Physique Générale C

Semestre d'automne (11P090)

Notes du cours basées sur le livre

Physique

de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Chapitre 17

Enseignante:
Anna Sfyrla

Assistant(e)s:
Mireille Conrad
Tim Gazdic
Jean-Marie Poumirol
Rebecka Sax
Marco Valente

Bibliographie

[1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
[2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
[3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
[4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

17

Les oscillations

Un mouvement qui se répète à intervalles de temps consécutifs et égaux est dit *périodique*. La nature nous offre couramment quantités d'exemples de ces phénomènes qui semblent inhérents à la nature même de l'Univers: la rotation de la Terre autour du Soleil, l'oscillation d'une balançoire, les vagues sur l'eau, les molécules d'air qui transmettent la sensation de son, les atomes dans un solide, les électrons dans les antennes de radio et TV.

Nous pouvons distinguer deux types de mouvements répétitifs:

1. Les mouvements sur une trajectoire fermée, qui peuvent être repérés par la rotation périodique d'un angle autour d'un point à l'intérieur de la trajectoire (mouvement de la Terre autour du soleil) et les mouvements de va-et-vient sur un même axe. Nous avons étudié ce type de mouvement au chapitre 7 (mouvement de rotation).

2. Les mouvements vibratoires ou oscillatoires, mouvements périodiques dont la forme la plus simple est le mouvement sinusoïdal ou Mouvement Harmonique Simple (MHS).

Nous étudions dans ce chapitre le mouvement vibratoire ou oscillatoire, une étude qui conduit naturellement, dans les chapitres à suivre, à une discussion des ondes produites par des systèmes mécaniques vibrants et, en particulier, les ondes sonores.

17.1 Mouvement sinusoïdal

Dans un mouvement périodique, un cycle est la plus petite séquence qui se répète. Pendant un cycle, le système évolue mais finit toujours par revenir à la configuration et au mouvement qu'il avait au début du cycle.

Le temps qu'il faut pour que le système accomplisse un cycle est la **période** (T). L'inverse de la période, c'est-à-dire le nombre de cycles par unité de temps, est la **fréquence**:

$$f = \frac{1}{T}$$

L'unité SI de fréquence est le hertz (Hz): 1 Hz = 1 cycle/s = 1 s^{-1}.

Considérons un objet qui décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse constante (figure 17.1); sa vitesse angulaire ω est alors constante. Chaque fois qu'il fait un tour complet, il tourne d'un angle 2π rad. Comme il fait un tour complet en temps T, la vitesse angulaire ω sera également:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

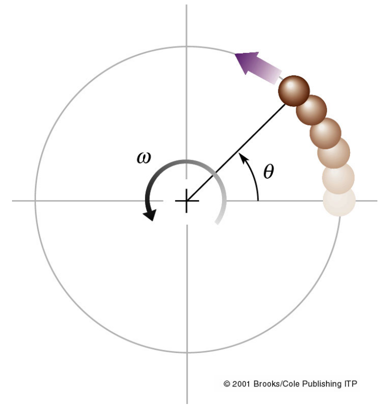


Figure 17.1: Un objet, qui décrit un cercle avec une vitesse angulaire ω constante, a une position angulaire $\theta = \omega t$ qui varie à un taux constant.

Il est courant d'appeler ω fréquence angulaire ou pulsation.

À tout instant, la position de l'objet est définie par l'angle θ. Comme la vitesse linéaire v est constante, la vitesse angulaire correspondante ω l'est aussi (nous avons appris au chapitre 7 que $v = r\omega$). La position angulaire à l'instant t est $\theta = \omega t$ (comme on a aussi appris au chapitre 7). La projection Q de la position P de l'objet sur l'axe x (figure 17.2) sera:

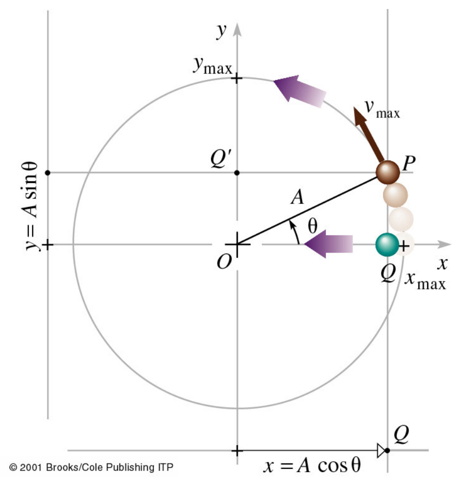
$$x(t) = x_{\max} \cos\theta = x_{\max} \cos\omega t = x_{\max} \cos 2\pi f t \tag{17.1}$$

Le point Q suit alors un mouvement sinusoïdal, aussi appelé **mouvement harmonique simple** (MHS). Le déplacement x est appelé *élongation*; $x_{\max}$ est l'*amplitude* des oscillations, qui est constante et positive.

L'élongation de Q' à partir de O est donnée par:

$$y(t) = y_{\max} \sin\omega t = y_{\max} \sin 2\pi f t$$

À noter que $x(t)$ est maximal pour $t = 0$ tandis que $y(t)$ est minimal pour $t = 0$, si on considère que le mouvement commence ($t = 0$) quand $\theta = 0$.



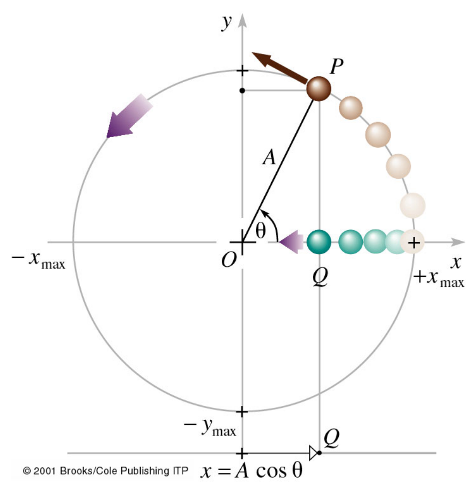


Figure 17.2: Un objet P décrivant un cercle de rayon A à vitesse $v_{\max}$ constante. Sa projection Q sur l'axe des x a une élongation $x = A\cos\theta$ avec O pris comme origine. Pendant que P décrit le cercle, Q oscille entre $+x_{\max}$ et $-x_{\max}$ d'un mouvement sinusoïdal.

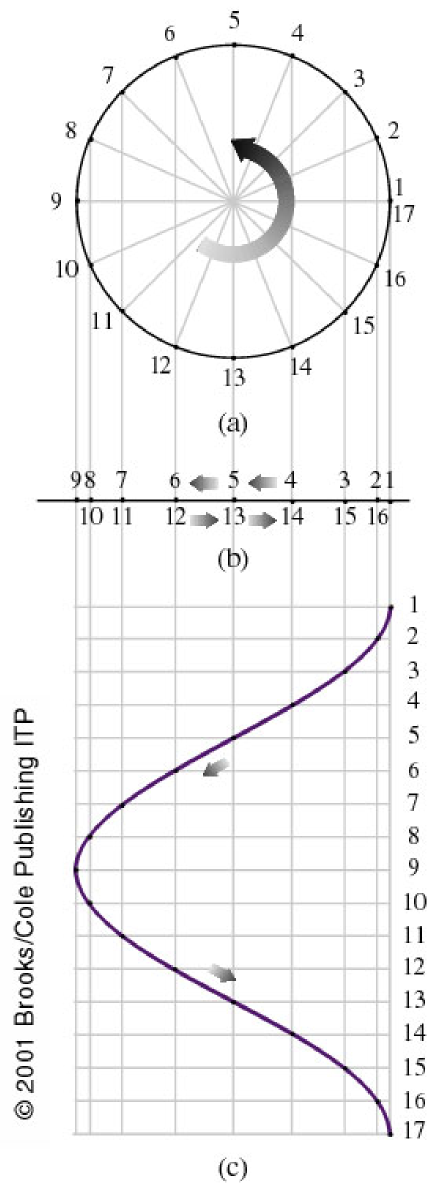


Figure 17.3: (a) Mouvement circulaire uniforme. (b) Sa projection sur un axe fixe est un mouvement sinusoïdal. (c) Représentation graphique de ce mouvement sinusoïdal en fonction du temps.

Que devient l'équation 17.1, si l'objet commence le mouvement pas à $\theta = 0$ mais à un autre point? L'argument des fonctions sinus et cosinus est la **phase** du mouvement. Dans l'équation 17.1, la phase est $\theta = \omega t$. Plus généralement, à l'instant $t = 0$, la phase a une valeur non nulle, ϕ, appelée **phase initiale**. Alors, la phase devient $\omega t + \phi$, et:

$$\boxed{x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi) = x_{\max} \cos(2\pi f t + \phi)}$$

C'est l'expression la plus générale de l'élongation d'un objet en mouvement sinusoïdal. Pour récapituler, à cette équation généralisée:

- $x_{\max}$ est l'amplitude de l'oscillation;
- $\omega t + \phi$ est la phase du mouvement;
- ϕ est la phase initiale, qui dépend du déplacement et de la vitesse à $t = 0$, pourtant sa valeur n'influence pas la forme de $x(t)$;

- ω est la vitesse angulaire, aussi appelée fréquence angulaire ou pulsation.

Nous avons trouvé que l'élongation d'un système en mouvement sinusoïdal est une fonction sinusoïdale du temps. *Quelle sont alors la vitesse et l'accélération de ce système?*

Vitesse d'un mouvement sinusoïdal
Concentrons nous sur la composante v_x. La dérivée de $x(t)$ par rapport au temps est:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_{\max}\omega \sin(\omega t + \phi)$$

La vitesse a aussi un comportement sinusoïdal. Elle varie entre les limites $\pm v_{\max} = \pm\omega x_{\max}$. La vitesse est en avance de phase de $\pi/2$ sur l'élongation. Elle est nulle à l'amplitude maximale du déplacement et elle est maximale à l'amplitude minimale (nulle) du déplacement.

Accélération d'un mouvement sinusoïdal
La dérivée de $v(t)$ par rapport au temps est:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -x_{\max}\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

L'accélération est proportionnelle au déplacement et de signe opposé. Ceci est la caractéristique d'un mouvement harmonique simple. L'accélération varie entre les limites $\pm a_{\max} = \pm\omega^2 x_{max}$; elle est en avance de phase de $\pi/2$ sur la vitesse. Elle est maximale pour un déplacement maximale et nulle pour un déplacement nulle.

Le déplacement, vitesse et accélération en fonction du temps est indiqué à la figure 17.4.

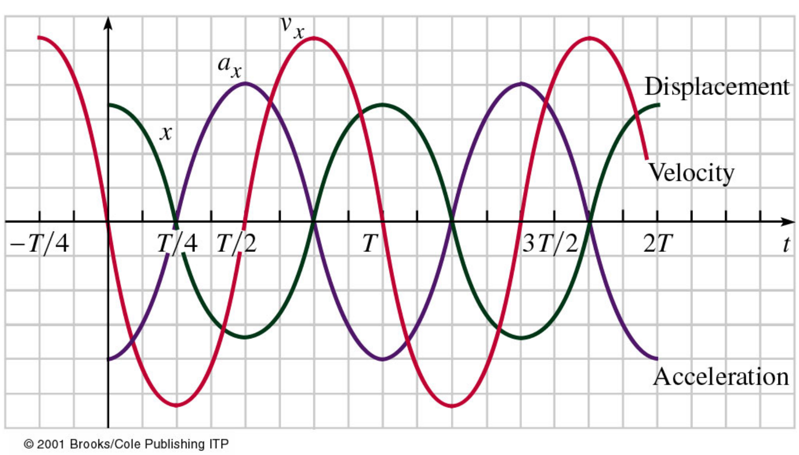


Figure 17.4: Représentation graphique de la vitesse, de l'élongation et de l'accélération d'un oscillateur harmonique en fonction du temps. Notez que la vitesse est en avance de phase de $\pi/2$ sur l'élongation et que l'accélération est en avance de $\pi/2$ sur la vitesse, donc en avance de π (ou en retard de π) sur l'élongation.

Exemple 17.1.1. Une tache lumineuse sur l'écran d'un ordinateur oscille le long d'une ligne droite horizontale d'un mouvement sinusoïdal à la fréquence de 1,5 Hz. La longueur totale de la ligne parcourue est 20 cm et la tache commence le mouvement à droite de l'écran. Déterminer: (a) sa pulsation, (b) sa période, (c) sa vitesse maximum et (d) son accélération maximum. (e) Exprimer x en fonction du temps et trouver la position de la tache à l'instant $t = 0.40$ s.

Solution Données: $f = 1.5$ Hz et $x_{\text{max}} = 10$ cm. À trouver: (a) ω, (b) T, (c) $v_x(\text{max})$, (d) $a_x(\text{max})$, (e) x en général et x à $t = 0.40$ s.

(a) $\omega = 2\pi f = 2\pi(1.5 \text{ Hz}) = 9.4 \text{ rad/s} = 3.0\pi \text{ rad/s}$
(b) $T = 1/f = 0.67$ s
(c) $v_x(\text{max}) = \omega x_{\text{max}} = 0.94$ m/s
(d) $a_x(\text{max}) = \omega^2 x_{\text{max}} = 8.9 \text{ m/s}^2$
(e) $x = x_{\text{max}} \cos \omega t = (0.10 \text{ m}) \cos(9.4 \text{ rad/s } t)$. À l'instant $t = 0.40\ s$, $x = -8.1$ cm.

◀

Force de rappel élastique
Lorsqu'un système oscille librement (sans être soumis à une source externe d'énergie), il se déplace car il est soumis à une force, la *force de rappel*, qui tend à le ramener à sa position d'équilibre.

Si on déforme légèrement un système, initialement en équilibre stable, une quantité supplémentaire d'énergie potentielle y est emmagasinée. Lorsqu'on le lâche, il tend à revenir à sa configuration d'équilibre. Mais, arrivé là, cette énergie potentielle supplémentaire est déjà transformée en énergie cinétique; il a alors une quantité de mouvement qui le force à continuer le déplacement au-delà de la position d'équilibre, dans le sens opposé au déplacement initial. Il se déforme donc de nouveau; son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et le processus recommence. *Pendant l'oscillation, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique et vice versa*, indéfiniment (s' il n'y a pas de perte d'énergie).

La deuxième loi de Newton, $F = ma$, où l'accélération est donnée par $a = -\omega^2 x$, montre que la force est proportionnelle au déplacement, mais de signe opposé. Nous avons déjà vu cette proportionnalité à la loi de Hooke. Le signe négatif indique ici que la force est une force de rappel interne au système.

Cette force, $F = -kx$ correspond à l'action d'un ressort dont la constante élastique est $k = m\omega^2$. On en déduit une définition alternative du mouvement harmonique simple: **Une particule de masse m soumise à une force de rappel proportionnelle à son déplacement suit un mouvement harmonique simple.**

17.2 Exemples des MHS

Mouvement associé avec une force de rappel
Si une masse reliée à un ressort est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée, en étirant ou comprimant le ressort, elle se comporte comme un oscillateur harmonique. Beaucoup de systèmes élastiques (bâtiments, ailes d'avion, ponts, etc) se comportent d'une façon semblable; le ressort oscillant mérite donc une étude détaillée.

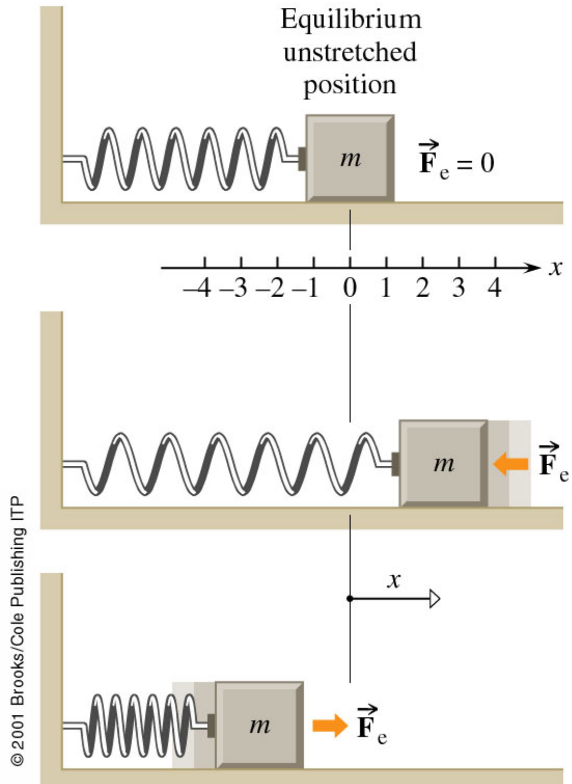


Figure 17.5: Une masse attachée à un ressort vibrant horizontalement d'un mouvement sinusoïdal. Ici, F est la force exercée par le ressort et il n'y a aucune force de frottement.

Prenons un bloc de masse m attaché à un ressort. On tire sur le ressort et on amène la masse en position $x_{\max}$, d'où on le lâche. On néglige les frottements. Le ressort exerce une force de rappel $F = -kx$. D'après la deuxième loi de Newton, $F = ma$, donc:

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Comme on a vu plus haut, $a = -\omega^2 x$, donc $F = ma = -m\omega^2 x = -kx$ d'où on déduit que $k = m\omega^2$. Alors l'équation devient:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \tag{17.2}$$

qui est une équation différentielle du deuxième degré dont la solution générale est:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

Pour décrire le mouvement de la masse, il faut déterminer A, ω et ϕ.

On peut vérifier que $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ est une solution de l'équation du mouvement, équation 17.2. Cette équation est satisfaite pour $m\omega^2 = k$ (*à prouver!*). Ainsi, $x(t)$ est une solution de l'équation du mouvement. On appelle la quantité $\omega = \frac{k}{m}$ la fréquence angulaire naturelle. La période du mouvement sera $T = 2\pi\omega$. La vitesse du mouvement sera donnée par: $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$.

Les conditions initiales permettent de décrire complètement le mouvement de la masse m sur le ressort. On sait que pout $t = 0$: $x(t = 0) = x_{\max}$ et $v(t = 0) = 0$. Donc:

$$x(t = 0) = A\cos(\phi) = x_{\max}$$

$$v(t = 0) = -A\omega \sin\phi = 0$$

Ces deux équations résultent à déterminer que $\phi = 0$ ou 2π et que $A = x_{\max}$. Donc:

$$x(t) = x_{\max} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Force de rappel gravitationnelle: le pendule

Un pendule simple consiste en une corde de masse négligeable et de longueur L constante à laquelle est attachée une masse ponctuelle m.

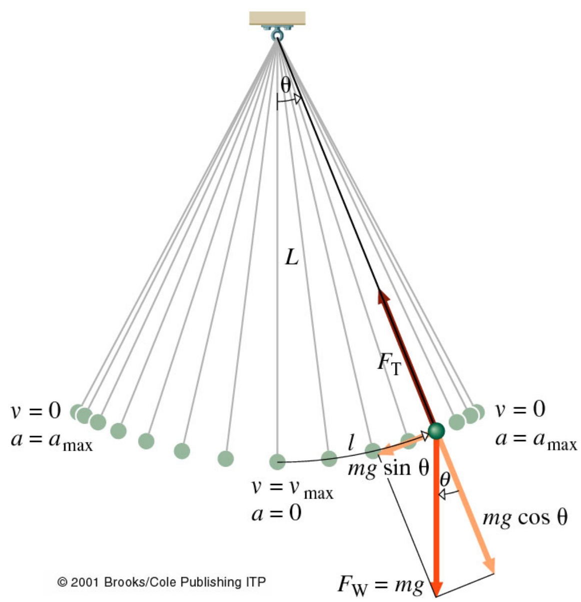


Figure 17.6: Un pendule oscille sous l'effet de la composante presque horizontale de son poids, $mg\sin\theta$. À condition que θ reste faible, le mouvement est sinusoïdal.

Le pendule simple de la figure 17.6 est représenté en mouvement au moment où le fil de longueur L s'écarte de la verticale d'un angle θ. La boule est alors distante de sa position d'équilibre d'une longueur l (mesurée sur l'arc de cercle qu'elle décrit). Si θ est mesurée en radians, $l = L\theta$. À cet instant, les forces en jeu sont la tension du fil F_T et le poids mg de la masse que l'on décompose en une force radiale $mg\cos\theta$ et une force tangentielle $mg\sin\theta$. Cette dernière s'oppose au déplacement et tend à ramener la masse à sa position d'équilibre ($\theta = 0$). Pour des petits angles:

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{l}{L} = -(\frac{mg}{L})l = -kl$$

d'où on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique avec:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{(\frac{mg}{L})(\frac{1}{m})} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \text{et}$$

$$T = 2\pi\sqrt{(\frac{m}{mg/L})} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Alors: *La période ne dépend que de la longueur du fil, pas de la masse suspendue!*

Exemple 17.2.1. Le chariot de la figure 17.7 a une masse de 1.0 kg. On le déplace de 5.0 cm vers la droite avec une force horizontale de 10.0 N, puis on le lâche.
(a) Quelle est la période d'oscillation de ce chariot en l'absence de frottement?
(b) Quelle est la position du chariot 0.20s après le lâcher.
(c) Que devient la constante d'élasticité si on supprime un des deux ressorts?
(d) Quelle sera alors la fréquence d'oscillation du système?

Solution
Données: $m = 1$ kg, $A = 0.050$ m et $F = 10.0$ N. À trouver: T et x à $t = 0.200$ s, k et f pour le système avec un seul ressort.
(a) La force appliquée F produit un déplacement x, tel que $F = kx$. On calcule: $k = \frac{F}{x} = 200$ N/m pour le système entier. C'est la constante d'élasticité du système, celle d'un ressort équivalent qui produirait le même mouvement oscillant. La période de cette oscillation est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.44 \text{ s}$$

(b) Le déplacement au temps $t = 0.2$ s s'obtient à partir de l'équation du mouvement: $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Au temps $t = 0$, $v(t) = 0$ et donc $\phi = 0$. Avec $x_m = 0.05$ m et $\omega = 2\pi/T$, on trouve: $x(t = 0.2 \text{ s}) = -0.048$ m.
(c) Si on supprime l'un des 2 ressorts, il suffit de la moitié de la force précédente pour induire le même déplacement. Donc $k = 100N/m$. (d) $f = 1/T \propto \sqrt{k}$, alors la nouvelle fréquence sera $1/\sqrt{2}$ de l'ancienne valeur, soit 1.6 Hz.

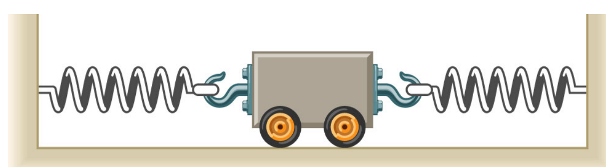


Figure 17.7: Pour déplacer horizontalement le chariot, on doit lui fournir de l'énergie. Cette énergie est théoriquement conservée et se transforme sans perte, d'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa, pendant que le chariot oscille sinusoïdalement. En réalité, l'oscillation est amortie; son amplitude diminue progressivement jusqu'à ce que toute l'énergie soit transformée en énergie thermique par les frottements et les pertes internes dans les ressorts.

Énergie du MHS L'énergie mécanique totale d'un système en mouvement harmonique simple est constante. Il se produit un échange continuel entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique horizontal est entièrement déterminée par le ressort. Elle dépend de l'état d'allongement ou de compression du ressort:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

L'énergie cinétique est entièrement déterminée par la vitesse de la masse:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

L'énergie mécanique totale: $E_M = E_P + E_C$, est égale à

$$E_M = \frac{1}{2}kx_m^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}kx_m^2$$

Alors: *L'énergie mécanique totale de l'oscillateur est constante et proportionnelle au carré de l'amplitude de l'oscillation.*

17.3 Amortissement, oscillations forcées, résonance

Jusque là, nous n'avons considéré que des systèmes oscillant librement, sans forces externes; mais, c'est une situation idéale. Dans la réalité, il y a toujours des forces externes agissant sur l'oscillateur en même temps que la force de rappel. Ces forces peuvent soit entraver le mouvement (c'est-à-dire l'amortir), soit l'aider de façon que son amplitude soit maintenue ou même augmentée. Parfois ce dernier effet peut causer des catastrophes, comme dans les cas des séismes.

Mouvement oscillatoire amorti
Considérons un oscillateur harmonique simple caractérisé par une force de rappel $F = -kx$. A cette force s'ajoute une force d'amortissement, qui provient en général de la résistance de l'air et des frottements internes du système oscillant. On observe que l'amplitude des oscillations va diminuer progressivement jusqu'à l'arrêt complet. C'est un **mouvement oscillatoire amorti** (figure 17.8).

Si l'amortissement est faible, le système peut continuer à osciller pendant un temps relativement long avant de s'arrêter à sa position d'équilibre. Un tel système est **sous-amorti** (figure 17.9). C'est le cas d'un pendule ordinaire, dont l'amplitude diminue lentement, ou d'un diapason qui s'éteint lentement, en perdant de l'énergie à cause du frottement.

Si le frottement augmente, le système déplacé peut revenir lentement à sa position d'équilibre sans jamais la dépasser; dans ce cas, il n'y aura pas d'oscillations. Les amortisseurs d'une voiture, par exemple, doivent étouffer toute oscillation en moins d'un cycle. Quand le système revient à l'équilibre dans le temps le plus court, sans jamais osciller, on dit que l'**amortissement est critique**.

Si l'on augmente davantage l'amortissement, le système n'oscille plus, mais il met plus de temps pour revenir à l'équilibre. On dit dans ces cas que l'oscillateur est apériodique et qu'il a un **amortissement sur-critique**.

Oscillations forcées et résonances
Pour maintenir les oscillations malgré l'amortissement, il faut apporter continuellement de l'énergie au système. Une force effectue un travail moteur sur le système pour compenser la perte d'énergie due aux frottements.

Si on pousse un enfant sur une balançoire, il peut osciller malgré les frottements; pour être efficace, il faut pousser la balançoire quand elle atteint le maximum de hauteur et commence à descendre, la force que vous exercez est alors parallèle au déplacement et le travail est moteur.

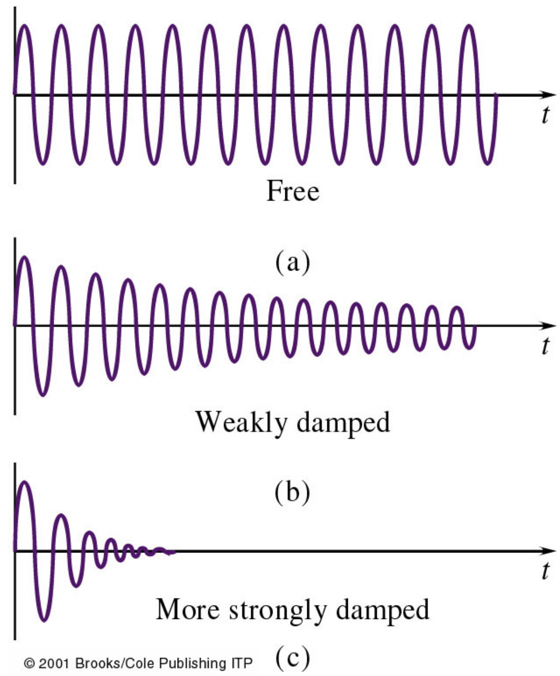


Figure 17.8: (a) Un oscillateur harmonique idéal, sans aucune perte d'énergie, oscille indéfiniment sans diminution d'amplitude. (b) Avec des frottement, l'oscillateur est amorti; son amplitude diminue avec le temps. (c) Plus grand est l'amortissement, plus rapidement les oscillations sont réduites.

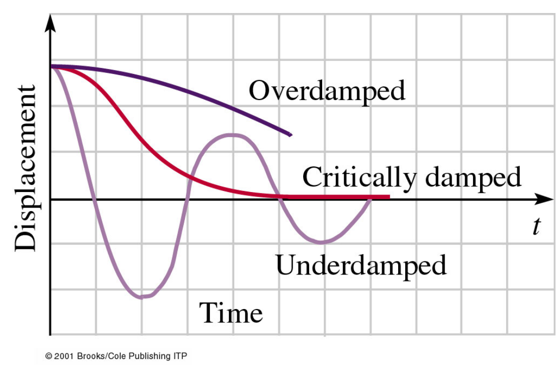


Figure 17.9: Lorsqu'un système oscillant subit un frottement très important et n'oscille pas en revenant lentement à l'équilibre, le système est alors sur-amorti et l'amortissement est sur-critique. Si le corps revient à l'équilibre dans le temps minimum sans jamais osciller, l'amortissement est critique.

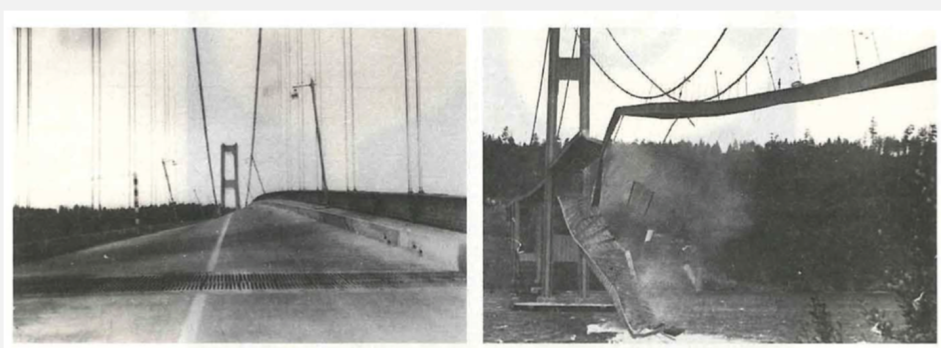
Soit un ressort ou une masse suspendue à un long élastique: donnez au système une courte impulsion et observez sa fréquence propre f_0. Arrêtez les vibrations et faites monter et descendre votre main avec une amplitude de ~ 2 cm et une basse fréquence $f_e \sim 0.3$ Hz ($\ll f_0$). Le système suit votre mouvement, il se déplace en phase avec votre mouvement mais avec une amplitude plus faible. On a un comportement semblable quand f_e est beaucoup plus grande que f_0. Mais quand fe approche f_0, l'amplitude des oscillations résultantes est très grande: il y a une **résonance**.

L'application d'une force externe périodique $F_{ext} = F_e \cos \omega_e t$ à un système qui peut osciller, produit des oscillations. Le mouvement résultant est une oscillation forcée de forme $x(t) = X_m \cos(\omega_e t + \phi')$, i.e. une oscillation à la fréquence angulaire de la force extérieure. L'amplitude X_m est une fonction compliquée de ω_e et ω_0. Elle est maximale pour $\omega_e = \omega_0$. C'est le phénomène de résonance. Si l'amortissement est faible, l'amplitude peut devenir considérable et entrainer la rupture du système mécanique (e.g. pont de Tacoma, voir dessous).

Toute structure mécanique a une ou plusieurs fréquences propres, et si la structure est soumise à une force extérieure dont la fréquence correspond à l'une de ces fréquences propres, il peut y avoir des oscillations tellement violentes que la structure se rompt.

Pont de Tacoma

Le premier pont franchissant le détroit de Tacoma à Puget Sound, Washington, avait un tablier principal de longueur de 853 m et de largeur de 11,9 m avec des poutres d'acier de 2,4 m pour le soutenir. Il a été ouvert à la circulation le 1er juillet 1940 et on s'est aperçu qu'il oscillait beaucoup lorsque le vent soufflait. Le matin du 7 novembre 1940, un vent de 70 km/h l'a fait vibrer, comme d'habitude, à 36 vibrations par minute. L'amplitude est devenue si grande que le pont a été fermé à la circulation. Vers 10 h, le câble nord s'est relâché et le pont principal s'est mis brutalement à osciller en mode résonant de 0.2 Hz autour de ligne jaune centrale de la route.
Bien qu'il y ait encore des questions restées sans réponse, le mécanisme fondamental qui a causé la catastrophe semble avoir été la formation de tourbillons, qui ont produit des vibrations auto-excitées. En se précipitant vers la grande poutre de soutien, l'air s'est partagé en deux courants suscitant des tourbillons alternativement au-dessus et au-dessous du pont. Une fois que la structure a commencé à osciller, ce mouvement a conduit à la formation d'autres tourbillons. Ces tourbillons induits se formaient avec la montée et la descente du pont; ils avaient donc la fréquence de vibration propre du pont.
L'énergie qu'apportait le vent au pont dépassa rapidement celle perdue par frottements et il apparut un régime d'oscillations de plus en plus amples. Peu après 11 heures du matin, heure locale, le tablier central se déchira comme un ruban de coton.



Exercices

Exercice 17.1. Oscillations dans un champs de gravité: une bande élastique verticale s'allonge de 50 cm si elle porte un sac de bonbons de 2.0 kg. Le sac est lors à 1 m au-dessus de la tête d'un enfant. Le sac est tiré vers le bas de 25.0 cm, puis lâché. Combien de temps faut-il pour qu'il revienne à la même hauteur de 1 m au-dessus de l'enfant?