. Dans le cas du mouvement de translation, deux points quelconques du corps se déplacent selon des trajectoires identiques. Ces trajectoires peuvent être soit une ligne droite (et dans ce cas nous parlons d'une translation rectiligne) soit une courbe (et dans ce cas nous parlons d'une translation curviligne). Dans le cas d'une rotation, deux points quelconques du corps ne suivent pas forcément des trajectoires identiques.

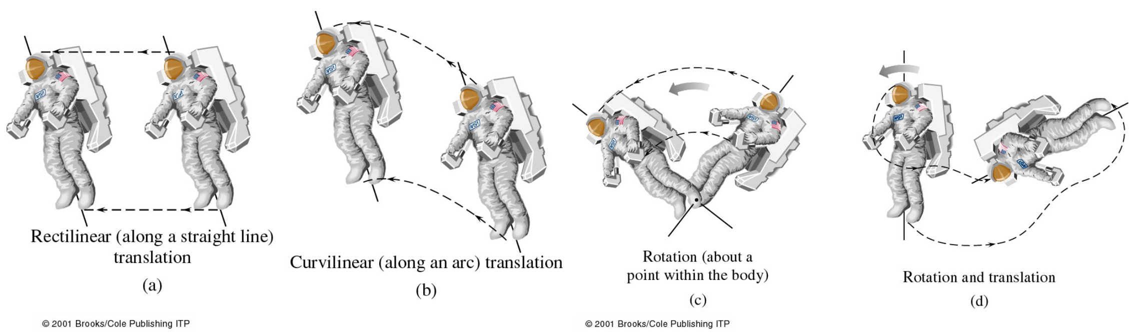


Figure 7.1: Le mouvement d'un corps rigide dans l'espace peut être décomposé en mouvements de rotation et de translation.

## 7.1 Cinématique de la rotation

Considérons un objet en rotation autour d'un point $O$, par exemple, une roue, une main, ou un collier de perles comme dans la figure 7.2. Chaque perle décrit un arc de cercle différent, $\ell$, mais elles balaient toutes le même angle $\theta$, le déplacement angulaire.

L'arc de cercle est proportionnel à l'angle $\theta$ et au rayon $r$ sur lequel se trouve la perle. On peut mesurer les angles avec une unité qui permet d'écrire directement:

$$\theta = \frac{\ell}{r} \quad ; \quad [\theta] = \text{rad} \tag{7.1}$$

Cette unité angulaire est le radian et il est définit comme le déplacement angulaire qui correspond à un arc de cercle égal au rayon. Puisque pour un angle de $360^o$ la circonférence est $2\pi\ r$:

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57.3^o$$

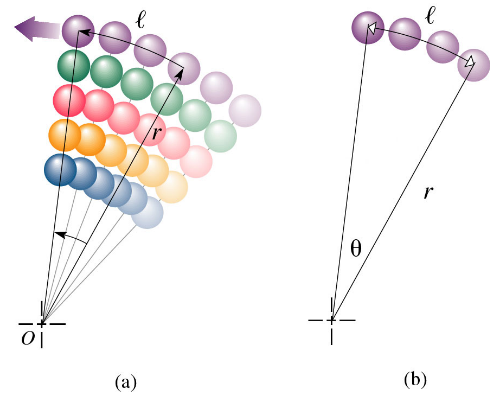


Figure 7.2: Le mouvement d'un corps rigide dans l'espace peut être décomposé en mouvements de rotation et de translation.

**Attention**: rad est une "unité sans unité", c'est-à-dire qu'elle "disparait" si on l'utilise dans une équation. Exemple: $[r\theta] = [r]$=mètre.

Par convention, $\theta > 0$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et $\theta < 0$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi, un déplacement angulaire de quatre tours suivi de quatre tours dans le sens inverse donne $\theta = 0$. La longueur d'arc $\ell = \theta r$ peut prendre des valeurs positives ou négatives.

Un même déplacement angulaire peut correspondre à des longueurs d'arc très différentes en fonction de la distance au centre de référence. La diamètre de la Lune $D_L$ est environs $3.4 \times 10^6$ m. La Lune est à une distance $r = 3.8 \times 10^8$ m de la surface de la Terre. Si nous assimilons son diamètre rectiligne à un arc, alors l'angle $\theta$ sous-tendu par la Lune vue de la Terre, appelé diamètre apparent, est:

$$\theta = \frac{\ell}{r} = \frac{D_L}{r} = \frac{3.4 \times 10^6 \text{ m}}{3.8 \times 10^6 \text{ m}} = 0.009 \text{ rad} \approx 0.5^{\text{o}}$$

Le diamètre du Soleil ($1.4 \times 10^9$ m) est beaucoup plus grand, mais sa distance à la Terre ($1.5 \times 10^{11}$ m) l'est aussi. Par coïncidence le Soleil sous-tend le même angle de 0.009 rad. Ainsi, les deux corps célestes semblent être de même taille, et la Lune peut tout juste éclipser le Soleil.

## 7.2 La vitesse angulaire

Dans un mouvement circulaire, on mesure le déplacement angulaire $\theta$ et la longueur de l'arc $\ell$, à partir d'une certaine droite de référence, ici l'axe $x$ (figure 7.3). Selon la définition du déplacement angulaire, les intervalles finis sont liés par: $\Delta\ell = r\Delta\theta$. Si $\Delta t$ est le temps mis pour parcourir l'arc $\Delta\ell$ correspondant à l'angle $\Delta\theta$, alors:

$$v_m = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega_m$$

Le terme de gauche est la vitesse moyenne, celui de droite est la vitesse angulaire moyenne. L'unité de la vitesse angulaire est [rad/s]. D'autres unités d'usage courant sont les degrés par seconde, les tours par seconde ou par minute (t/s ou t/m). Un tour correspond à $\theta = 2\pi$ rad, alors un tour par second équivaut $2\pi$ rad/s. Pour autant que la vitesse angulaire soit mesurée en rad/s, la vitesse moyenne et la vitesse angulaire moyenne sont simplement reliées par:

$$v_m = r\ \omega_m \tag{7.2}$$

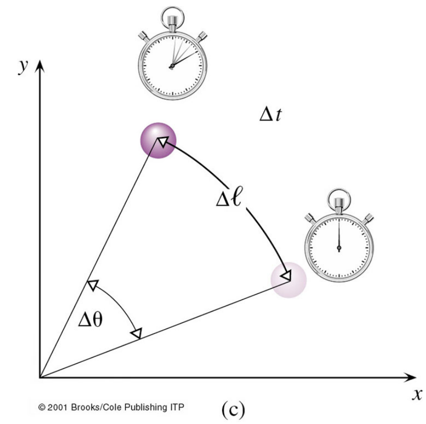


Figure 7.3: Lorsque la perle se déplace, l'angle change de $\Delta\theta$ et la longueur de l'arc, mesurée à partir de l'axe des $x$, varie de $\Delta\ell = r\Delta\theta$.

Dans la limite d'un intervalle $\Delta t$ infiniment petit, nous obtenons la vitesse angulaire instantanée $\omega$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\Delta\theta}{\Delta t}) = \frac{d\theta}{dt} \tag{7.3}$$

Donc $\omega$ mesure le taux de variation de $\theta$ dans le temps. Dans la même limite, avec $r$ constant, on obtient la relation entre vitesse instantanée et vitesse angulaire instantanée (toujours pour $[\omega]$ = rad/[s]):

$$v = r\ \omega \tag{7.4}$$

Cela signifie qu'une perle sur un grand rayon $r_2$ se déplace plus vite qu'une perle à $r_1 < r_2$, bien que $\omega$ ait la même valeur pour les deux (figure 7.4). La vitesse angulaire est la même pour tous les points d'un corps rigide qui tourne autour d'un axe; $\omega$ caractérise complètement le mouvement.

---

**Exemple 7.2.1.** Sur un CD, la musique est codée en une longue spirale de petites crêtes du centre vers l'extérieur qui peut atteindre 5.4 km de long. Un faisceau laser suit la trace à une vitesse constante de 1.2 m/s, et l'information du CD est lue par la lumière fluctuante réfléchie par les crêtes. Typiquement, le parcours commence à $r = 2.3$ cm du centre et finit à $r = 5.9$ cm. Pour obtenir une vitesse constante, la vitesse angulaire est variée constamment. Déterminer la vitesse angulaire au début et à la fin du parcours.

**Solution** Notons $r_i$ et $\omega_i$ le rayon et la vitesse angulaire du début, $r_f$ et $\omega_f$ à la fin du parcours. La vitesse instantanée $v = 1.2$ m/s est constante, alors $v = r_i\ \omega_i = r_f\ \omega_f$. Les vitesses angulaires sont:

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{0.023 \text{ m}} = 52.2 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{0.059 \text{ m}} = 20.3 \text{ rad/s}$$

Un tour correspond à $2\pi$ rad de déplacement angulaire, alors $\omega$ en tours/s vaut:

$$\omega_i = 52.2\ rad/s = \frac{52.2}{2\pi} \text{ tours/s} = 8.3 \text{ tours/s} \quad ; \quad \omega_f = 20.3 \text{ rad/s} = 3.2 \text{ tours/s}$$

◀

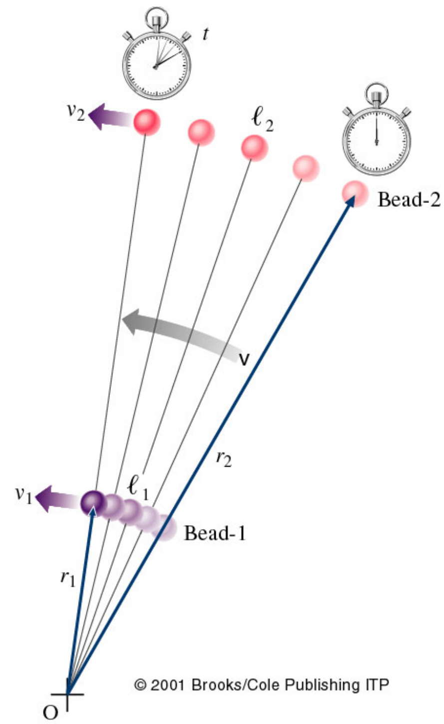


Figure 7.4: Les perles 1 et 2 sont représentées décrivant leurs cercles respectifs pendant des intervalles de temps égaux. La perle 2 a parcouru une plus grande distance; elle a bougé plus vite ($v_2 > v_1$), bien que les deux perles aient la même vitesse angulaire $\omega$.

---

**Exemple 7.2.2.** Une corde est enroulée autour d'un cylindre horizontal de rayon de 50 cm. Un poids est suspendu à l'autre extrémité. Quelle est la vitesse angulaire du cylindre si le poids descend à la vitesse constante de 1 m/s?

**Solution** Données: $R = 0.5$ m et $v = 1$ m/s. À trouver: $\omega$.
Si le cylindre tourne d'un angle $\theta$, une longueur $\ell = R\theta$ de la corde se dévide et le poids tombe de la même longueur. Nous en déduisons que, $v = R\omega$ et:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1 \text{ m/s}}{0.5 \text{ m}} = 2 \text{ rad/s}$$

---

## 7.3 Accélération angulaire

Les variations de vitesse angulaire $\omega$ avec le temps sont analogues aux changements de vitesse linéaire $v$. Si la vitesse angulaire varie de $\Delta\omega$ pendant un intervalle de temps $\Delta t$, le module de son accélération angulaire moyenne $a_{ang\ m}$ est:

$$a_{ang\ m} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} \tag{7.5}$$

L'unité de l'accélération angulaire est le rad/s$^2$. Dans la limite $\Delta t \to 0$, la moyenne tend vers l'accélération angulaire instantanée $a_{ang}$:

$$a_{ang} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7.6}$$

Pour l'instant, nous limitons notre étude aux cas où $a$ est constante, et égale à $a_{ang} = a_{ang\ m}$.

De l'équation 7.4, nous déduisons que, si la distance $r$ reste inchangée, une variation de la vitesse angulaire entraîne une variation de la vitesse linéaire, $\Delta v = r\ \Delta\omega$. Et l'équation 7.5 peut être écrite sous la forme:

$$a_{ang\ m} = \frac{\Delta v}{r\ \Delta t} = \frac{1}{r} a_m \tag{7.7}$$

En faisant tendre $\Delta t$ vers zéro, avec $r$ constant, nous obtenons la relation entre accélération angulaire et linéaire (tangentielle):

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

soit:

$$a_T = r a_{ang}$$

à condition que $a_{ang}$ soit en rad/s$^2$.

L'accélération $a_T$ est l'**accélération tangentielle** (ou linéaire) due à la variation de la vitesse; $a_T$ n'existe pas si $v$ est contante. L'**accélération centripète** $a_c$, que vous avons déjà étudié, est due à la variation de la direction du mouvement, avec $v$ constant ou non. Dès que la direction de $\vec{v}$ change, il y a une accélération centripète. Pour un parcours circulaire, ceci est toujours le cas. **Si la direction et le module de $\vec{v}$ varient tous les deux, les deux accélérations $a_T$ et $a_c$ sont non nulles et sont perpendiculaires.**

---

**Exemple 7.3.1.** Une voiture de Formule 1 prend un virage de 50 m de rayon avec une vitesse angulaire de 0.60 rad/s et une accélération angulaire de 0.20 rad/s$^2$. Calculez sa vitesse linéaire au début du virage, son accélération centripète, ses accélérations tangentielle et totale.

**Solution** Données: $r = 50$ m, $\omega = 0.60$ rad/s et $a_{ang} = 0.20$ rad/s$^2$. À trouver: $v$, $a_c$, $a_T$ et l'acceleration total $a$.
La vitesse angulaire et le rayon du virage permettent de calculer la vitesse linéaire et l'accélération centripète initiales:

$$v = r\omega = (50 \text{ m})(0.6 \text{ rad/s}) = 30 \text{ m/s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{50 \text{ m}} = 18 \text{ m/s}^2$$

L'accélération tangentielle est donnée par:

$$a_T = r\ a_{ang} = (50 \text{ m})(0.2 \text{ rad/s}^2) = 10 \text{ m/s}^2$$

L'accélération totale correspond au module de la somme vectorielle:

$$\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_T} \quad ; \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} = \sqrt{(r\ \omega^2)^2 + (r\ a_{ang})^2} = 21 \text{ m/s}^2$$

Cette accélération fait avec la tangente un angle:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_c}{a_T} = 61^o$$

◄

## 7.4 Mouvement curviligne uniformément accéléré

Nous pouvons appliquer tout-ce que nous savons sur le mouvement rectiligne uniformément accéléré (chapitre 2) au mouvement circulaire uniformément accéléré (avec $a \to a_T$).

$$v(t) = v_0 + a_T\, t \tag{7.8}$$

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \tag{7.9}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a_T\, t^2 \tag{7.10}$$

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a_T\, [x(t) - x_0] \tag{7.11}$$

Ces équations du mouvement curviligne peuvent être transformées aisément en un ensemble d'équations à accélération $a_{ang}$ constante, en utilisant les relations que nous avons appris dans ce chapitre:

$$\ell = r\ \theta$$

$$v = r\ \omega$$

$$a_T = r\ a_{ang}$$

Il suffit alors de faire des substitutions pour aboutir aux équations:

$$\omega(t) = \omega_0 + a_{ang}\, t \tag{7.12}$$

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega) \tag{7.13}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2} a_{ang}\, t^2 \tag{7.14}$$

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2a_{ang}\, [\theta(t) - \theta_0] \tag{7.15}$$

---

**Exemple 7.4.1.** Un volant d'inertie est un disque massif utilisé dans certaines machines pour emmagasiner de l'énergie rotationnelle. Supposons qu'un autobus est muni d'un volant d'inertie de diamètre 2.0 m. Il est accéléré, à partir de l'arrêt, à un taux constant de 2.0 t/m par seconde[a]. Quelle sera la vitesse angulaire d'un point de la périphérie de ce volant au bout de 5.0 s? De quel angle ce point aura-t-il tourné?

[a] Tours par minute par seconde, ou autrement dit, revolutions par minute par second, rpm/s

**Solution** Données: $r = 1.0$ m, $a_{ang} = 2$ rpm/s et $\omega_0 = 0$. À trouver: $\omega$ et $\theta$ à $t = 5.0$ s. Déterminons d'abord $a_{ang}$ en rad/s$^2$:

$$a_{ang} = \frac{(2.0 \text{ t/m/s})(2\pi \text{ rad/t})}{(60 \text{ s/min})} = 0.209 \text{ rad/s}^2$$

Pour trouver la vitesse angulaire finale, on peut utiliser l'équation:

$$\omega = \omega_0 + \mathrm{a_{ang}t} = (0 + 0.209 \text{ rad/s}^2)(5.0 \text{ s})$$

soit, $\omega = 1.045$ rad/s. On prend pour $\theta$:

$$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{a_{ang}t^2} = 2.6 \text{ rad}$$

## 7.5 Roulement sans glissement

Le cas du roulement libre mérite une étude spécifique. Le terme roulement libre ou roulement sans glissement signifie qu'il n'y a aucun glissement du point de contact avec le sol, c'est-à-dire ni dérapage ni mouvement de toupie. I.e. le point de contact a une vitesse de translation par rapport au sol qui est égale à zero. Ceci réclame un frottement suffisant pour tenir momentanément le point B au repos.

La roue de la figure 7.5 roule vers la droite et le point $O$, sur l'axe, se déplace jusqu'à $O'$ pendant que $A$ se déplace jusqu'à $A'$ et $B$ jusqu'à $B'$. La longeur de l'arc $BA$ est $\ell$ et il en est de même pour l'arc $B'A'$ et les distances $OO'$ et $BA'$. Ainsi, la distance rectiligne parcourue par le point central est $\ell = R\,\theta$, alors $v = R\,\omega$ et $a = R\,a_{ang}$. Le point central a donc la même vitesse et la même accélération qu'un point quelconque de la jante. Notons que lorsque le point $B$ est en contact avec le sol, sa vitesse mesurée par rapport à $O$, notamment $v_{BO}$, est dirigée vers la gauche. La vitesse de $O$ relativement au sol, $V_{OS}$, est dirigée vers la droite. En plus, $v_{BO} = v_{OS} = R\,\omega$; nous en déduisons que:

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BO} + \vec{v}_{OS} = 0$$

La vitesse du point $B$ par rapport au sol, au moment où il touche le sol, est donc nulle; c'est cela, l'absence de glissement.

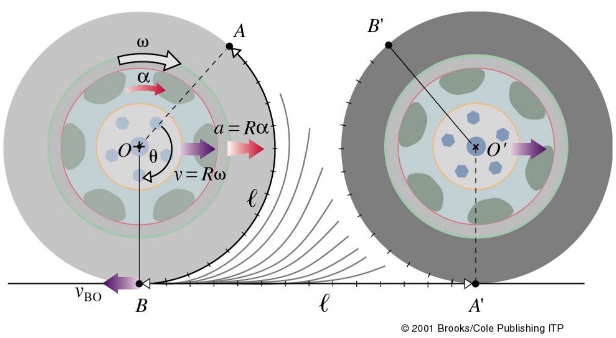


Figure 7.5: Pendant qu'un corps roule en tournant autour de son centre avec une vitesse angulaire $\omega$ et une accélération angulaire $a_{ang}$, le point $O$ se déplace avec une vitesse $v = R\,\omega$ et une accélération $a = R\,a_{ang}$ à tout instant.

## Exercices

**Exercice 7.1.** Un cycliste, roulant à 5.0 m/s, accélère uniformément jusqu'à 10.0 m/s en 2.0 s. Les pneus du vélo ont 35.0 cm de rayon. Un petit caillou est pris dans la bande de l'un d'eux. (a) Quelle est l'accélération du caillou pendant ces deux secondes? (b) De quel angle a-t-il tourné? (c) Quelle est la distance parcourue par ce caillou pendant l'accélération?

**Exercice 7.2.** Un disque de diamètre 1.0 m est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe, d'accélération angulaire 5 rad/s$^2$, de l'arrêt jusqu'à 20 t/m. Combien de tours a-t-il effectué pendant ce temps? Quelle est la distance totale parcourue par un point à la périphérie du disque?