Physique Générale C

Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Chapitre 8

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

Bibliographie

[1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
[2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
[3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
[4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

8

Équilibre des corps en translation et en rotation

Nous nous penchons maintenant sur un cas particulier où, bien que des forces externes agissent sur un corps, leurs effets s'annulent et il n'y a aucun changement dans le mouvement. On dit alors que le corps est en équilibre. Il peut rester au repos ou se déplacer; mais son mouvement ne change pas avec le temps ($\vec{a} = 0$). L'étude de ces cas particuliers constitue la **statique**. Si un objet est au repos, nous disons qu'il est en équilibre statique.

8.1 Équilibre des corps en translation

Nous nous limitons pour l'instant aux équilibres de translation pure, c'est-à-dire sans rotation. Pour simplifier, nous considérons uniquement des systèmes de forces coplanaires, c'est à dire, des forces qui agissent dans un seul plan.

La deuxième loi de Newton implique qu'un système général est en équilibre translationnel, $\vec{a} = \vec{0}$, si:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \tag{8.1}$$

Ceci est la **première condition d'équilibre**. Si toutes les forces sont confinées dans un plan, on peut définir deux axes perpendiculaires arbitraires dans ce plan. Les composantes scalaires des forces le long de ces axes obéissent aux conditions simultanées:

$$\sum F_x = 0 \ ; \ \sum F_y = 0$$

Soit une masse attachée à une corde légère accrochée au plafond. La masse, la corde et le crochet sont séparément en équilibre; pour chaque élément, $\sum F_y = 0$. La tension de la corde est égale à la charge : $F_T = F_W$.

8.1.1 Systèmes de forces parallèles et colinéaires

Si deux forces colinéaires (qui agissent suivant la même ligne), agissant sur un corps, sont dirigées l'une vers l'autre, le corps est comprimé. Par contre, si deux forces colinéaires agissant sur un corps l'étirent, on dit qu'il est soumis à une tension. Les forces externes qui supportent le système sont appelées des forces de réaction.

Cordes et poulies Si deux cordes légères et identiques supportent la même charge, comme le pot de 300 N dans la figure 8.1, la charge est également partagée, la tension de chaque corde est 150 N et la force sur chaque crochet est 150 N. Si trois cordes se répartissent également la charge de 300 N, la tension de chacune sera 100 N et la force sur chaque crochet du plafond sera de 100 N. D'autres exemples sont donnés sur les figures 8.2 et 8.3.

On peut utiliser un nombre arbitraire de poulies pour démultiplier la force par un facteur correspondant. Les poulies peuvent être montées l'une à coté de l'autre ou l'une au-dessus de l'autre. De tels dispositifs sont utilisés dans les ascenseurs et les grues. Les poulies servent donc à démultiplier et à réorienter les forces.

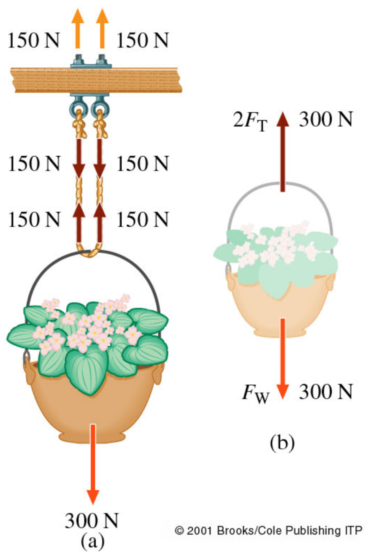


Figure 8.1: (a) Une charge portée par deux cordes. Comme le système est en équilibre, $\sum F_y = 0$. (b) La force ascendante ($2F_T$) est l'opposée de la force nette descendante (F_W). Ici vous comptez le nombre de cordes, de la même façon que vous comptez le nombre de pieds soutenant une table.

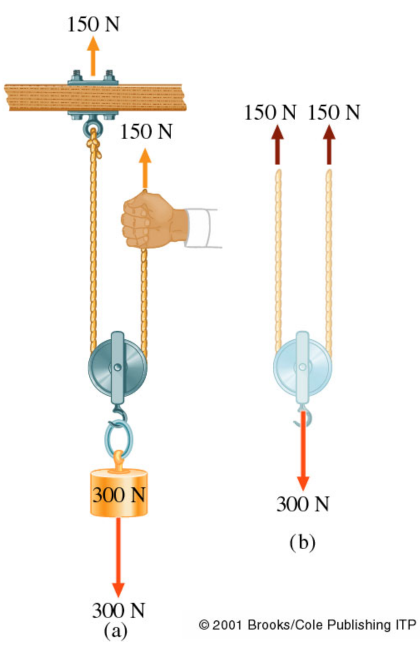


Figure 8.2: (a) Dans cette configuration, la poulie est utilisée comme un multiplicateur de force. Comptez le nombre de tronçons de cordes supportant la charge; dans ce cas, il y en a deux. Le système peut donc supporter une charge double de la force exercée. Ainsi la main soulève une charge de 300 N en exerçant une force de 150 N. (b) La tension dans chaque partie de la corde est 150 N. La force ascendante totale est donc 300 N.

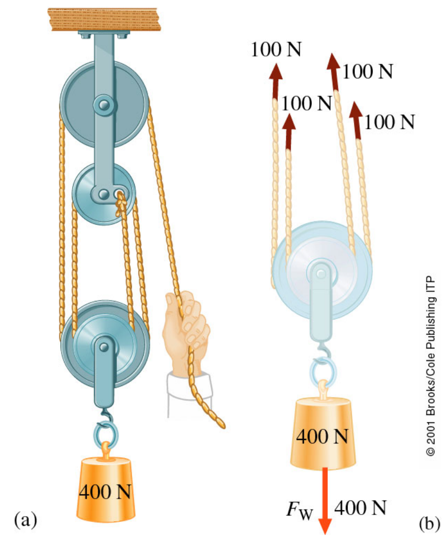


Figure 8.3: (a) Quatre cordes soutiennent la charge, et le main exerce seulement une force de 100 N vers le bas. (b) Si quatre cordes soutiennent une charge en équilibre, chaque corde est sous une tension égale au 1/4 de cette charge.

8.1.2 Systèmes de forces concourantes

Les forces concourantes sont toutes les forces dont les lignes d'action passent par un même point. La ligne d'action est construite en prolongeant le vecteur force. Une situation où toutes les lignes d'action se croisent en un seul point est facile à analyser car les forces concourantes peuvent être combinées vectoriellement en une force résultante.

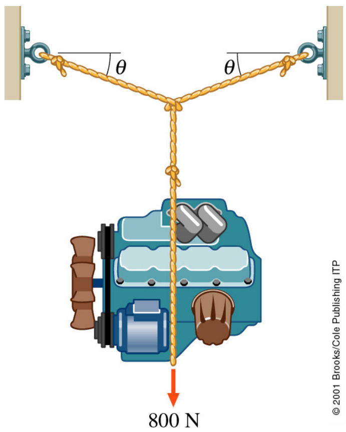
Cette situation n'est pas aussi spéciale qu'il n'y paraît: des forces coplanaires non-parallèles qui maintiennent un objet en équilibre sont forcément concourantes.

Un système, soumis à des forces concourantes et coplanaires (forces qui passent toutes par un même point et qui sont dans le même plan) est en équilibre si

$$\sum F_x = 0 \; ; \; \sum F_y = 0$$

où x et y correspondent à deux directions perpendiculaires. Nous avons donc deux équations indépendantes, ce qui permet de déterminer au plus deux inconnues.

Exemple 8.1.1. Une machine qui pèse 800 N est suspendue en équilibre par deux cordes symétriques qui font un angle θ avec l'horizontale. Pour $\theta = 20^o$, calculez (a) la tension dans chacune des cordes et (b) la force horizontale qui essaie d'arracher les crochets d'attaches.

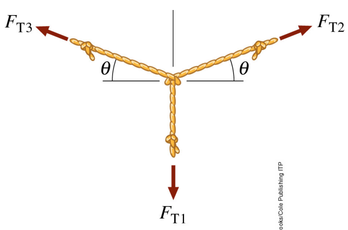


(a)

Consulter le tableau suivant des tensions de rupture (en kN) pour déterminer quelle corde convient. Pour éviter une rupture à cause de forces momentanément élevées, il est d'usage de ne pas dépasser le sixième de la tension de rupture.

Diamètre (cm)	Chanvre de Manila	Filament de Nylon	Tresse de Nylon	Câble d'acier
0.48	1.8	4.0	4.6	19
0.63	2.4	6.6	7.1	31
0.79	4.0	9.6	12.0	44
0.95	5.4	14.9	16.9	64
1.11	7.0	20.0	23.1	78
1.27	10.6	27.1	32.0	101

Solution Le système consiste en trois cordes et une charge.



(c)

(a) Le diagramme du corps isolé montre que les trois forces externes F_{T2}, F_{T3} et F_W sont concourantes au noeud. La tension F_{T1} vient du poids du moteur:

$$F_{T1} = F_W = 800\ N$$

Par symétrie, les modules des tensions dans les deux autres cordes sont les mêmes, $F_{T2} = F_{T3}$.

Prenons l'axe y positif vers le haut et l'axe x positif vers la droite. La somme des forces sur le noeud est nulle dans les deux directions. Dans la direction horizontale, cette somme s'écrit:

$$\sum F_x = F_{T2}\cos\theta - F_{T3}\cos\theta = 0$$

alors: $F_{T2} = F_{T3}$ ce qui confirme la symétrie.

Dans la direction verticale:

$$\sum F_y = F_{T2}\sin\theta + F_{T3}\sin\theta - F_W = 0 \Rightarrow 2F_{T2}\sin\theta = F_W \Rightarrow F_{T2} = 1.17\ kN$$

une force donc bien supérieure à la charge.

(b) La force horizontale qui agit sur les chevilles fixant chaque corde au mur, est: $F_x = F_{T2}\cos\theta = 1.1kN$.

La plus grande tension, avec sa marge de sécurité, dépasse 7 kN. Il nous faut alors un filament de nylon d'au moins 7.9 mm ou une tresse de nylon d'au moins 6.3 mm de diamètre pour tenir le moteur.

◀

8.2 Équilibre des corps en rotation

La balance à bras égaux a été largement utilisée depuis plus de 4000 ans. Si des forces descendantes et égales sont appliquées aux deux extrémités d'une tige, qui peut pivoter autour de son centre, elle reste en équilibre horizontal. Si la tige ne pivote pas (ou, plus généralement, si elle ne subit aucun changement dans son état de mouvement rotationnel) nous disons qu'elle est en équilibre rotationnel. Le mot équilibre vient des mots latins "aequus", qui veut dire "égal" et "libra" qui veut dire "balance".

La *loi du levier*, qui est assez rudimentaire, affirme que des forces inégales agissant perpendiculairement aux extrémités d'une tige qui peut pivoter, s'équilibrent si $F_{W1}L_1 = F_{W2}L_2$, où L_1 et L_2 sont les distances de l'axe de pivotement aux points d'application des forces (par exemple, comme sur les figures 8.4 et 8.5). Nous devons donc considérer à la fois les forces et leurs distances à l'axe de pivotement.

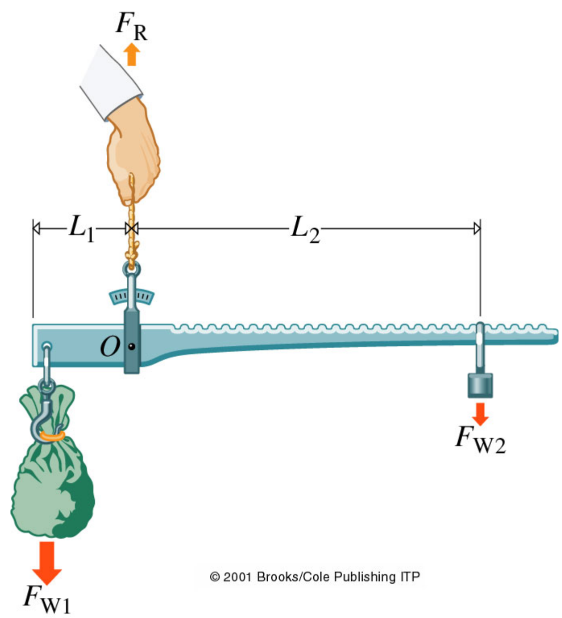


Figure 8.4: Balance à bras inégaux ou bascule. Le contrepoids peut être déplacé le long du bras jusqu'à atteindre l'équilibre avec l'objet pesé. La bascule équilibrée est un système des forces dont les lignes d'action sont parallèles et donc non concourantes.

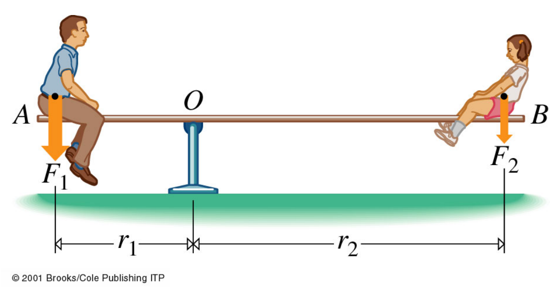


Figure 8.5: Forces inégales et parallèles à des distances inégales au point de pivotement. Ce système est en équilibre rotationnel.

Exemple 8.2.1. Un enfant de masse 30 kg voudrait jouer à la bascule avec son chien de masse 10 kg. La bascule, formée par une planche de 6.5 m, pivote autour de son milieu. À quelle distance l'enfant doit-il s'asseoir pour équilibrer le chien qui est à 3.0 m du pivot?

Solution Données: $m_E = 30$ kg, $m_c = 10$ kg, $r_c = 3.0$ m et longueur de la planche 6.5 m. À déterminer: r_E. Les forces qui agissent sur les extrémités sont les poids $F_{WE} = m_E\, g$ et $F_{WC} = m_c\, g$. La loi du levier donne alors:

$$m_E\; g\; r_E = m_c\; g\; r_c$$

d'où $r_E = 1.0$ m. L'enfant doit donc se mettre à 1.0 m du pivot.

8.2.1 Moment de forces

La clé à fourche ci-dessous peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à la feuille passant par O. La clé est mise en rotation par l'application d'une force $\vec{F}$ à la position $\vec{r}$ mesurée à partir de l'axe de rotation. Pour que la clé tourne, il faut que le point d'application de la force ne passe pas par l'axe de rotation. L'efficacité maximale est obtenue quand $\vec{F} \perp \vec{r}$ et quand le point d'application est le plus loin possible de l'axe de rotation ($|\vec{r}|$ grand).

On appèle le **bras de levier** de la force $\vec{F}$ la distance de $\vec{F}$ à l'axe de rotation; c'est-à-dire, la distance perpendiculaire ($r_\perp$) du point O à la ligne d'action de la force. Le moment de la force par rapport à O est défini comme le produit de F par son bras de levier. Nous symbolisons le moment de la force par la lettre grecque tau (τ). Pour préciser qu'il est le moment par rapport au point O, nous écrivons τ_O, ainsi:

$$\tau_O = r_\perp \; F$$

Le moment de la force mesure la capacité à produire un mouvement de rotation. Dans la figure 8.3, la ligne d'action du vecteur force $\vec{F}$ fait un angle θ avec le vecteur position $\vec{r}$. Dans ce cas, $r_\perp = r \sin\theta$, donc:

$$\tau_O = F \; r \sin\theta$$

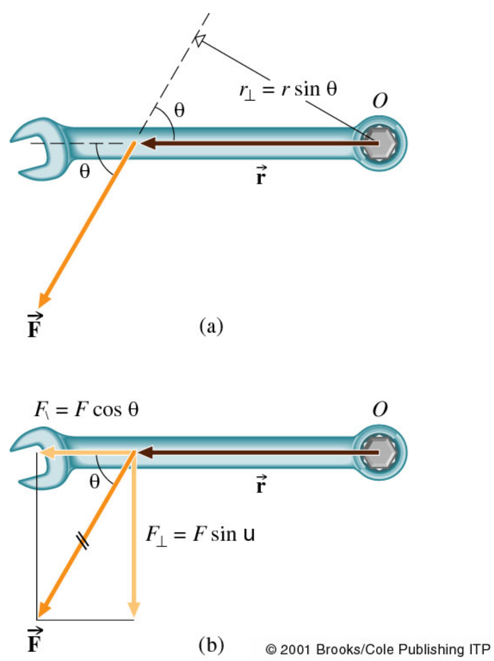


Figure 8.6: La torsion qu'on peut effectuer avec une clé dépend du module de la force, de la direction de sa ligne d'action et du point où elle est appliquée; c'est le moment de la force. Le moment d'une force est donné par la formule $Fr_{perp} = F_\perp r = Fr\sin\theta$.

Le résultat précédent suggère que le moment de force est une grandeur vectorielle correspondant au produit vectoriel de la force par la position de son point d'application:

$$\tau_O = r\sin\theta \; F \quad ; \quad \vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \tag{8.2}$$

Le vecteur $\vec{\tau}_O$ suit le sens de l'axe passant par O et pointe dans la direction donnée par la règle de la main droite. Si tous les moments passent par le même pivot, leur moment total correspond à la somme vectorielle des moments individuels. S'ils sont de plus tous parallèles, il suffit de considérer les modules τ_O des moments, en tenant compte du signe donné par le sens de la rotation.

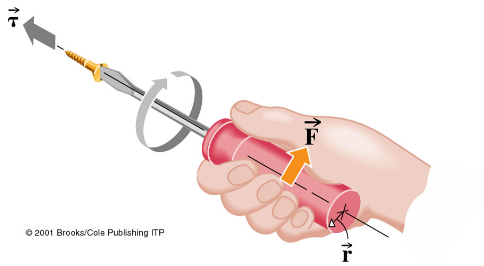


Figure 8.7: La règle de la main droite et du tournevis. Une vis ordinaire avance lorsqu'elle est tournée dans le sens des doigts de la main droite.

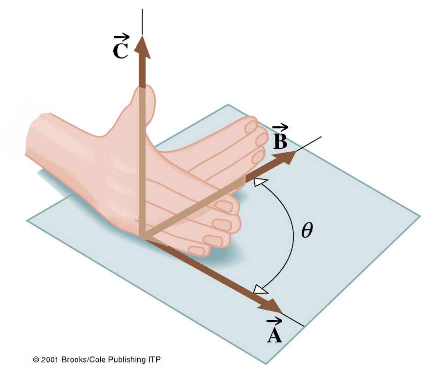


Figure 8.8: Pour trouver la direction du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$, on place les doigts de la main droite dans la direction de $\vec{A}$ et on les fait tourner de l'angle θ pour coïncider avec la direction de $\vec{B}$; alors le pouce est dans la direction du produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

Exemple 8.2.2. Le mouvement illustré dans la figure 8.9 consiste à soulever plusieurs fois la jambe, alourdie de la masse m, jusqu'à la position horizontale puis l'abaisser. Exprimez le moment des forces par rapport au genou O en fonction de θ, m, et la distance r du genou au talon dans l'exercice de musculation ci-contre. Négligez la masse de la jambe.

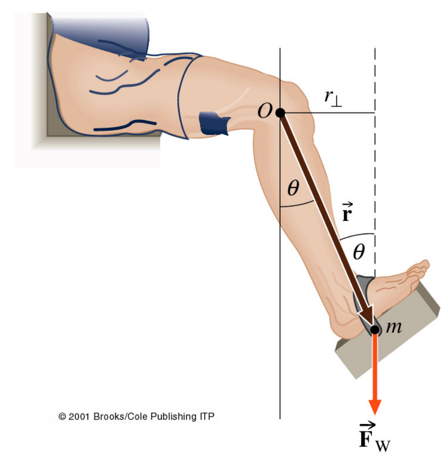


Figure 8.9: Le poids de la masse m exerce un moment de force par rapport à O qui est contrebalancé par un moment opposé produit par les muscles.

Solution La seule force qui agit est la gravitation. Elle est toujours verticale et dirigée vers le bas:

$$\tau_O = r_\perp \, F_W = r_\perp \, mg = (r \sin\theta) \, mg$$

Donc τ_O a un minimum $\tau_O = 0$ pour $\theta = 0$ et un maximum $\tau_O = mgr$ pour $\theta = 90^o$.

8.2.2 Deuxième condition d'équilibre

Les corps réels se déforment jusqu'à un certain point sous l'influence des forces appliquées; mais beaucoup de corps changent si peu que nous pouvons les considérer comme pratiquement rigides. La condition d'équilibre d'un corps rigide est que le moment résultant de toutes les forces extérieures, qui agissent sur le corps est nul. Il est clair que ce n'est pas un nouveau principe, mais une simple conséquence des trois lois de Newton.

La première condition d'équilibre, que nous avons déjà vu, correspond à un équilibre de translation:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{(eq. 8.1)}$$

La deuxième condition assure l'équilibre rotationnel pour un corps rigide:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{\omega} = \vec{0} \qquad (8.3)$$

Si les forces qui agissent sur le corps sont **concourantes**, la première condition suffit, parce que la deuxième est automatiquement satisfaite (puisque $\tau_O = 0$).

La balance romaine La balance romaine (figure 8.1) est utilisée depuis 2000 ans pour peser des objets lourds à partir d'un petit poids de masse standard. La balance romaine compare le produit du bras de levier L_i par la force gravitationnelle F_{Wi} de chaque côté du levier. Le poids de chaque côté est

$$F_{Wi} = m_i g$$

Donc $\sum \vec{\tau}_O = 0 \Rightarrow m_1 g \ L_1 = m_2 g \ L_2$. Ce type de balance compare vraiment les deux masses suspendues. Par rapport à une balance à bras égaux, la balance romaine utilise intelligemment l'effet du **bras de levier**.

Forces non concourantes Un couple est un ensemble de deux forces de même module, anti-parallèles et non colinéaires. Si un couple agit sur un corps (figure 8.10), celui-ci n'est pas en équilibre, bien que $\sum \vec{F} = 0$. Si un moment de force non nul agit sur un corps qui subit une accélération rotationnelle. Le corps reste en place, mais il se met en rotation parce que $\sum \vec{\tau} \neq 0$. La bascule, la balançoire, le levier, les ciseaux et le pied humain exploitent tous le modèle du levier, un dispositif très simple dont le point d'appui est situé entre les deux forces qui s'exercent sur lui.

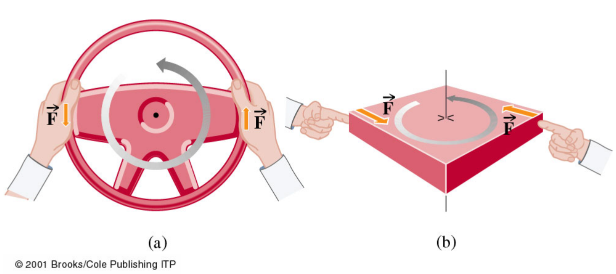


Figure 8.10: (a) Deux forces antiparallèles et de même module agissant en deux points différents d'un corps, ne produisent pas un équilibre bien que $\sum \vec{F} = 0$. En effet, il y a un moment de force et le système ne peut pas être en équilibre rotationnel. (b) Le bloc tourne sans subir un mouvement de translation.

8.3 Équilibre des solides

Sur Terre tous les objets, qui nous entourent, sont des corps de dimension finie, parfois en équilibre. Comment traiter la gravité agissant sur ces corps?

8.3.1 Centre de gravité

Tout objet fini peut être considéré comme un ensemble d'un très grand nombre de masses ponctuelles. Chaque atome subit une force gravitationnelle. Toutes ces forces sont parallèles et se combinent pour former une seule force résultante, qui est le poids du corps, F_W. La deuxième condition d'équilibre suggère que nous devons aussi connaître le point d'application de cette force. Le centre de gravité (c.g.) d'un objet est défini comme le point d'application de la force de pesanteur. Autrement dit, la seule force F_W agissant au centre de gravité produit le même effet mécanique que toutes les forces gravitationnelles agissant sur les constituants. Ceci implique que le moment résultant de toutes les force de gravité par rapport à un point quelconque est exactement égale au moment du poids total agissant au centre de gravité.

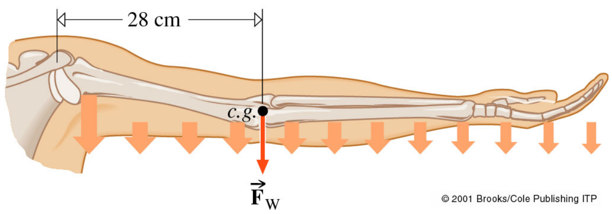


Figure 8.11: Le poids du bras est réparti sur toute sa longueur. Néanmoins, il peut être représenté par une seule force F_W appliquée en un seul point, le centre de gravité ($c.g.$).

Comme la ligne d'action du poids passe par le c.g., la force de gravité ne génère aucun moment par rapport au centre de gravité. Un corps suspendu en son c.g. est en équilibre quelle que soit son orientation et il restera comme il est lorsqu'il est lâché. Donc, un corps suspendu par son c.g. est en équilibre.

Pour calculer le centre de masse d'un corps, considérons un corps plat constitué par un nombre n de petites masses, m_1, m_2, m_3, $...m_n$, comme montré à la figure 8.12. Chaque particule subit un moment de force par rapport à un point O arbitraire choisi comme origine. La distance x_i de la masse m_i est alors le bras de levier et le moment du poids $m_i g$ est $m_i g\ x_i = F_{Wi}\ x_i$.

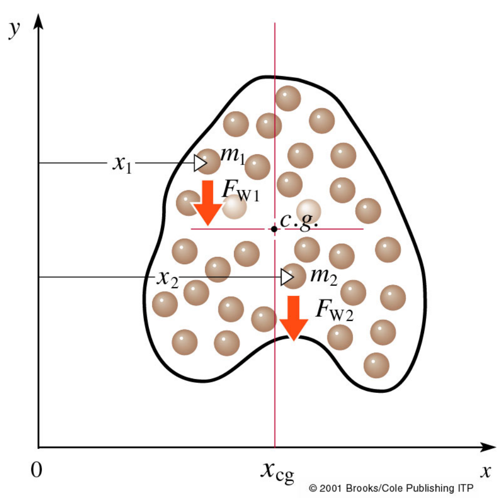


Figure 8.12: La somme des moments, autour d'un point O arbitraire, des poids de toutes les masses ponctuelles constituant un corps est égale au moment de force du poids total du corps agissant au c.g. Mesurée dans la direction de l'axe des x, la position du c.g. est à $x_{c.g.}$. Mesurée dans la direction de l'axe des y, la position du c.g. est à $y_{c.g.}$.

Le moment total des forces par rapport à O est:

$$F_{W1}\ x_1 + F_{W2}\ x_2 + ... = \sum_{j=1}^{n} F_{Wj}\ x_j$$

Le poids total est:

$$F_{W1} + F_{W2} + ... = \sum_{j=1}^{n} F_{Wj}$$

et ce poids appliqué au centre de gravité $x_{c.g.}$ doit produire le même effet que les poids élémentaires par rapport à O:

$$(\sum_{j=1}^{n} F_{Wj})\ x_{c.g.} = \sum_{j=1}^{n} F_{Wj}\ x_j \Rightarrow$$

$$x_{c.g.} = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_{Wj}\ x_j}{\sum_{j=1}^{n} F_{Wj}} \tag{8.4}$$

La coordonnée y est obtenue d'une façon analogue, en tournant le tout par 90^o.

N.B. Le centre de gravité d'un corps de forme régulière et de composition uniforme est confondu avec son centre géométrique. Le centre de masse coïncide avec le centre de gravité dans un champ gravitationnel uniforme. On assume ça dans la discussion de ce chapitre.

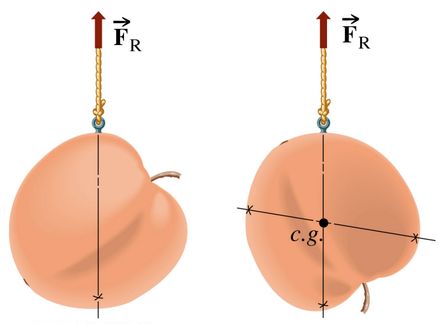


Figure 8.13: La position du c.g. d'un objet peut être déterminée en le suspendant en des points différents. Le c.g. est toujours sur la ligne d'action de la force soutenant l'objet en équilibre.

Exemple 8.3.1. Pour un homme de masse m et de hauteur h, le c.g. du pied lié à la jambe et celui de la cuisse sont illustrés dans la figure 8.14 avec les poids correspondants. Trouvez la position du c.g. de la jambe entière allongée, mesuré à partir de la plante du pied. Ce genre d'information est importante en thérapie physique.

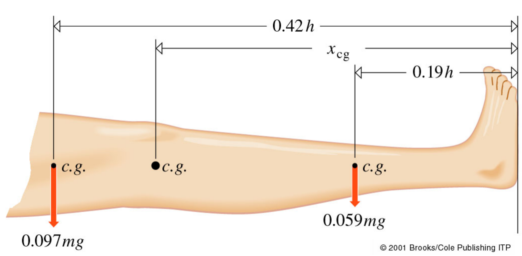


Figure 8.14: Position des c.g. des diverses parties de la jambe de l'homme.

Solution Données: $F_{W1} = 0.059\ mg$, $x_1 = 0.19\ h$, $F_{W2} = 0.097\ mg$, $x_2 = 0.42\ h$. À déterminer: $x_{c.g.}$. Traitant les deux parties de la jambe comme des masses ponctuelles localisées à leurs c.g. respectifs, nous trouvons que:

$$x_{c.g.} = \frac{F_{W1}\ x_1 + F_{W2}\ x_2}{F_{W1} + F_{W2}} = ... = 0.33\ h$$

8.3.2 Stabilité et équilibre

Un corps est dit en équilibre stable s'il revient à une position d'équilibre dont il est légèrement écarté. Dans les exemples de la figure 8.15, le déplacement soulève le centre de masse qui tend à retomber à sa position la plus basse. Le moment du poids agit sur le centre de masse et tend à faire pivoter le corps. Si, par exemple, le cône était posé sur sa pointe, il serait en équilibre instable: un petit déplacement le ferait s'écarter de plus en plus de cette position.

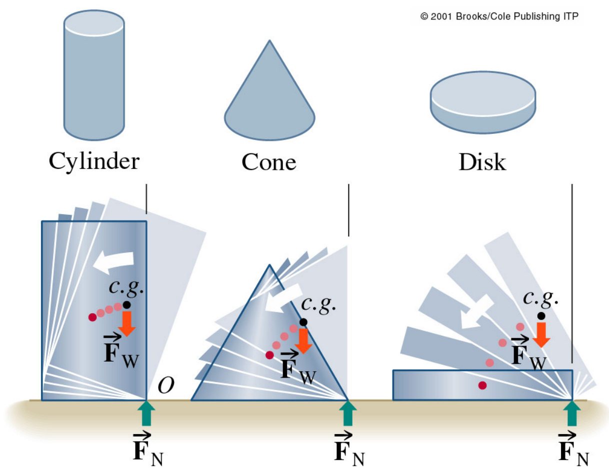


Figure 8.15: Les corps tels que ceux-ci sont en position d'équilibre stable parce qu'ils reviennent à cette position, s'ils en sont légèrement écartés. À l'équilibre, le c.g. est à un niveau plus bas que dans les positions hors de l'équilibre.

Un objet est **en équilibre stable** si, après avoir été légèrement déplacé à partir de la position d'équilibre, il y revient; dans ce cas, son centre de masse est le plus bas possible. Un objet est **en équilibre instable** si, après avoir reçu un petit déplacement momentané de la position d'équilibre, il s'éloigne de cette position et n'y retourne plus; cet équilibre arrive si l'objet est suspendu par un point plus bas que son centre de masse. Un objet est dit en **équilibre indifférent** si, après avoir reçu un petit déplacement momentané, il reste en équilibre dans cette nouvelle position, ne tendant ni à s'éloigner de sa position initiale ni à y revenir; dans ce cas, le c.g. reste à la même hauteur lorsque le corps se déplace au voisinage de cette position.

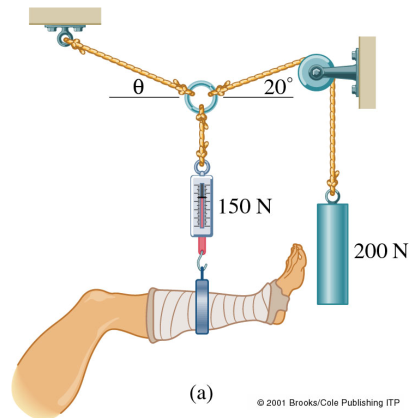
Question pour réfléchir.

Il y a une centaine d'années, le jouet représenté dans la figure à coté était très répandu. Si on l'incline, il se redresse aussitôt, de lui-même. Son équivalent moderne est un grand objet gonflable en plastique, auquel les enfants donnent des coups de poing. Comment de tels jouets fonctionnent-ils?

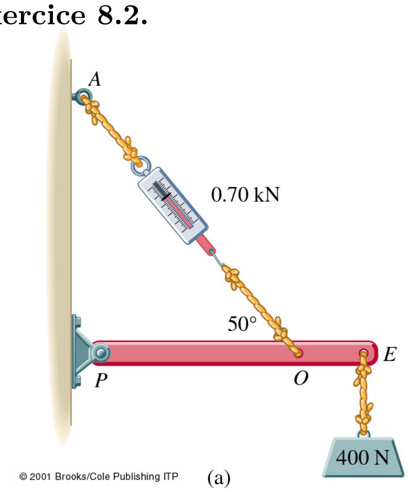
Exercices

Exercice 8.1.

Déterminez l'angle θ dans le dispositif de suspension de la jambe ci-contre. On suppose que la poulie est légère et sans frottement.



Exercice 8.2.



Une enseigne pesant 40 kg est suspendue à l'extrémité d'une barre légère, qui est attachée à un mur par un pivot. La barre est tenue par une corde sous un angle de 50^o. La tension sur la corde est de 0.70 kN. La barre a une longueur totale de 2.00 m et la corde est attachée à 0.50 m de son extrémité. Quelle est la force de réaction sur le pivot au mur en P (g =10 m/s^2)?