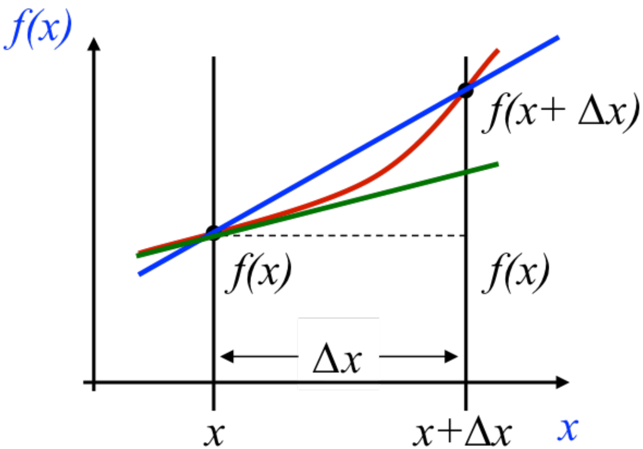
RAPPEL MATHÉMATIQUE

PGC-00

DÉRIVÉE

Variation.

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



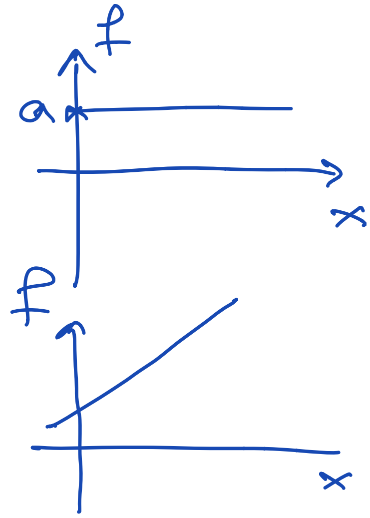
$$f(x) = ax + \beta$$

$$\frac{df}{dx} = a \Leftarrow \text{pente.}$$

quelques exemples.

$$f(x) = a$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$



$$f(x) = ax + \beta$$

$$F = \frac{df}{dx} = a$$

$$F = a \Rightarrow f = ?$$

$$F = a \Rightarrow \int F\,dx = ax + \underline{\underline{\beta}}$$

$$F = 0 \Rightarrow \int F\,dx = \underline{\underline{\beta}}$$

$$F = x \Rightarrow \int F\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \underline{\underline{\beta}}$$

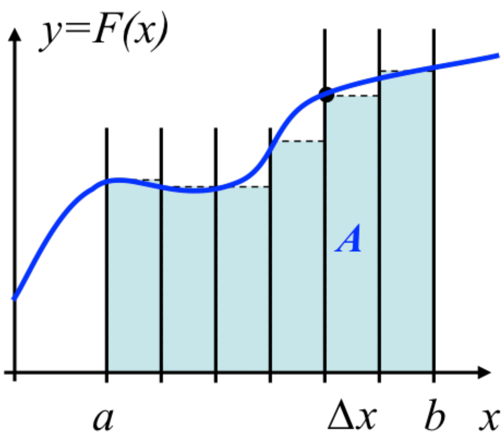
Conditions initiale!!

INTEGRAL

$$F(x) = \frac{df(x)}{dx} \Rightarrow f(x) = \int F(x)\,dx$$

Surface

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b F(x)\,\Delta x$$



A SAVOIR!

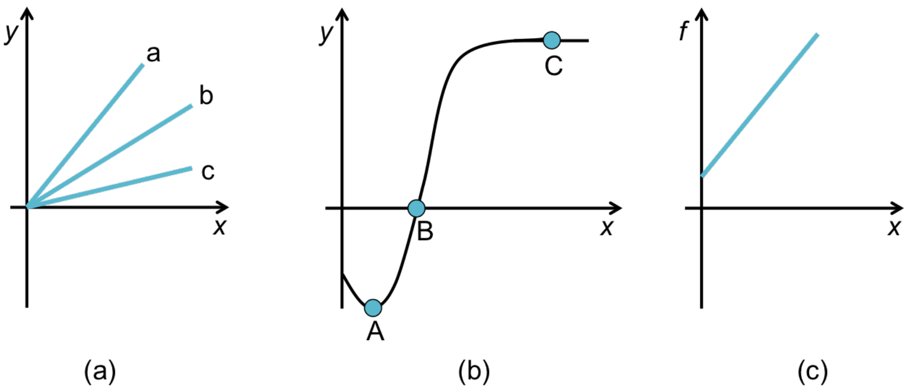
Fonction $f(t)$	Dérivée df/dt	Primitive $F = \int f(t)dt$
$f_1 + f_2$	$df_1/dt + df_2/dt$	$F_1 + F_2$
$a\ f_1 + b\ f_2$	$a\ df_1/dt + b\ df_2/dt$	$a\ F_1 + b\ F_2$
$f_1 \cdot f_2$	$f_1 \cdot df_2/dt + f_2 \cdot df_1/dt$	
$f(g(t))$	$dg/dt \cdot df(g)/dg$	
a, $a = \text{const.}$	0	$at + b$
at, $a = \text{const.}$	a	$at^2/2 + b$
$at + b$, $a, b = \text{const.}$	a	$at^2/2 + bt + c$
at^2, $a = \text{const.}$	$2at$	$at^3/3 + b$
Ae^{at+b}	$Aae^{at+b} = a\ f(t)$	$(A/a)\ e^{at+b} = f(t)/a$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$x^{n+1}/(n+1) + const$

EXEMPLE

Considérons une quantité qui est définie comme:

$$f(x) = \frac{dy(x)}{dx}$$

Trois situations différentes sont montrées à la figure dessous.
(a) Dans lequel des trois cas $f(x)$ est plus grande?
(b) Dans quel point du diagramme $f(x)$ se minimise? Dessiner approximativement le diagramme de $f(x)$.
(c) Vous connaissez que $f(x) = \frac{dy}{dx}$ et vous voyez au dessin $f(x)$. Exprimer mathématiquement et graphiquement $y(x)$.



LA CINÉMATIQUE - MRU

PGC-01

VITESSE

$$v = \frac{\Delta \ell}{\Delta t}$$

$v \uparrow \quad \Delta \ell \uparrow$

$v \uparrow \quad \Delta t \downarrow$

Vitesse scalaire

Vitesse moyenne

Vecteur vitesse

Vitesse instantanée

VITESSE SCALAIRE Moyenne.

$$V_m = \frac{l}{t}$$

independ
- forme
- details mouvent.

$$(SI)$$

$$[V_m] = \frac{m}{s}$$

VITESSE SCALAIRE

Un objet bouge à une vitesse de 6 m/s. Ça veut dire que l'objet:

(a) Augmente sa vitesse de 6 m/s chaque seconde;

(b) Diminue sa vitesse de 6 m/s chaque seconde;

(c) Bouge 6 metres chaque seconde.

VITESSE SCALAIRE

$v = \frac{8\,m}{4\,s} = 2\,\frac{m}{s}$

Une voiture bouge 8 m en 4 s avec une vitesse constante.
Quelle est la vitesse de la voiture?

(a) 1 m/s (b) 2 m/s (c) 4 m/s (d) 8 m/s

Un bateau bouge avec une vitesse constante de 8 km/h.
Combien de temps met-it pour traverser 24 km?

(a) 2 h (b) 3 h (c) 4 h (d) 8 h

t ?

$v = 8\,km/h$

$l = 24\,km$

$v = \frac{l}{t} \Rightarrow t = \frac{l}{v}$

CONVERTIONS D'UNITÉS

Transformer la vitesse de 0.2 cm/s en unités de km/h et km/année.

$$0.2\,\frac{cm}{s} = 0.2\,\frac{\cancel{cm}}{\cancel{s}} \cdot \frac{1\,\cancel{m}}{100\,\cancel{cm}} \cdot \frac{1\,km}{1000\,\cancel{m}} \cdot \frac{60\,\cancel{s}}{1\,\cancel{min}} \cdot \frac{60\,\cancel{min}}{1\,h}$$

$$= 0.2\,\frac{1}{10^5} \cdot 3600\,\frac{km}{h} = 0.2\times10^{-5}\times3.6\times10^{3}\,\frac{km}{h}$$

$$= 7.2\times10^{-3}\,\frac{km}{\cancel{h}} \cdot \frac{8760\,\cancel{h}}{année} = 63\ km/année$$

$$1\,année = 365\,jour \cdot \frac{24h}{jour} = 8760\,h$$

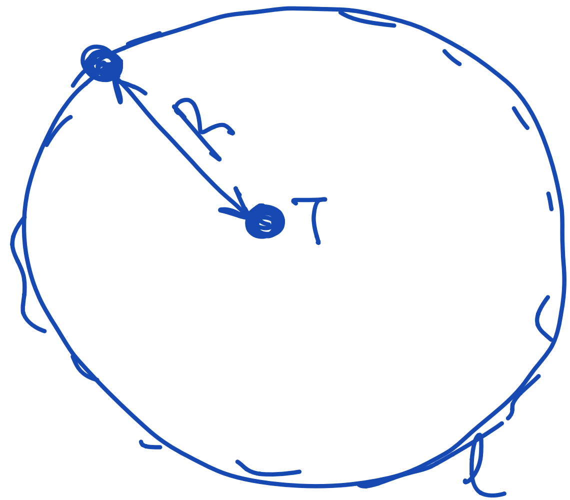
EXEMPLE

La Lune décris une orbite approximativement circulaire de rayon moyen R = 3.84 × 10^{8} m autour de la Terre. Elle met 27.3 jours pour effectuer une révolution. Déterminez sa vitesse moyenne en m/s.

$$l = 2\pi R$$

$$T = 27.3 \text{ jours}$$

$$v_m = \frac{l}{T} = \cdots 10^{3} \frac{m}{s}$$



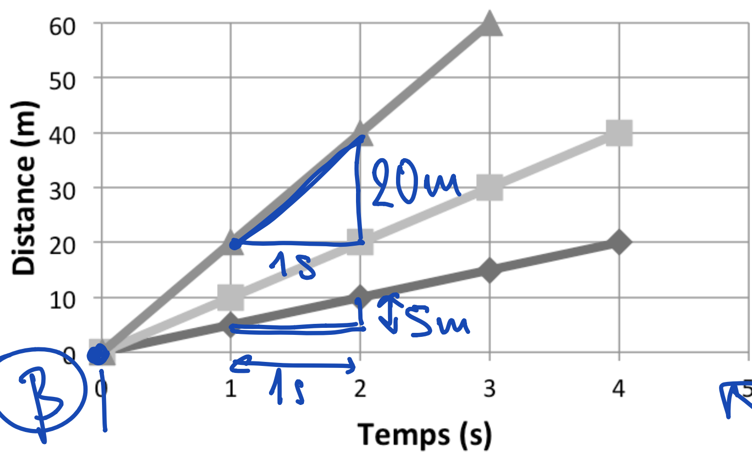
VITESSE SCALAIRE constante

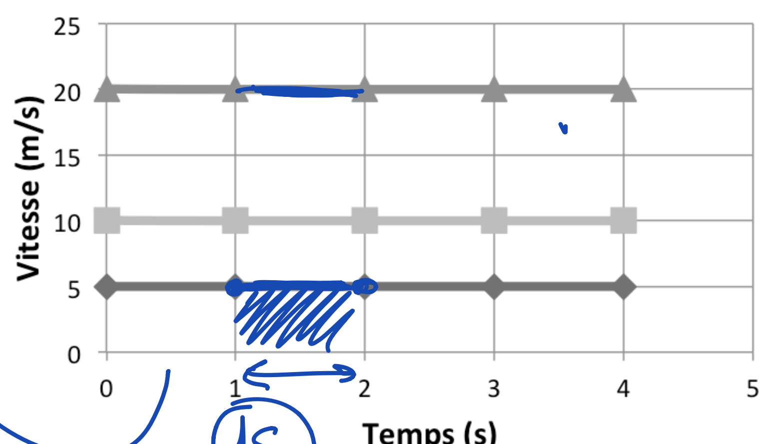
$$\underline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underline{\text{constante}}$$

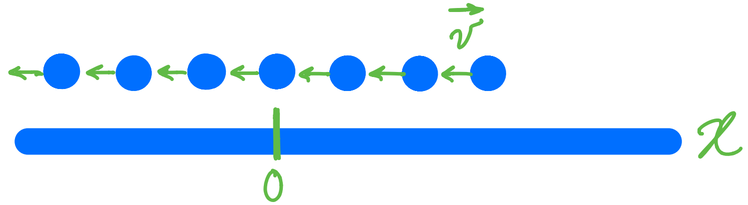
$$v \cdot t \Rightarrow x$$

$$x = \int v\,dt = a \cdot t + \beta$$

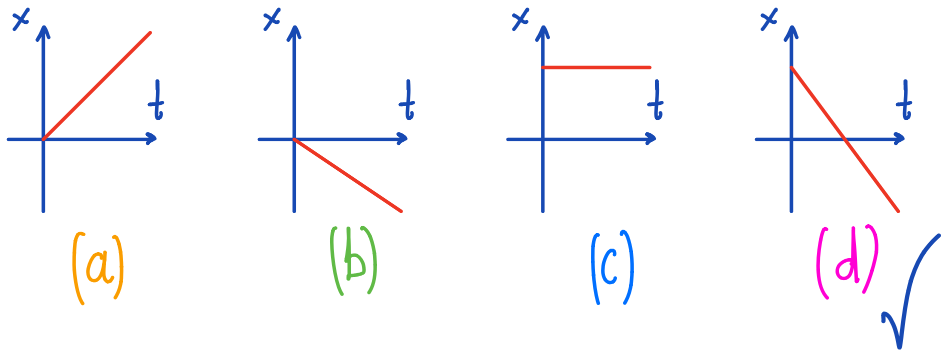
a pente $\Leftrightarrow$ vitesse





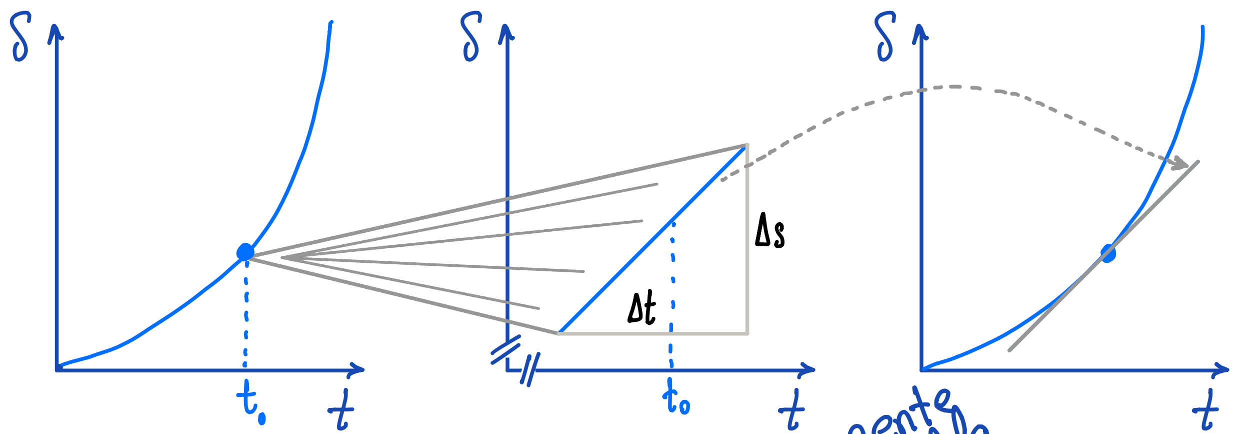


Quel est le diagramme qui répresente le mieux la position par rapport au temps de ce mouvement?



VITESSE SCALAIRE Instantanée

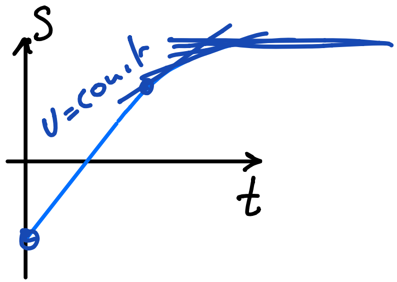
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \equiv \frac{d\ell}{dt}$$



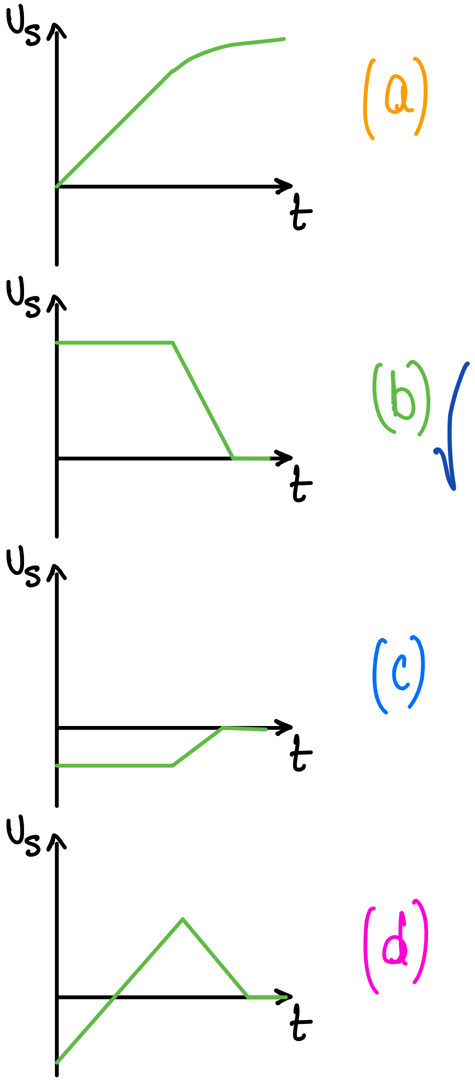
La vitesse au temps t_0?

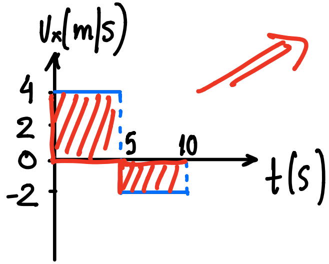
... zoom in!...

pente de la tangente de la courbe
⇒ vitesse instantannée!



On connaît le diagramme position-temps dessus. À quel diagramme vitesse-temps correspond-il?





$\Rightarrow \Delta X$

$x = \int v\,dt$

surface

On connaît le diagramme vitesse-temps dessus. À quel diagramme position-temps correspond-il?

$v = 4\ m/s$

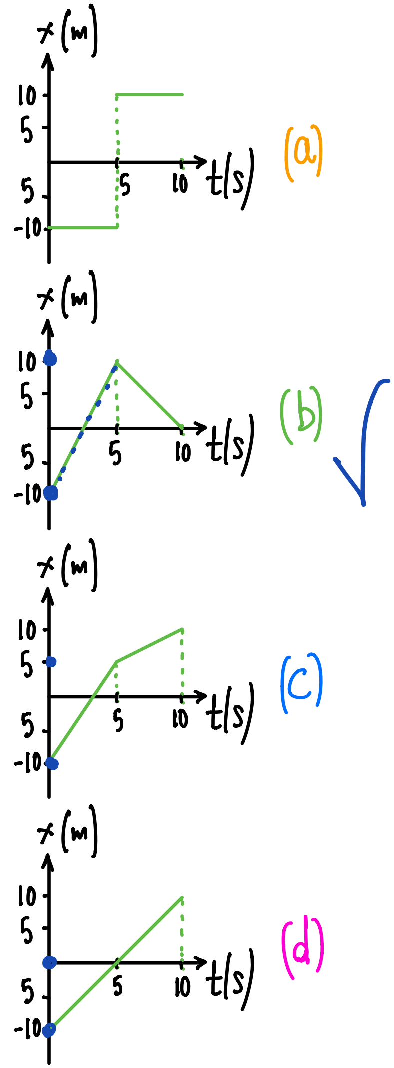
$\Delta t = 5\ s$

$\Delta x = 20\ m$

$v = -2\ m/s$

$\Delta t = 5\ s$

$\Delta x = 10\ m$

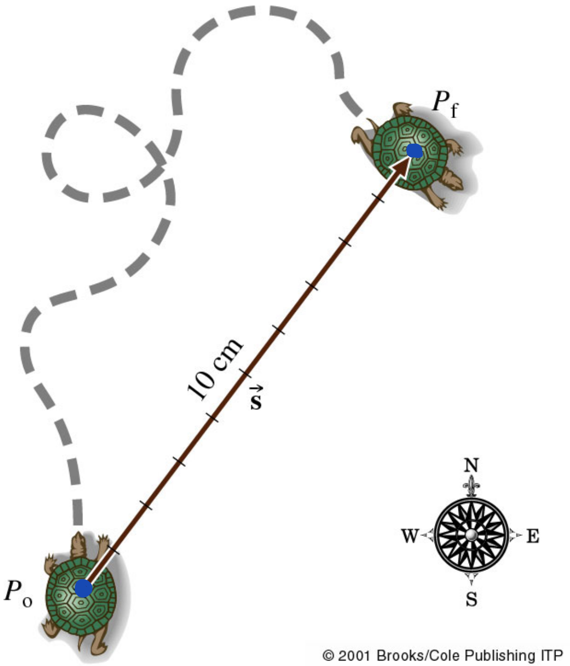


DÉPLACEMENT

distance
direction

$\vec{S}$ $|\vec{S}|$ ou S

$\neq$ distance parcourue!



VECTEUR VITESSE

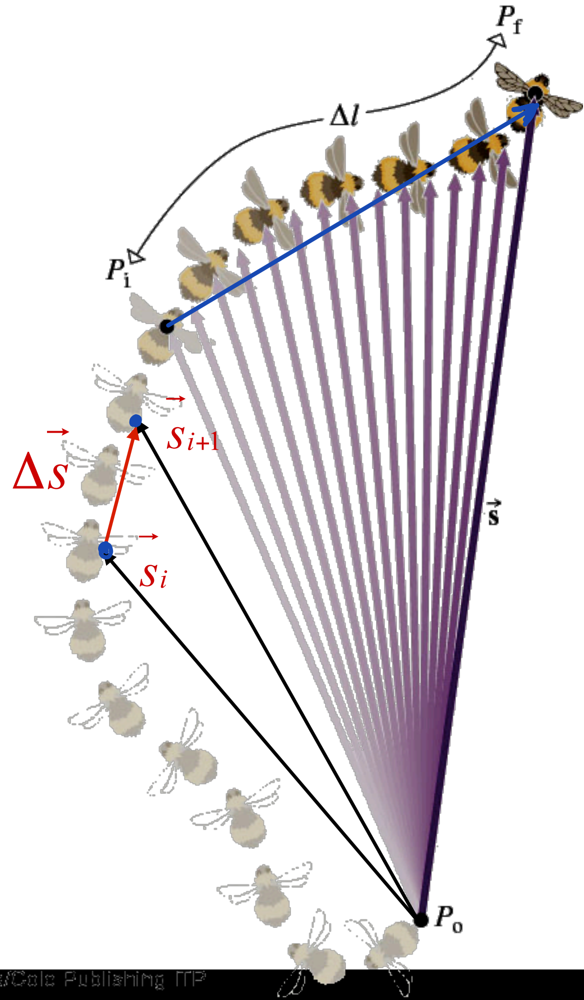
$\vec{s}(t)$

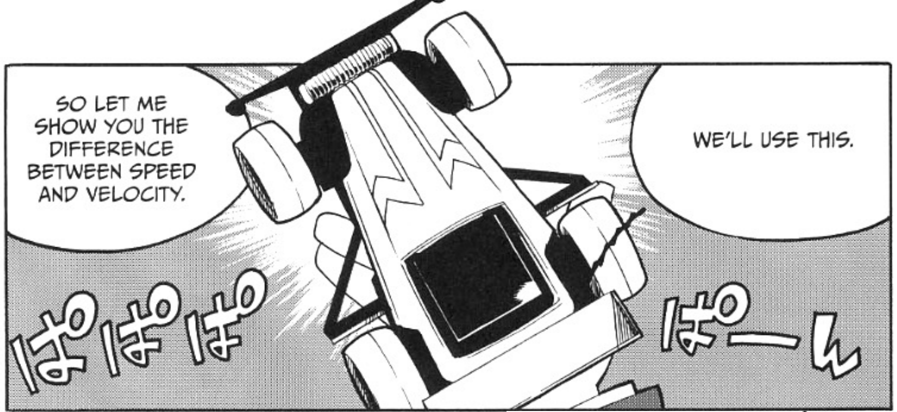
$\Delta \vec{s} = \vec{S}_f - \vec{S}_i$

$v = \dfrac{|\Delta \vec{s}|}{\Delta t}$

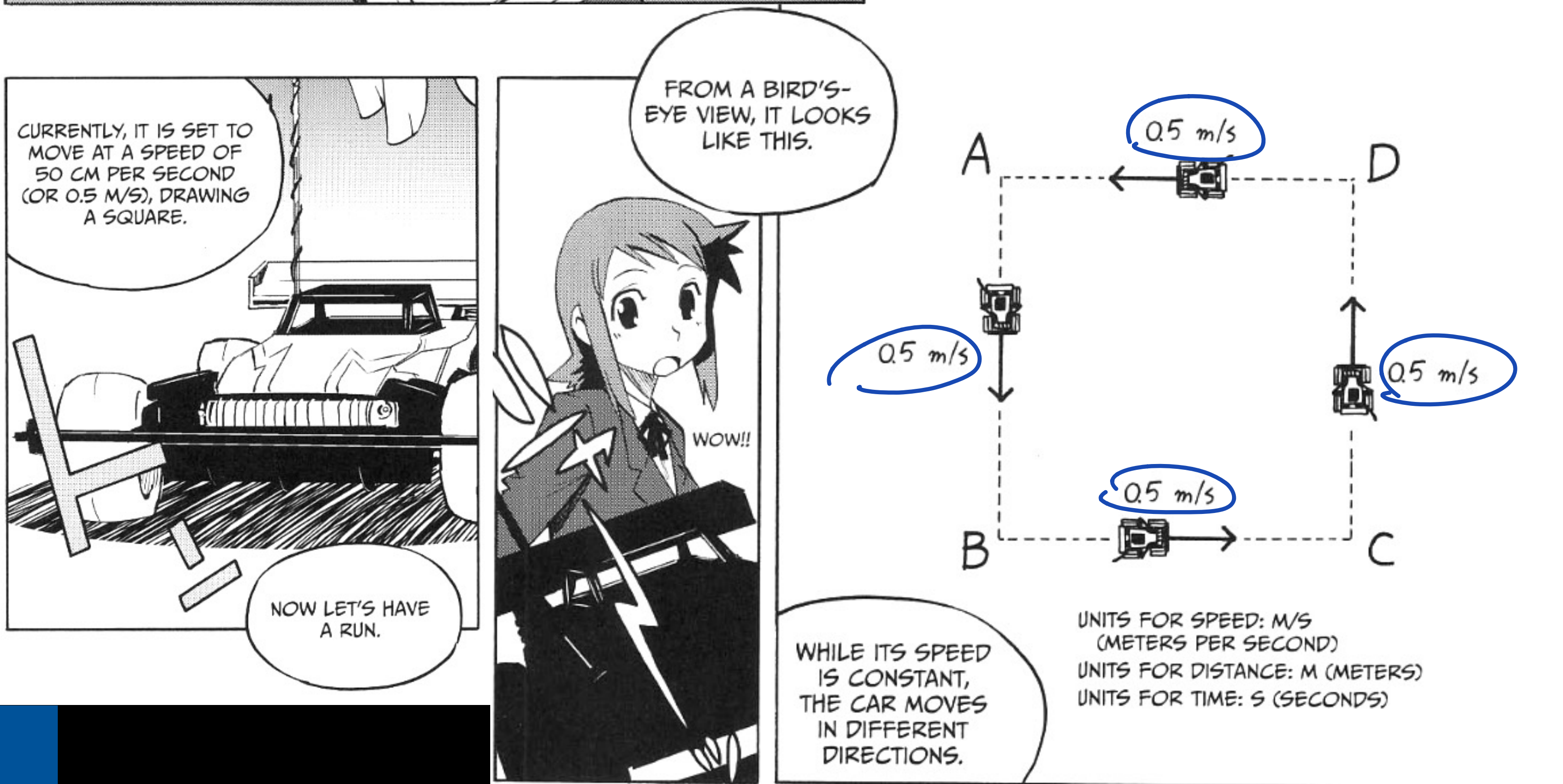
$\vec{v} = \dfrac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \qquad \Delta t \to 0$

$\underline{\vec{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}$





vitesse moyenne
scalaire 0.5 m/s
≠
vecteur vitesse
$\vec{v}$



Mouvement Rectiligne Uniforme

MRU

$v = $ constante

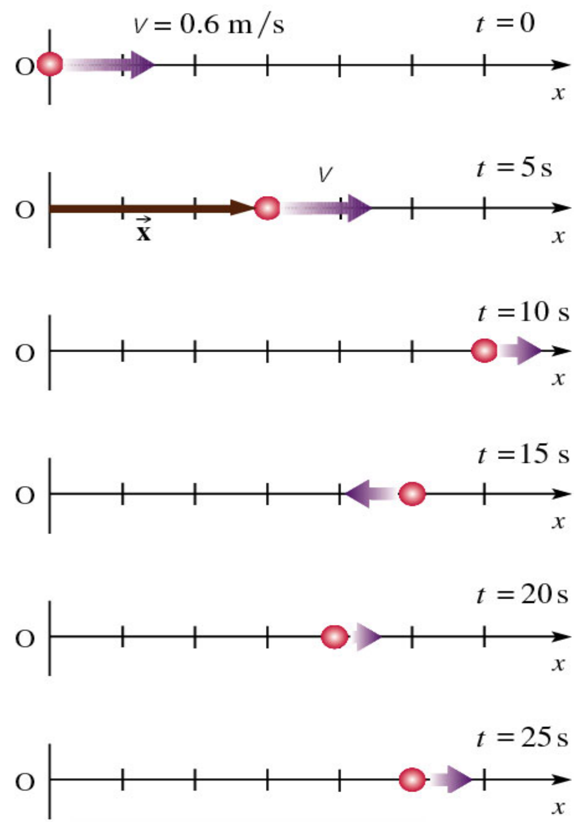
vecteurs colinéaires

$\Delta x = x(t) - x_0$ déplace.

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ vit. inst.

$v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ vitesse moyenne

$\Delta x = x_f - x_i$



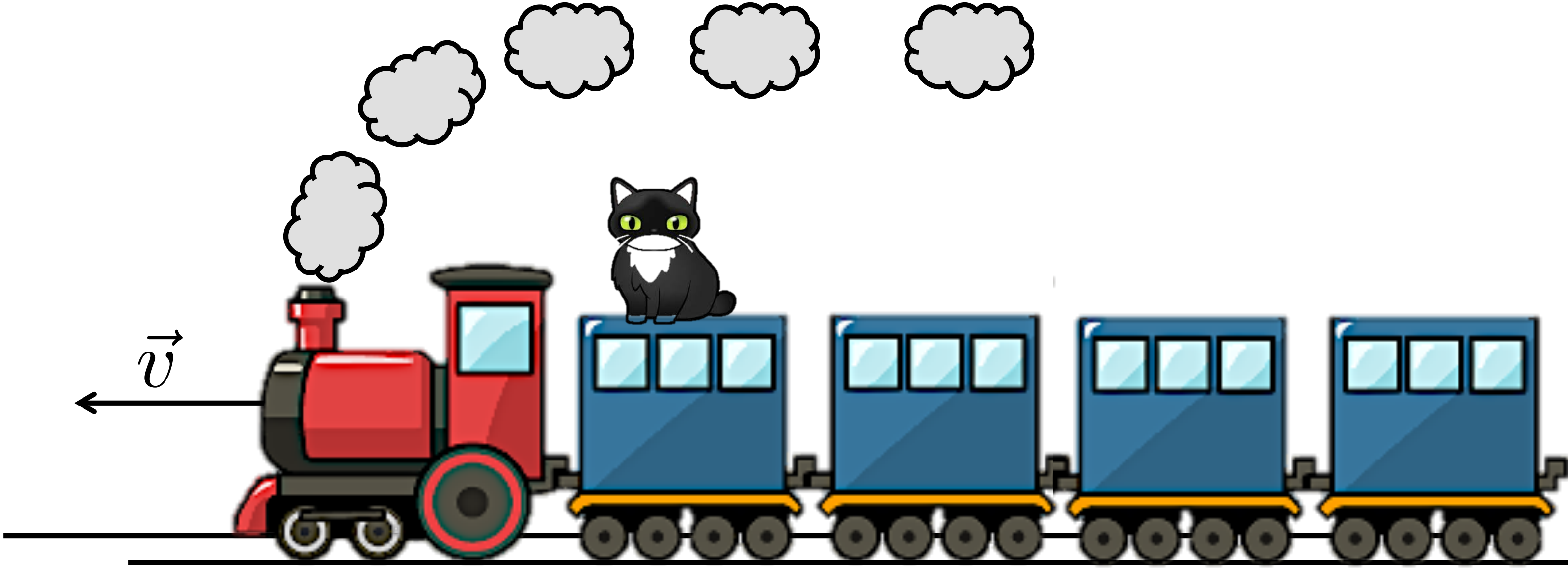
MOUVEMENT RELATIF – 1D

Vitesse du train par rapport au sol: $\vec{v} \equiv \vec{V}_{TS}$

Quelle est la vitesse du chat par rapport à nous qu'on regarde le train bouger?

Nous: $\vec{V}_{CS} = \vec{V}$

$\vec{V}_{CT} = \vec{0}$



MOUVEMENT RELATIF – 1D

Vitesse du train par rapport au sol: $\vec{v}$ et vitesse du voleur par rapport au train: $\vec{v}'$
Quelle est la vitesse du voleur par rapport à nous qu'on regarde le voleur courir?

$\vec{v}_{TS} = \vec{v}$

$\vec{v}_{VT} = \vec{v}'$

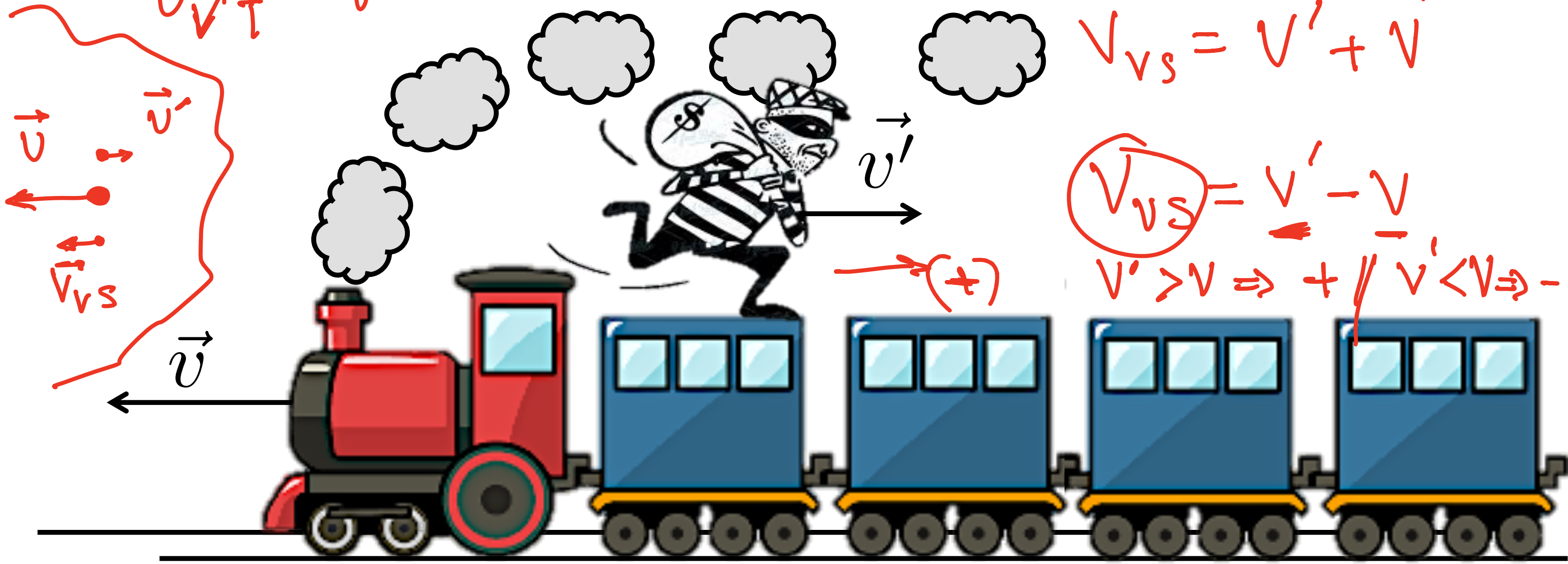
$\vec{V}_{VS} = \vec{V}_{VT} + \vec{V}_{TS} \Rightarrow$

$\vec{V}_{VS} = \vec{V}' + \vec{V}$

$V_{VS} = V' - V$

(+)

$V' > V \Rightarrow +$ // $V' < V \Rightarrow -$



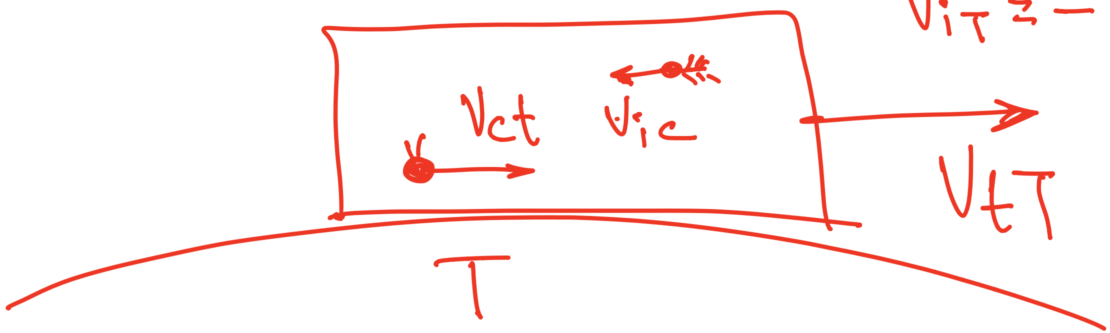
EXEMPLE

Dans un train (symbole t) qui se déplace par rapport à la Terre (symbole T) vers l'est à une vitesse v_{tT} = 10km/h, un grand chien (symbole c) se déplace lentement vers la tête du train à une vitesse v_{ct} = 5 km/h. Un insecte (symbole i) vole vers l'ouest à une vitesse v_{ic} = 0.01 km/h par rapport au chien. Quelle est la vitesse de l'insecte par rapport à la Terre (symbole T , v_{iT})?

(+) $\longrightarrow$

$$\vec{V}_{iT} = \vec{V}_{ic} + \vec{V}_{ct} + \vec{V}_{tT}$$

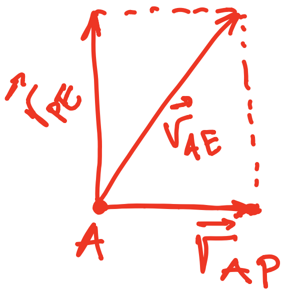
$$V_{iT} = -V_{ic} + V_{ct} + V_{tT}$$



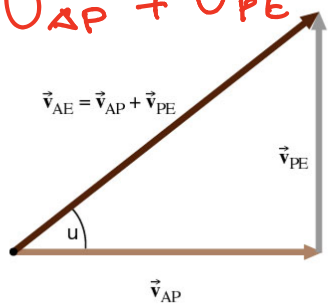
MOUVEMENT RELATIF – 2D

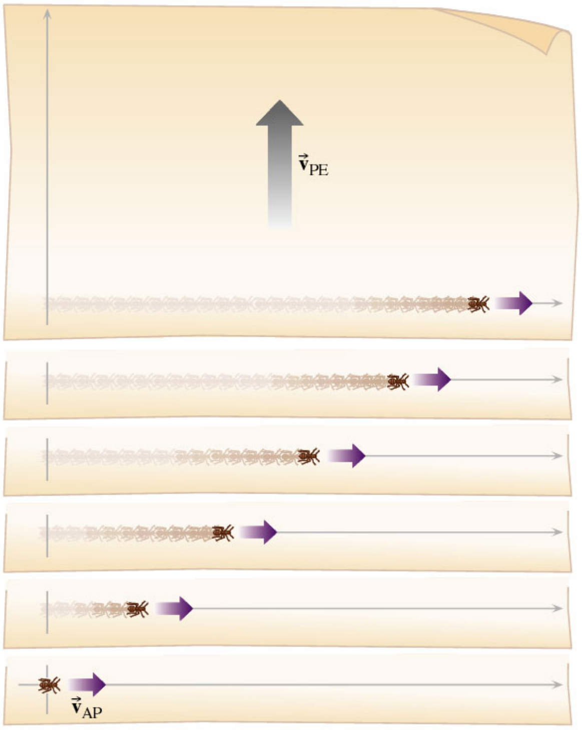
$$\vec{r}_{AE} = \vec{r}_{AP} + \vec{r}_{PE}$$

$$\frac{d\vec{r}_{AE}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{AP}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{PE}}{dt}$$

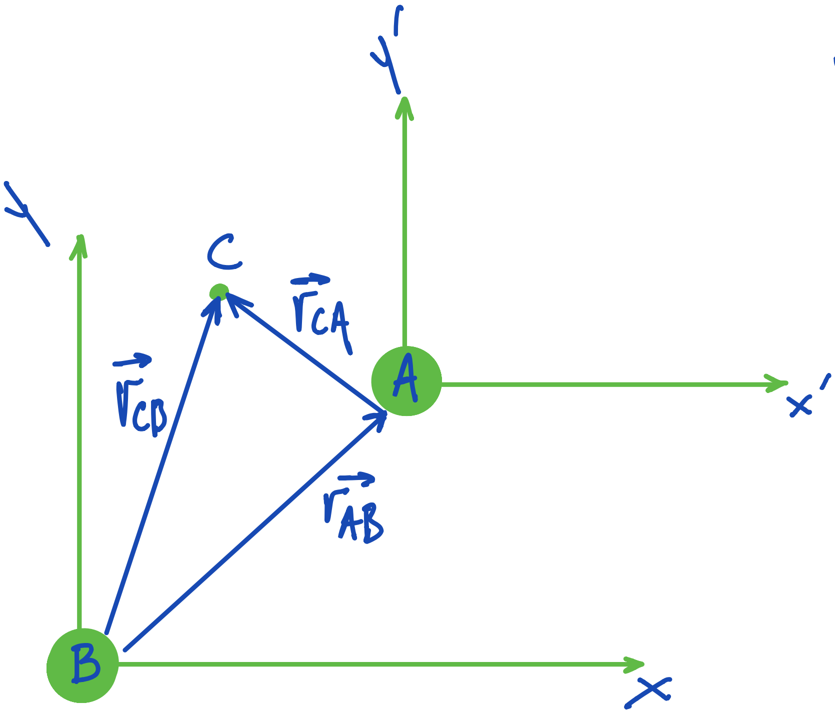


$$\Rightarrow \vec{v}_{AE} = \vec{v}_{AP} + \vec{v}_{PE}$$





MOUVEMENT RELATIF – 2D



$$\vec{r}_{CB} = \underbrace{\vec{r}_{CA} + \vec{r}_{AB}}$$

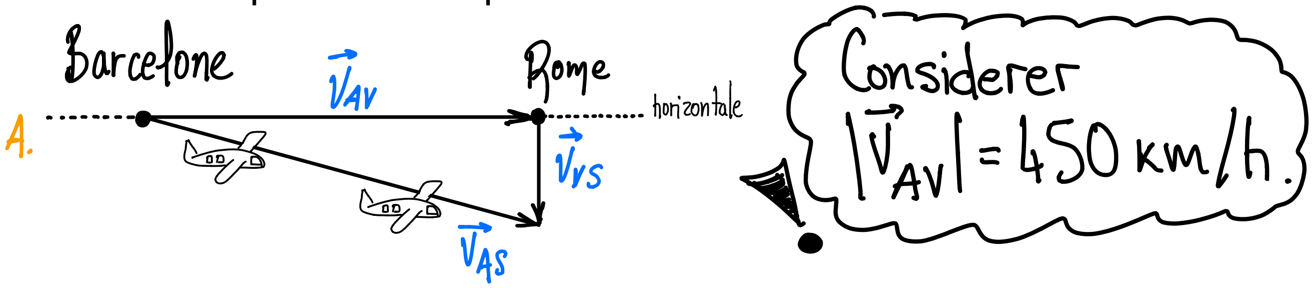
$$\frac{d}{dt}\left(\quad \right)$$

$$\Downarrow$$

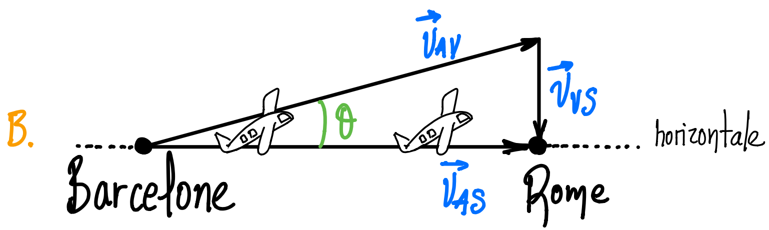
$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CA} + \vec{v}_{AB}$$

MOUVEMENT RELATIF – 2D

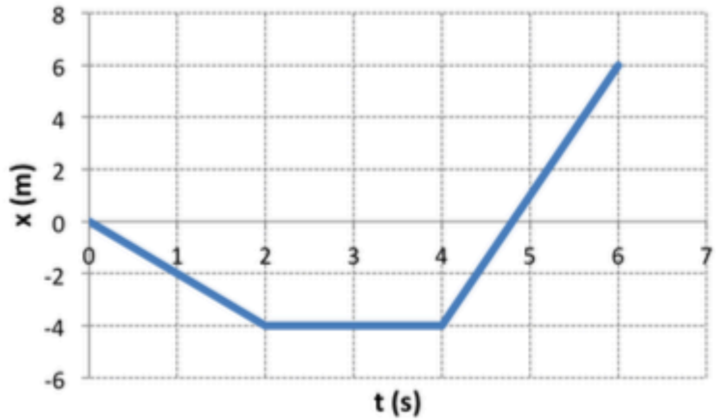
Un avion part de Barcelone en direction pour Rome, qui se trouve à 900 km à l'est de Barcelone. Le pilote a oublié ce matin-là de vérifier la météo et a raté l'information que le vent volait vers le sud avec une vitesse de 50 km/h. Où l'avion va-t-il se trouver quand il aura parcouru une distance horizontale de 900 km?



Un autre pilote, plus prudent, sachant la météo, part vert le nord-est avec un angle θ par rapport à l'horizontale. Quel est l'angle θ pour que cet avion arrive à Rome?



Exercice 1.1. La figure à coté montre le graphe de la position en fonction du temps d'une voiture.



(a) Dessiner la vitesse en fonction du temps de cette voiture.
(b) Décrire le mouvement.

Exercice 1.2. La position d'un objet est donnée par la fonction $x(t) = (-t^3 + 3t)$ m, où t est en s.

(a) Quelles sont la position et la vitesse de l'objet à $t = 2$ s?

(b) Dessiner les graphes de x et v_x dans l'interval de temps -3 s $\leq t \leq 3$ s.

(c) Décrire le mouvement de l'objet.