Physique Générale C

Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Chapitre 10

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

Bibliographie

[1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
[2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
[3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
[4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

10

Dynamique de la rotation

Les trois lois de Newton constituent la base de notre compréhension de la dynamique, à la fois des mouvements linéaires et des mouvements rotationnels. Un corps tourne d'une seule pièce si ses diverses parties sont soudées par des forces internes. Alors nous pouvons décrire sa rotation en fonction des nouvelles variables cinématiques θ, ω et a_{ang} et introduire aussi des nouvelles quantités dynamiques.

Les deux conditions pour qu'un système ne subisse aucune accélération sont $\sum \vec{F} = 0$ et $\sum \vec{\tau} = 0$. La force est la cause de tout mouvement et le moment de la force est la cause du mouvement de rotation.

L'**inertie** d'un corps est la "résistance" qu'il oppose au changement de son état de mouvement. Cette résistance est physiquement représentée par la masse de l'objet. La même propriété est à l'origine de l'inertie de rotation, mais son action dépend à la fois de la quantité de masse et de sa répartition autour de l'axe de rotation. Par analogie avec le moment de force, on appelle cette grandeur **moment d'inertie**.

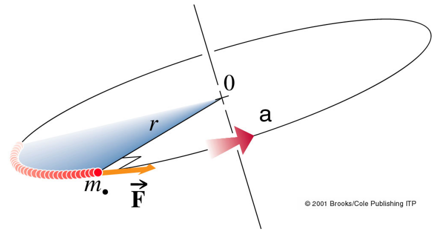
10.1 Inertie de rotation

Pour faire tourner une roue massive il faut lui communiquer une accélération angulaire. Il faut appliquer une force avec un certain bras de levier, c'est-à-dire un moment de force. Considérons une masse ponctuelle $m_\bullet$ (figure 10.1) qu'une force tangentielle $\vec{F}$ contraint à se déplacer sur un cercle de rayon r dont l'axe passe par O. Elle subit une accélération tangentielle qui correspond à une force $F = m_\bullet\ a_T$ qu'on peut exprimer en terme de son accélération angulaire qui correspond à une force $F = m_\bullet r a_{ang}$. Le moment de force de F par rapport à O est:

$$\tau_O = rF = r\ m_\bullet\ a_T = r\ m_\bullet\ r a_{ang} = m_\bullet\ r^2\ a_{ang}$$

Cette équation suggère que $m_\bullet\ r^2$ est l'équivalent rotationnel de la masse. $I_\bullet = m_\bullet\ r^2$ est appelée **moment d'inertie** d'une masse ponctuelle par rapport à un axe donné. Donc $\tau_O = I_\bullet\ a_{ang}$ est équivalent à $F = m\ a$.

Figure 10.1: Description graphique de mouvement d'une masse ponctuelle $m_{\bullet}$.



Un corps rigide est constitué d'un grand nombre d'atomes en interaction. Lorsqu'il est en rotation, l'équation ci-dessus est valable pour chacune des particules. La somme de tous les moments de forces agissant sur tous ses constituants communique une accélération angulaire globale au corps, telle que:

$$\sum \tau_O = (\sum_j m_j r_j^2)\ a_{ang}$$

La quantité entre parenthèses est le moment d'inertie du corps autour de l'axe de rotation passant par O:

$$I_O = \sum_j m_j r_j^2 \Rightarrow \sum \tau_O = I_O\ a_{ang} \tag{10.1}$$

Chaque particule avec sa masse propre et sa distance à l'axe possède son propre moment d'inertie. Tous ces moments doivent être ajoutés pour avoir le moment d'inertie global du corps. Dans la pratique il est impossible d'effectuer ce calcul pour un objet réel. Au lieu de cela, nous supposons que l'objet est continu et nous le partageons en petits éléments de masse dm suffisamment petit pour que ses atomes soient à la même distance r de l'axe. La sommation peut alors être remplacée par une intégrale:

$$I = \int r^2\ dm$$

La figure 10.2 donne les expressions de I pour certains corps symétriques et homogènes par rapport à certains axes. *Plus la masse est grande et concentrée loin de l'axe, plus I est grand et plus la résistance du corps contre l'accélération angulaire est grande.* Par exemple, à masse égale, le moment d'inertie de l'anneau est deux fois plus grand que celui du disque plein et celui de la sphère creuse est 5/3 fois plus grand que celui de la sphère pleine.

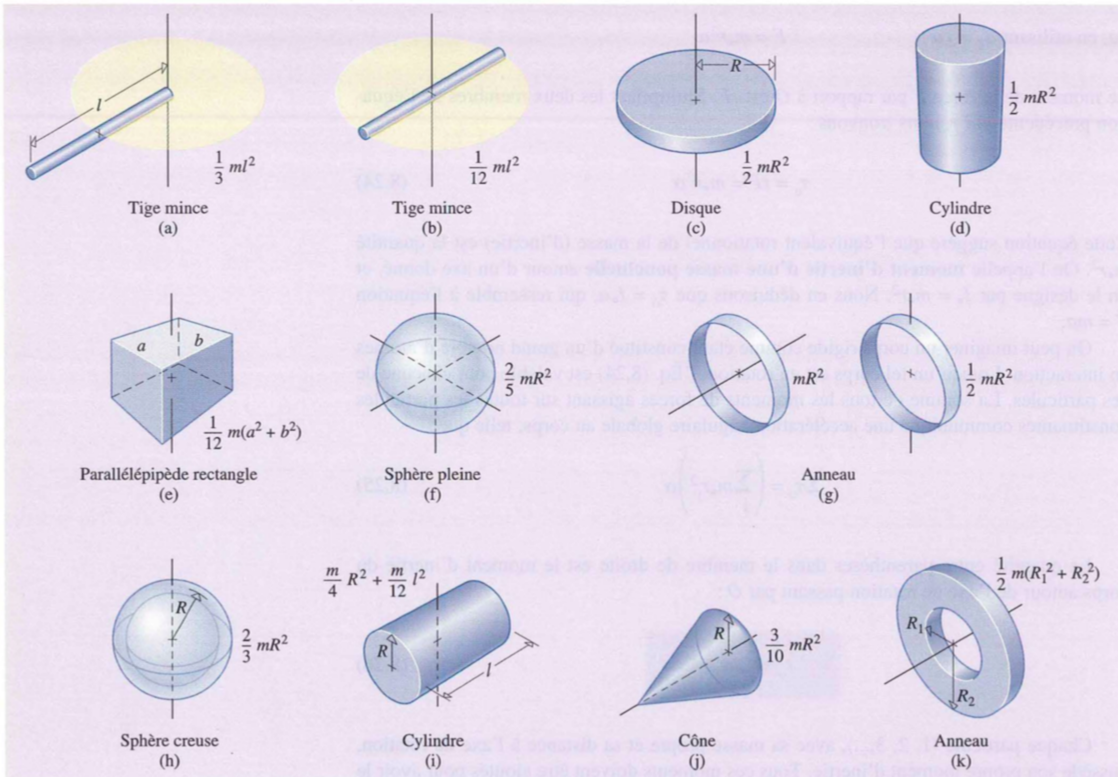


Figure 10.2: Moments d'inertie.

Exemple 10.1.1. Une masse $m = 10.0$ kg est suspendue à une corde enroulée autour d'un cylindre de rayon $R = 10.0$ cm et de masse $M_c = 2.00$ kg (figure 10.3). Une fois lâché, le cylindre est libre de tourner autour de son axe. Déterminez la tension de la corde, et les accélérations du cylindre et de la masse.

Solution La tension dans la corde produit un moment de force tel que:

$$\sum \tau_O = F_T R = I a_{ang} \Rightarrow F_T = \frac{I a_{ang}}{R}$$

La masse m qui tombe obéit à la loi de Newton:

$$\sum F_{vert} = ma = mg - F_T$$

L'accélération de la corde est la même que celle d'un point sur la périphérie du cylindre, $a = R a_{ang}$:

$$mg - F_T = ma = mRa_{ang} \Rightarrow mg - \frac{I a_{ang}}{R} = mRa_{ang} \Rightarrow a_{ang} = \frac{mg}{mR + I/R}$$

Le moment d'inertie d'un disque est $I = \frac{1}{2}M_C R^2$. Alors:

$$a_{ang} = \frac{mg}{mR + \frac{1}{2}M_C R} = \frac{2g/R}{2 + M_C/m} = ... = 89.2 \text{ rad/s}^2$$

L'accélération tangentielle est: $a = Ra_{ang} = 8.92$ m/s^2($<\ g$).
La tension de la corde est: $F_T = mg - ma = m(g-a) = 8.9\ N$.

Vérification rapide: Examinons les valeurs extrêmes de a_{ang}, notamment, quand $m \gg M_C$ et $m \ll M_C$. Dans le premier cas ($m \gg M_C$), I/R est négligeable par rapport à mR. Alors $a \approx g$, $F_T = 0$ et nous avons une chute libre. Si $m \ll M_C$, $a_{ang} \approx mgR/I$, qui est très faible; le mouvement est alors quasi nul. Ces deux configurations sont vraisemblables.

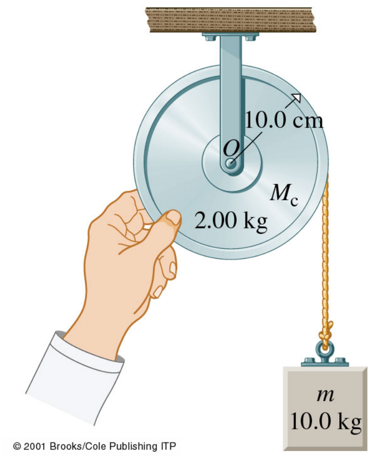


Figure 10.3: Jusqu'alors, nous avons négligé la masse de la poulie dans ce genre de problèmes. Maintenant nous pouvons en tenir compte. La poulie a un moment d'inertie qui réduit l'accélération de m.

10.2 Roulement sur un plan incliné

La sphère pleine de rayon R de la figure 10.4 roule sans glissement vers le bas sur un plan incliné. La force de frottement F_f est la cause de la rotation de la sphère. Sans frottement, la sphère glisserait vers le bas gardant toujours le même point A en contact avec le plan.

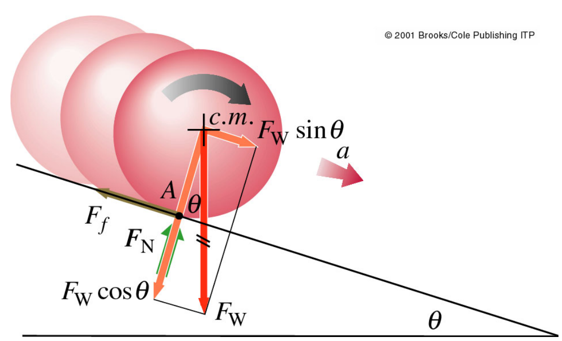


Figure 10.4: Une sphère pleine roulant vers le bas sur un plan incliné. La sphère a une accélération $a = (5/7)g\sin\theta$, à comparer avec son accélération de glissement $a = g\sin\theta$.

Le mouvement peut être analysé comme une translation du c.m. couplé à une rotation autour du c.m. Pour le mouvement de translation on aura: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, où m est la masse totale de la sphère et $\vec{a}$ est l'accélération linéaire de son centre de masse. Par conséquent, en projetant sur le plan incliné:

$$\sum F_\parallel = F_W \sin\theta - F_f = ma$$

Comme la sphère tourne, nous avons aussi $\sum \tau = Ia_{ang}$. Le moment de force par rapport au c.m. s'écrit: $\sum \tau_{c.m.} = F_f R = I_{c.m.}$. Le moment d'inertie de la sphère, est $I_{c.m.} =$

$(2/5)mR^2$. En plus, nous avons vu que $a = Ra_{ang}$. Donc:

$$F_f R = (2/5)\ mR^2\ (a/R)$$

Utilisant le fait que $F_W = mg$:

$$a = (5/7)g \sin\theta \quad \text{et} \quad F_f = (2/7)mg \sin\theta$$

L'accélération ne dépend ni de m ni de R. Elle n'est pas égale à $g\ \sin\theta$, comme si la sphère glissait sur le plan incliné; elle est sensiblement plus petite, à cause de l'inertie de rotation.

Question pour réfléchir. Qu'est-ce qui changerait si la sphère était creuse au lieu d'être pleine?

10.3 Moment cinétique

L'équivalent rotationnel de la force est le moment de la force τ, et celui de la masse est le moment d'inertie I. De la même manière, la quantité de mouvement (linéaire) a son équivalent rotationnel, le moment cinétique $\vec{L}$ (aussi parfois appelé moment angulaire).

Soit une particule de masse m_{bullet} qui se déplace à la vitesse v à une distance $r_\perp$ d'un axe passant par O. Le module de son moment cinétique est défini comme:

$$L_O = r_\perp\ p = r \sin\theta\ p$$

où p est sa quantité de mouvement. En définissant le vecteur moment cinétique comme:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_\perp \times \vec{p} \tag{10.2}$$

nous précisions à la fois le module et la direction de cette grandeur. La direction peut être déterminée en appliquant la règle de la main droite qu'on a déjà vu appliquée au moment d'une force.

Considérons maintenant un objet plat constitué de particules ponctuelles libre de tourner autour d'un axe perpendiculaire au point O. Chaque particule a un moment cinétique caractéristique bien que toutes les particules tournent à la même vitesse angulaire ω.

Pour un objet en deux dimensions, le rayon vecteur $\vec{r}$ est automatiquement perpendiculaire à $\vec{v}$, par conséquent $r = r_\perp$ et le module du moment cinétique total est:

$$L_O = \sum r m_g v = \sum (r m_g) r\omega = \sum (m_g r^2)\omega \Rightarrow$$

$$L_O = I_O \omega \tag{10.3}$$

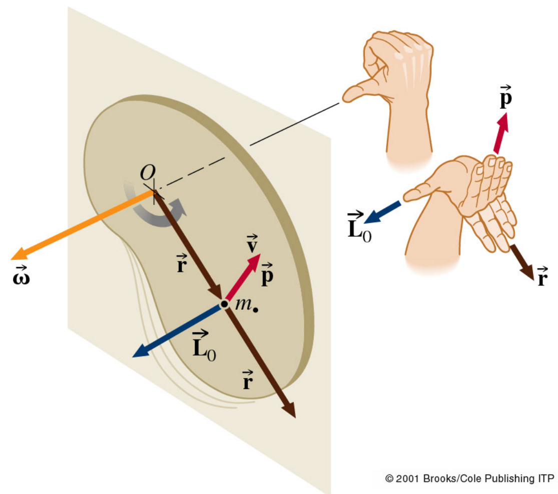


Figure 10.5: Pour cet objet plat, L_O est dans la même direction que ω pour toutes les particules qui constituent le corps.

Le moment cinétique est un vecteur parallel à l'axe de rotation, et qui pointe dans la direction indiquée par la règle de la main droite, $\vec{L}_O = I_O\vec{\omega}$, où nous avons écrit $\vec{\omega}$ comme un vecteur, également attaché à l'axe de rotation. Cette équation est complètement analogue à la quantité de mouvement, $\vec{p} = m\vec{v}$.

10.4 Conservation du moment cinétique

Supposons qu'un corps soit soumis à un moment de force τ pendant un intervalle de temps Δt. Il subit une accélération angulaire constante telle que:

$$\tau = Ia_{ang} = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Tant que I est constant, tout changement du moment cinétique résulte en un changement de ω, $\Delta L = I\Delta\omega$:

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \text{ et pour } \Delta t \to 0: \ \tau = \frac{dL}{dt}$$

Le moment de force est égal au taux de variation du moment cinétique. Cette équation est l'équivalent de la deuxième loi de Newton, $F = dp/dt$, et signifie que: **en l'absence de moments de forces, le moment cinétique est conservé.** Mentionnons encore une fois que l'équation du moment cinétique est réellement une relation entre vecteurs, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

La tendance de la matière à garder son mouvement rotationnel constant est utilisé dans un grand nombre d'applications pratiques. Par exemple, un volant d'inertie dans un moteur permet de lisser le mouvement rotationnel entre deux coups d'accélération.

Exemple 10.4.1. Une patineuse avec les bras tendus peut atteindre une vitesse angulaire de 1.0 tours/s. Dans cette configuration, son moment d'inertie autour de l'axe vertical est 3.5 kg$\cdot$ m^2. Les masses constituant ses bras et sa jambe sont en bonne partie éloignées de l'axe; le moment d'inertie est donc relativement grand. Que devient sa vitesse de rotation si elle rapproche ses bras et se met dans une position de pirouette, qui correspond à un moment d'inertie de 1.0 kg$\cdot$m^2? On néglige les forces de frottement.

Solution Données: $\omega_i = 1$ tours/s, $I_i = 3.5$ kg·m^2 et $I_f = 1.0$ kg·m^2. À trouver: ω_f. Comme $\vec{\tau}$, $\vec{L}$=constante. Donc:

$$L_i = L_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i \Rightarrow \omega_f = 3.5 \text{ tours/s}$$

La patineuse tourne 3.5 fois plus vite sur elle-même. Effectivement, comme elle conserve son moment cinétique, la patineuse augment sa vitesse de rotation lorsque son moment d'inertie diminue.

◀

Exemple 10.4.2. On fait tourner une très petite sphère de masse 0.20 kg au bout d'un fil de longueur 2.0 m sur un cercle horizontal à une vitesse constante de 1.0 m/s.

- Déterminez son moment cinétique autour de l'axe de rotation.
- Supposons qu'on réduise brusquement le rayon à 1.0 m. Que devient la vitesse de la sphère ?
- Que peut-on dire de la tension de la corde ?

Solution Données: m=0.2 kg, $v_i = 1$ m/s, r_i=2 m et r_f=1 m. À trouver: L_O autour de l'axe de rotation en O et v_f. Le moment cinétique peut être calculé en assimilant la sphère à une masse ponctuelle concentrée en son c.m. Alors nous trouvons: (a) $L_O = rmv = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. (b) La force de tension exercée par la corde passe par O, et son moment est nul. Par conséquent, il n'y a aucun moment de force qui agit sur le système et le moment cinétique doit être conservé pendant la réduction du rayon de rotation: L_O = constante, soit:

$$mr_iv_i = mr_fv_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

On trouve donc:

$$v_f = \frac{v_ir_i}{r_f} = ... = 2 \text{ m/s}$$

(c) La tension dans la corde est donnée par: $F_T = m\frac{v^2}{r}$. Cette force augmente avec le carré de la vitesse et inversement avec le rayon de la trajectoire. Elle est transmise par le fil, dont la tension augmente d'un facteur 8. Le moment cinétique est conservé. Si le moment d'inertie diminue, la vitesse angulaire augmente et il en est de même pour la vitesse linéaire. Si le rayon est réduit de moitié, la vitesse linéaire est doublée.

◀

Exercices

Exercice 10.1. Un cylindre plein est posé au repos sur un plan incliné à une hauteur verticale h. On le lâche et il roule sans glissement. Montrez que sa vitesse, arrivé en bas, est donnée par l'expression $v = 2(gh/3)^{1/2}$.

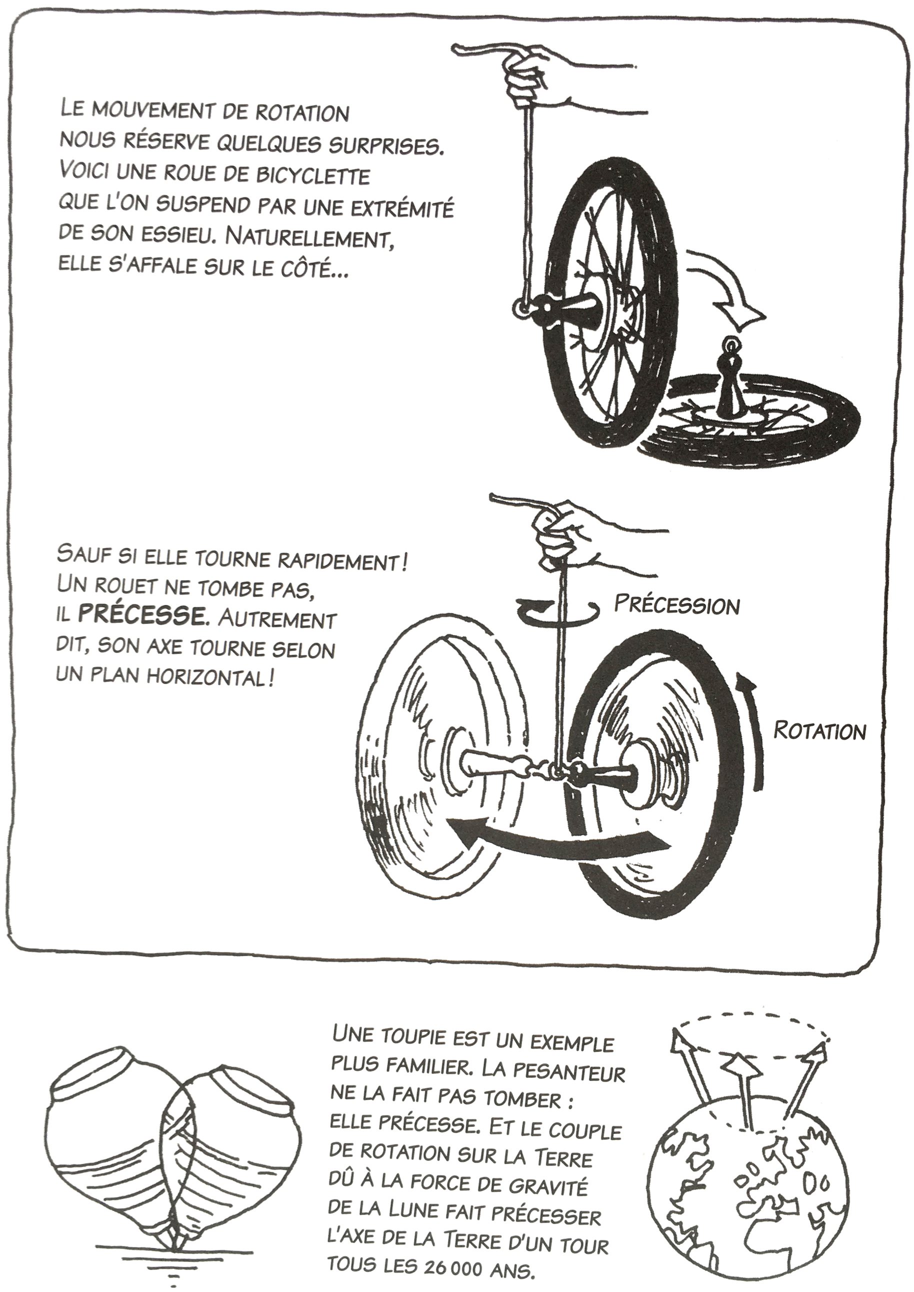


Figure 10.6: Applications de la loi de conservation du moment cinétique: la stabilité gyroscopique. (Ref: *La physique en BD*, ed. Larousse.)