

Physique Générale C
Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Chapitre 9

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

Bibliographie

- [1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
- [2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
- [3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
- [4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

9	La gravité selon Newton	1
9.1	La loi de la gravitation universelle	1
9.2	La force cosmique	5

Après 2000 ans de réflexions sur la gravité, nous avons une bonne compréhension du phénomène, mais encore incomplète. Cette compréhension vient de plusieurs perspectives théoriques différentes. Nous avons d'abord la théorie Newtonienne, fiable, pratique et simple. Nous disposons aujourd'hui de la Théorie de la Relativité Générale d'Einstein, qui lie la gravité à la structure de l'espace-temps. La théorie de Newton en est une approximation et la Relativité Générale la contient et la dépasse. Elle permet d'analyser les phénomènes à l'échelle cosmique, mais la formulation d'Einstein est hautement mathématique et pratiquement inutile pour la plupart des phénomènes à l'échelle terrestre. Pourtant, cette théorie aussi est incomplète.

Ce chapitre se concentre sur la théorie newtonienne, et comment elle s'applique sur Terre et au système solaire.

9.1 La loi de la gravitation universelle

La loi classique de la gravitation universelle fut formulée par Isaac Newton en 1685 sur la base des connaissances expérimentales de son temps. Elle énonce que le module de la force gravitationnelle F_G entre deux corps de masse m et M distants d'une distance r est:

$$F_G = G \frac{mM}{r^2} \quad (9.1)$$

La distance r est mesurée entre les centres de masse des deux objets.

La force F_G est une force attractive qui agit sur toute forme de matière, partout dans l'univers. Elle est dirigée le long de la ligne reliant les centres de masse de deux corps en interaction. La constante de proportionnalité est la **constante de gravitation** universelle G .

La Terre nous attire vers le bas avec une force gravitationnelle appelée **poids**. Elle attire les pommes, les rochers et l'air, en les dotant d'un poids. Mais en retour, ces objets attirent gravitationnellement la Terre avec une force opposée; c'est donc une interaction de paire.

Confirmation de la loi en $1/r^2$ par Newton

Hooke tenta en vain d'établir expérimentalement la loi de distance en déterminant la petite variation du poids d'un objet avec l'altitude: Dans ce but, il compara le poids d'un objet mesuré au fond d'un puits et sur la tour de l'abbaye de Westminster. Mais ces mesures n'étaient pas pleinement satisfaisantes.

Newton a fait la première vérification de la loi en $1/r^2$ vers 1660, quand il était un jeune homme de 24 ans. Comme il le prétendit, il “compara la force nécessaire pour maintenir la Lune sur son orbite avec la force de gravité à la surface de la Terre et il prouva qu’elles correspondaient assez joliment”.

Newton compara la gravitation à la surface de la Terre à une distance $r_T = 6.37 \times 10^6$ m de son centre, et celle mesurée au centre de la Lune à une distance $d_L \approx 3.84 \times 10^8$ m du centre de la Terre.

La valeur de l’accélération centripète ressentie par la Lune est facilement déterminée en utilisant la relation $a_c = v^2/d_L$. La vitesse orbitale lunaire, v , correspond au parcours d’une révolution, $\Delta s = 2\pi d_L$, divisé par la période, $\Delta t = 27.32 j = 2.36 \times 10^5$ s. Cela donne une vitesse $v = 1.02$ km/s et une accélération $a_c = v^2/d_L = 0.0027$ m/s².

Ensuite, Newton compara cette valeur avec l’accélération, 9.81 m/s², à la surface de la Terre. Supposant que la force gravitationnelle varie avec la distance au centre de la planète comme $1/r^2$, l’accélération résultante varie de la même façon car $F = ma$. Donc, $g \sim 1/r^2$.

Soit g_T l’accélération gravitationnelle sur la surface de la Terre. La Lune est à une distance égale à $d_L/r_T = 60.33$ fois le rayon terrestre. La Lune (et tout objet qui se trouve à cette distance) doit subir une accélération gravitationnelle g_L donnée par les relations suivantes:

$$g \sim 1/r^2 \Rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{r_T^2}{d_L^2} = \frac{1}{(d_L/r_T)^2} \Rightarrow g_L = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{60.33^2} = 0.0027 \text{ m/s}^2$$

Ainsi, l’accélération centripète de la Lune est égale à l’accélération gravitationnelle, due à la Terre à cette altitude: $a_c = g_L$. Ceci confirme la loi de la distance $1/r^2$.

La dépendance de la masse

Le fait que la force gravitationnelle soit proportionnelle à la masse peut être déduit du fait que sur Terre tous les objets tombent avec la même accélération. Le poids d’un objet est la force exercée sur cet objet par tous les autres corps dans l’univers. En raison de la loi en $1/r^2$, cette force est dominée par la seule attraction de la Terre à proximité de la Terre.

La deuxième loi de Newton appliquée à la chute libre s’écrit $F = mg$ et l’accélération $g = F/m$ est indépendante de m . Alors:

$$F \propto m \text{ combiné avec } F \propto \frac{1}{r^2} \text{ implique } F \propto \frac{m}{r^2}$$

La troisième loi de Newton dit que l’attraction gravitationnelle est une interaction, une paire de forces égales et opposées agissant sur les deux objets. Si la Terre attire l’objet vers le bas, l’objet attire la Terre vers le haut avec la même force.

Considérons deux masses m et M en interaction. Comme la force de gravité est proportionnelle à la masse, nous concluons que $F_G \propto m$ et $F_G \propto M$. Comme les forces sur les deux objets ont la même intensité, il faut que:

$$F \propto \frac{mM}{r^2}, \text{ autrement écrit : } F = G \frac{mM}{r^2}$$

La constante de proportionnalité est la constante de gravitation universelle G .

La constante de gravitation

À proximité de la Terre, le poids est donné par $F = mg$. Le poids résulte de l'interaction gravitationnelle $F = m \frac{GM_T}{r_T^2}$, d'où $g = \frac{GM_T}{r_T^2}$. Cette équation relie l'accélération gravitationnelle terrestre, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ à la constante de gravitation universelle $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, via la masse de la Terre $M_T = 5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$ et le rayon de la Terre $r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$.

La première mesure directe de la constante de gravitation universelle G fut réalisée par **Cavendish** en 1798 en utilisant une balance de torsion: On approche deux grosses sphères de plomb de deux petites sphères montées sur un pendule de torsion. Ces dernières se déplacent jusqu'à ce que la torsion du fil vertical équilibre le couple gravitationnel. Le petit angle de rotation est mesuré en observant la réflexion d'un rayon lumineux par un petit miroir monté sur le fil de torsion. L'angle de rotation du fil est proportionnel au couple. Ayant déjà déterminé auparavant cette constante (de torsion) du fil et en mesurant l'angle de rotation produit par le couple gravitationnel, Cavendish put déterminer la force gravitationnelle F_G . Connaissant m , M , r et F , il put calculer la constante G . La valeur actuellement acceptée est:

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Cavendish obtint une valeur, équivalente dans nos unités à $6.75 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Parmi toutes les constantes fondamentales que nous rencontrerons, la constante G est celle qui est connue avec le moins de précision.

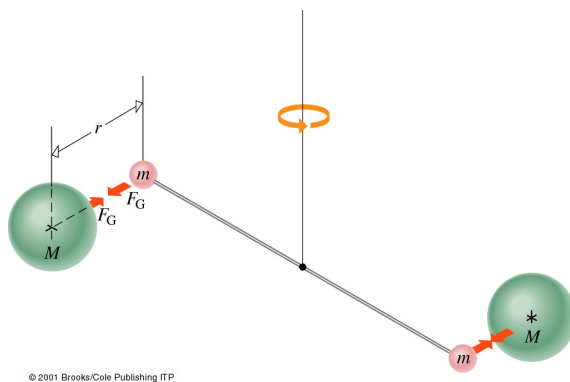


Figure 9.1: La balance de torsion de Cavendish pour déterminer G . Attirées gravitationnellement par les grandes boules, les deux petites boules font tordre le fil.

Exemple 9.1.1. Pour se faire une idée de l'intensité de l'attraction gravitationnelle, calculons la force gravitationnelle entre deux petites sphères homogènes de masse $m = 100 \text{ kg}$ dont les centres sont séparés de 1.00 m .

Solution Selon la loi de la gravitation universelle, la force est:

$$F = G \frac{mM}{r^2} = (6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}) \frac{(100 \text{ kg})(100 \text{ kg})}{(1.0 \text{ m})^2} = 6.67 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Cette force équivaut au poids d'un bébé puce. Cela n'a rien d'étonnant : nous ne nous sentons pas attirés gravitationnellement les uns vers les autres.

La loi en $1/r^2$ dans une Terre imparfaite en rotation

La Terre n'est pas exactement sphérique et elle n'est pas homogène. En plus des petites irrégularités du relief, la planète est légèrement aplatie aux pôles, avec un petit renflement au nord qui lui donne un aspect de poire. A l'équateur, son rayon r_T est environ 21.5 km plus grand qu'aux pôles. Près de la Terre, l'écart à la loi idéale $1/r^2$ est faible, $\sim 0.1\%$, mais suffisant pour dévier les satellites artificiels. Plus loin, à des distances de l'ordre de celle de la Lune, la déviation de la loi de distance $1/r^2$ n'est que d'environ 0.00003%. En général, deux corps, quelles que soient leurs formes et leurs distributions de masse, interagissent avec une force qui s'approche de la forme en $1/r^2$ lorsque leur distance est suffisamment grande comparée à leur taille.

La forme aplatie de la planète et la rotation sur elle-même produisent une variation de la valeur de g mesurée à la surface de la Terre. Ces deux effets font varier g d'environ 0.5% lorsqu'on se déplace du pôle à l'équateur.

Pour déterminer l'effet de la rotation, considérons une masse m suspendue à un dynamomètre à l'équateur. Elle subit deux forces externes: son interaction avec la Terre F_G et la force du dynamomètre F_D égale en module au poids mesuré $F_W = mg$.

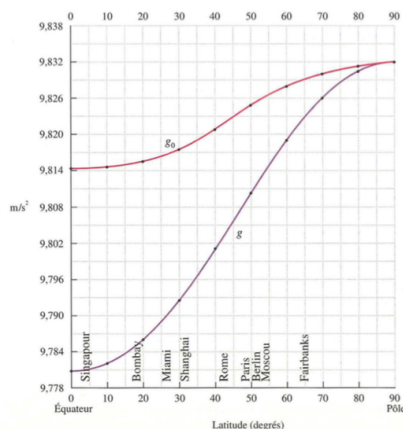
La masse est entraînée dans la rotation de la Terre et doit éprouver une force centripète, telle que:

$$\sum F = ma_c = F_G - F_D = \frac{GmM_T}{r_T^2} - mg \Rightarrow g = \frac{GM_T}{r_T^2} - a_c = g_0 - a_c$$

où g_0 est l'accélération gravitationnelle absolue, c'est-à-dire due à la gravité de la Terre sans rotation (représentant le "vrai" poids d'un corps, dû seulement à son interaction gravitationnelle avec la Terre).

Aux pôles, $a_c = 0$, alors $g = g_0$ et le poids mesuré est égal au vrai poids mg_0 . À l'équateur, $a_c = 0.0339 \text{ m/s}^2$ et g est réduit d'autant. La valeur absolue de l'accélération gravitationnelle varie continuellement de $g_0 = 9.814 \text{ m/s}^2$ à l'équateur aux pôles. La valeur observée de g varie entre $g_0 = 9.780 \text{ m/s}^2$ à l'équateur aux pôles. La rotation produit donc plus des 2/3 de la variation observée de g (figure 9.2).

Figure 9.2: Représentation graphique de la variation de la valeur mesurée (g) et de la valeur absolue (g_0) de l'accélération de la pesanteur sur la surface de la Terre. La première inclut l'effet de la rotation de la Terre et la seconde ne l'inclut pas.



9.2 La force cosmique

La gravitation est la force la plus faible, mais elle domine l'évolution de l'univers et le mouvement des astres et des planètes.

Le premier à avoir étudié le mouvement des planètes du système Solaire sans préjugés sur leur forme était Johannes Kepler (1571-1630). Pour son étude, Kepler se base sur les données collectées par Tycho Brahe (1546-1601) qui lui permettent de formuler ses trois célèbres lois du mouvement des planètes. Ces lois forment les bases dont se servira Newton pour établir sa théorie de la gravité.

Les lois du mouvement des planètes

Contrairement à presque tous ses prédécesseurs qui martelaient que les trajectoires planétaires devaient avoir la perfection mystique du cercle, la première loi de Kepler énonce que *les planètes décrivent des orbites elliptiques avec le Soleil à l'un des foyers*. Les orbites planétaires sont presque circulaires, et la petite différence avec un cercle est cruciale: la vitesse le long de l'orbite n'est pas uniforme.

La deuxième loi de Kepler énonce que *la planète se déplace autour du soleil de telle manière que le rayon qui la relie au soleil balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux* (figure 9.2). Par exemple, la ligne Terre-Soleil balaye toujours la même surface par unité de temps, que ce soit en juillet ou en janvier. Lorsque la planète est proche du Soleil la vitesse et l'arc sont grands: le secteur balayé en une semaine est court et large. Loin du Soleil, la vitesse est plus faible et le secteur balayé est étroit. Mais il est long et l'aire balayée en une semaine est la même.

La physique de la gravitation et les lois de Newton nous permettent de mieux comprendre la seconde loi de Kepler. La planète, attirée par le Soleil, se rapproche du Soleil et accélère. Ainsi, la force gravitationnelle augmente en même temps que la planète accélère; la planète atteint sa vitesse maximale lorsqu'elle est au point le plus proche, la **périhélie**. En s'éloignant du Soleil la force gravitationnelle s'affaiblit graduellement pendant que la planète décélère; la planète atteint sa vitesse minimale au point le plus éloigné, l'**aphélie**.

La troisième loi de Kepler énonce que *le rapport du cube de la distance moyenne au Soleil au carré de la période est le même pour toutes les planètes du système Solaire*. En bref:

$$\frac{r_{SP}^3}{T_P^2} = C_S \quad (9.2)$$

où T_P est la période orbitale de la planète et r_{SP} sa distance moyenne au Soleil. C_S est une constante caractéristique du Soleil et dont la valeur numérique dépend évidemment des unités utilisées. Le fait que toutes les planètes partagent la même constante C_S suggère qu'elles sont toutes gouvernées par le même mécanisme sous-jacent, la gravité.

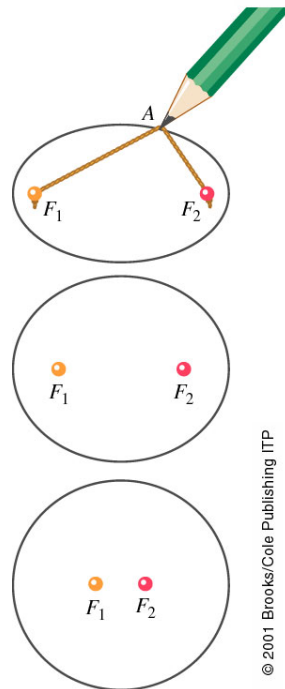


Figure 9.3: L'ellipse. En tout point A d'une ellipse, la somme des distances de ce point aux deux foyers est une constante. Imaginez un fil dont les extrémités sont fixées en F_1 et F_2 . La pointe du crayon tenant le fil tendu trace une ellipse.

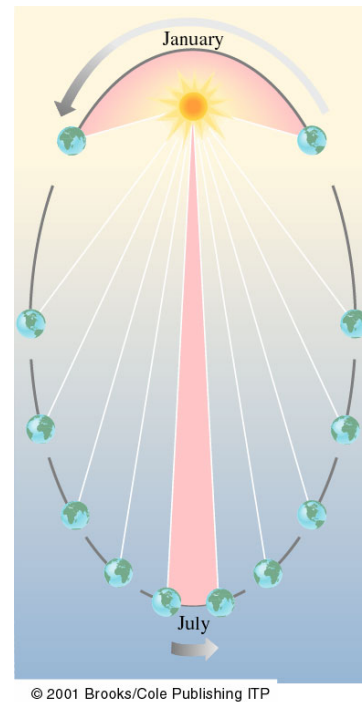


Figure 9.4: La ligne qui joint le Soleil à la Terre, balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux. Chaque segment correspond à un mois et ils ont tous la même superficie. La Terre atteint son périhélie en janvier; elle a alors sa vitesse maximum.

Lois de Kepler et gravitation universelle

Les lois de Kepler peuvent bien entendu être dérivées de la loi de gravitation universelle si on prend le Soleil comme référence immobile vers laquelle chaque planète est attirée. L'orbite sera elliptique si et seulement si la force centripète varie comme l'inverse du carré de la distance au centre de la force, qui coïncide alors avec l'un des foyers.

La force centrale requise est la gravité, qui doit alors varier avec $1/r^2$. Des orbites fermées et ouvertes sont possibles sous l'influence d'une force centrale en $1/r^2$. Tout objet en interaction gravitationnelle avec un autre corps "immobile" (étoile) peut se déplacer sur une trajectoire circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique. Exemple: les comètes (Comète de Haley).

Une planète qui décrit un cercle de rayon r_{SP} autour du Soleil, doit être sous l'influence d'une force centripète:

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{r_{SP}}$$

Si la gravité est à l'origine de cette force ($F_c = F_G$), alors:

$$F_G = \frac{GmM_S}{r_{SP}^2} = \frac{mv^2}{r_{SP}} = F_c$$

où M_S est la masse du corps central. Comme $2\pi r_{SP}$ est le périmètre de la circonférence, en divisant par la période, on obtient la vitesse $v = (2\pi r_{SP}/T)$. En substituant cette valeur de v dans l'équation précédente, nous trouvons la relation indépendante de m :

$$\frac{GM_S}{r_{SP}^2} = \frac{4\pi^2 r_{SP}^2}{T^2 r_{SP}}$$

d'où la relation:

$$\frac{r_{SP}^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$$

qui n'est autre que la troisième loi de Kepler, où le second membre doit être identifiée à la constante C_S . Notez que *seule la masse du corps central apparaît dans l'expression!* La même loi s'applique à la Lune (avec la masse de la Terre substituée) ou à tout satellite artificiel.

Orbites des satellites

Tout projectile lancé horizontalement peut être assimilé à une sorte de satellite de la Terre. Une balle lancée du haut d'un immeuble décrit une orbite restreinte qui percute la Terre non loin de son point de lancement. Pour une Terre plate, cette orbite serait parabolique. Sur une Terre sphérique, une balle lancée horizontalement dans le vide décrit un arc d'ellipse dont l'un des foyers est le centre de la planète. Toute la masse de la Terre agit comme si elle était concentrée en son centre et le projectile essaie de décrire une ellipse autour de ce point. En pratique, le frottement de l'air freine le mouvement et la surface de la Terre fait obstacle.

Plus la vitesse de lancement de la balle lancée augmente, plus l'ellipse devient aplatie et plus la balle ira loin. En augmentant la vitesse jusqu'à une valeur bien précise, la balle plane au-dessus du sol à une altitude constante et décrit un tour complet sur un cercle. Si on augmente encore la vitesse, l'orbite redevient elliptique et plus grande. Pour une deuxième vitesse critique plus élevée, l'ellipse se transforme en parabole. Si la vitesse augmente encore la trajectoire devient une hyperbole ouverte et la balle ne revient jamais à son point de départ.

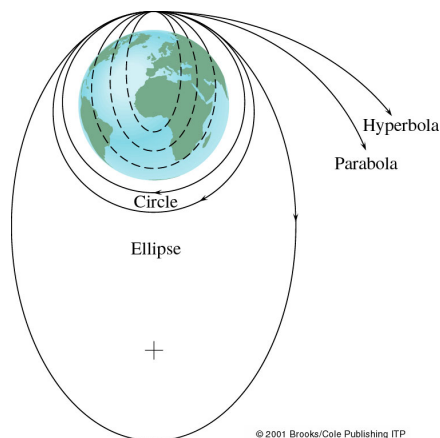
Un objet de masse m à une distance r du centre d'un grand corps sphérique de masse M , décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse orbitale tangentielle v_o , si la force gravitationnelle est exactement égale à la force centripète, donc:

$$\sum F = ma_c \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_o^2}{r} \Rightarrow$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (9.3)$$

Tout satellite, quelle que soit sa masse (du moment que $M \gg m$) décrit une orbite circulaire de rayon r , s'il est lancé avec une vitesse donnée par l'équation 9.3, indépendamment de toute rotation du corps central.

Figure 9.5: Orbites de projectiles tirés horizontalement à partir d'un point proche de la surface de la Terre à diverses vitesses. L'orbite circulaire correspond à une vitesse de lancement $v_{hor} = v_o$. Si $v_{hor} < v_o$, l'orbite est elliptique. Si $v_{hor} > v_o$ mais $v_{hor} < \sqrt{2}v_o$, le projectile monte vers une orbite elliptique plus grande. Si $v_{hor} = \sqrt{2}v_o$ l'orbite est parabolique et à vitesse supérieure, est hyperbolique.



Exemple 9.2.1. L'orbite géostationnaire est l'une des orbites la plus intéressante. Le satellite est lancé sur une orbite dans le plan de l'équateur et fait un tour en exactement un jour: il est synchronisé avec la rotation de la Terre et paraît immobile dans le ciel. Calculez l'altitude au dessus de la Terre et la vitesse de lancement d'un tel satellite.

Solution Données: $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg et la grandeur la plus importante, $T = 24$ h. À déterminer: l'altitude h . Rappelons que $h = r - R_T$, la différence entre la distance du satellite au centre de la Terre et le rayon de la Terre. Écrivant que $F_c = F_G$ et utilisant $v_o = 2\pi r/T$, nous obtenons:

$$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} \Rightarrow r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

soit $r = 42.25 \times 10^6$ m et $h = r - R_T = 3.59 \times 10^7$ m = 36'000 km $\approx 5.6 R_T$. La vitesse s'obtient en tenant compte du fait qu'il faut $T = 24$ h pour effectuer un tour de longueur $2\pi r$: $v_o = 3.1 \times 10^3$ m/s. ◀

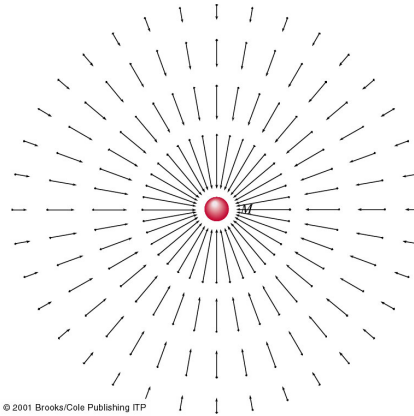
Le champ gravitationnel

Une pomme qui se détache de la branche d'un arbre tombe vers le sol sous l'influence de la gravité. Mais comment la pomme perçoit-elle la gravité? Comment connaît-elle la direction vers le bas et l'intensité avec laquelle elle est attirée?

A chaque particule de matière est associée un champ d'influence, qui l'entoure. C'est ce champ qui transporte l'interaction entre deux particules éloignées. Un champ de force existe dans une région de l'espace si un objet approprié, placé en tout point de cette région, subit une force. Ainsi nous pouvons imaginer un champ de force gravitationnel entourant tout objet de masse M . Supposons que nous suspendions une petite masse m à un dynamomètre et que nous faisons des mesures de F_G en le déplaçant d'un point à un autre.

On peut définir un champ gravitationnel en normalisant la force à la masse "test" m , c'est-à-dire en formant: $\vec{g} = \vec{F}_G/m$.

Figure 9.6: Le champ gravitationnel d'une masse M . En chaque point entourant M , nous traçons le vecteur correspondant à la force qui agit sur une masse-test m , divisée par m .



Exercices

Exercice 9.1. La masse de la Lune est 8.35×10^{22} kg et sa distance à la Terre est 3.84×10^5 km. Sachant que la masse de la Terre est 5.98×10^{24} kg, calculez ce que Newton a appelé “la force requise pour maintenir la Lune sur son orbite”.

Exercice 9.2. Connaissant l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre, g , le rayon de la Terre r_T et la constante G , déterminer la masse de la Terre M_T ainsi que sa masse volumique moyenne (assimilant la Terre à une sphère).