ÉLASTICITÉ ET OSCILLATIONS

PGC-16 / PGC-17

L'ÉLASTICITÉ

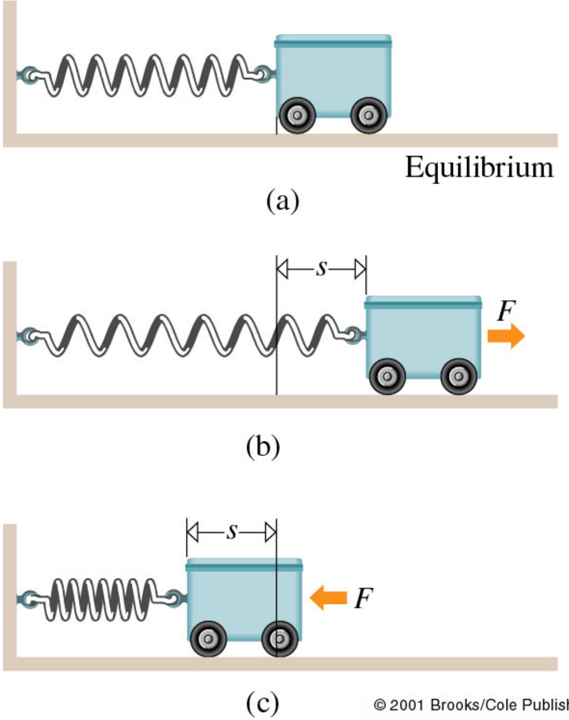
L'élasticité étudie le comportement de matériaux et de structures sous contraintes. Un solide soumis à une force extérieure (contrainte) peut être comprimé, étiré ou cisaillé.

$F = K \cdot S$ Loi de Hooke

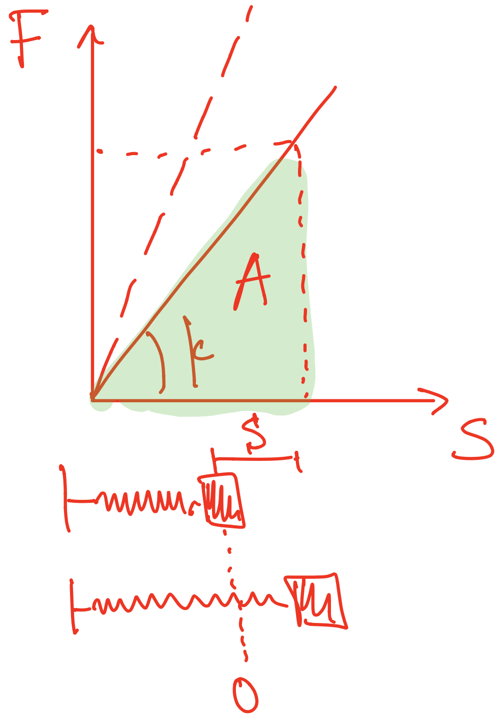
S : deformation

k : constante d'élasticité

$[k] = \frac{N}{m}$



ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE



$$A = \frac{1}{2} F S = \frac{1}{2} k S^2$$

$$F = k \cdot S$$

$$W = \Delta E_{MEC} = \Delta E_{CIN} + \Delta E_p$$

$$F = k \cdot S$$

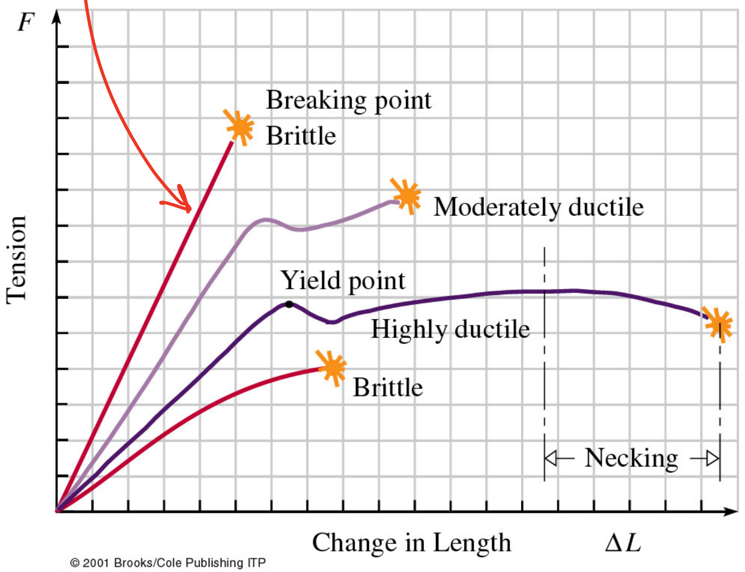
$$W = \int_0^S F \, ds = \int_0^S k s \, ds = \frac{1}{2} k S^2$$

$$\underline{W = \Delta E_p = \frac{1}{2} k S^2}$$

MATÉRIAUX ÉLASTIQUES

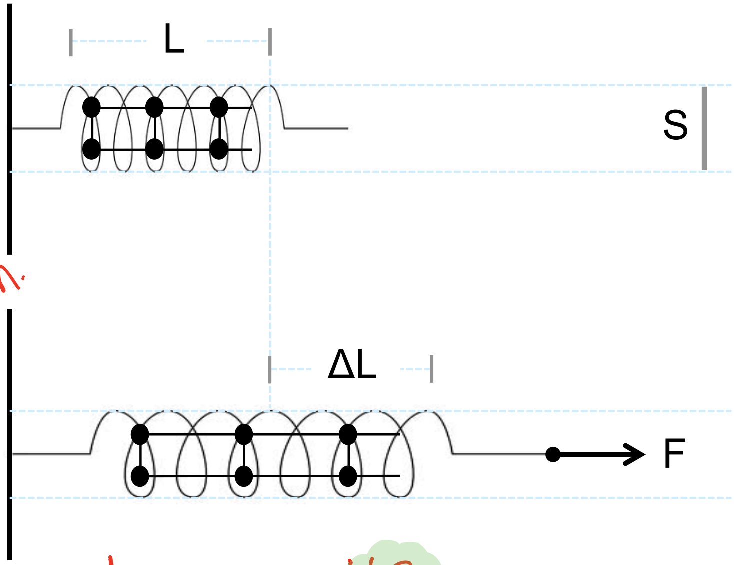
$F = k \cdot \Delta L$

Courbes de traction



CONTRAINTE ET DÉFORMATION

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad [\sigma] = \frac{N}{m^2}$$



Traction & Compression.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\boxed{\sigma = E \cdot \epsilon}$$

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{S} \cdot \frac{L}{\Delta L} \Rightarrow F = \frac{YS}{L} \cdot \Delta L$$

Module Young

$$F = k \cdot \Delta L$$

LES OSCILLATIONS

LE MOUVEMENT PÉRIODIQUE

Cycle

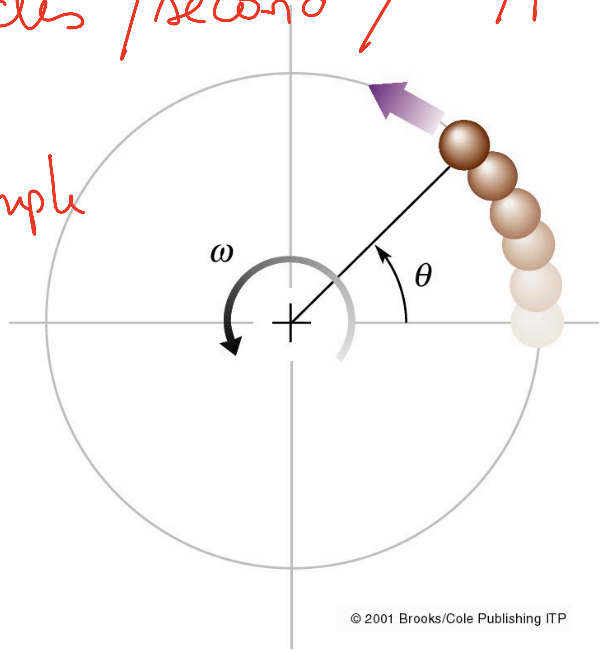
= La période T t pour un cycle

= la fréquence f # cycles / second / $1/T$

$$f = 1/T$$

= ω 2π rad tour complet

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$



LE MOUVEMENT SINUSOÏDAL

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \cos\theta \\ A \Rightarrow x_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_{max}\cos\theta \\ \theta = \omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = x_{max}\cos\omega t}$$

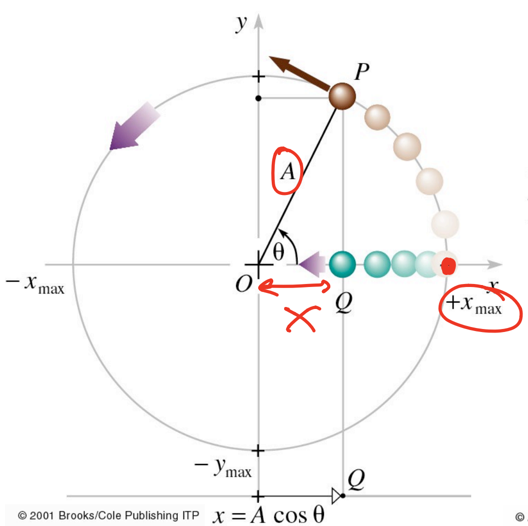
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

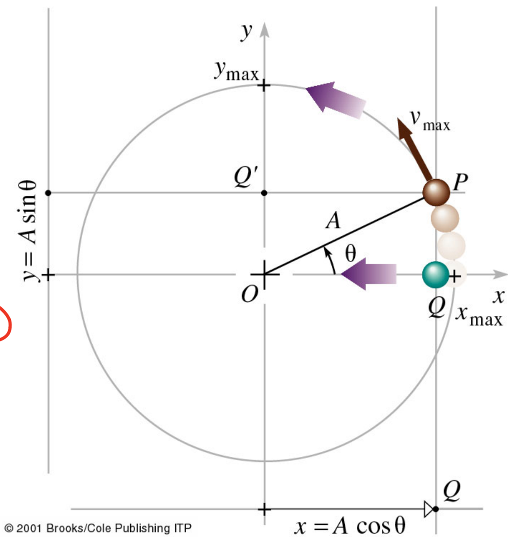
$$x = x_{max}\cos\omega t$$

$$x = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$x = x_{max}\cos 2\pi f t$$

$$y = y_{max}\sin\omega t$$





LE MOUVEMENT SINUSOÏDAL

Et si t=0 quand θ > 0?

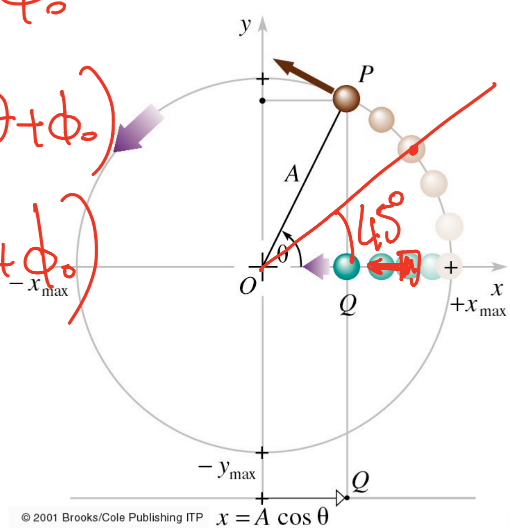
$\theta = \phi_0 \quad (t=0)$

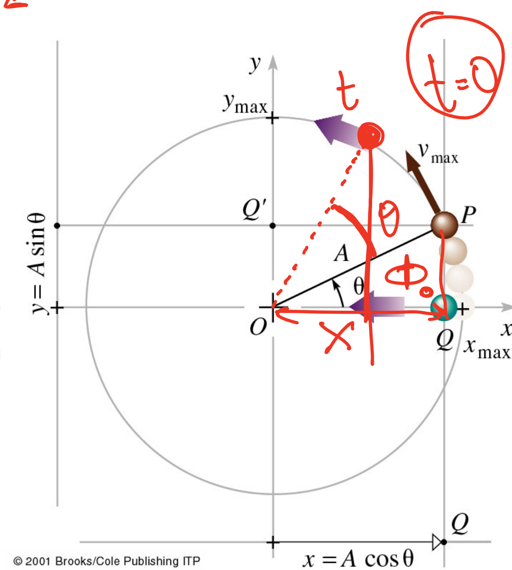
t

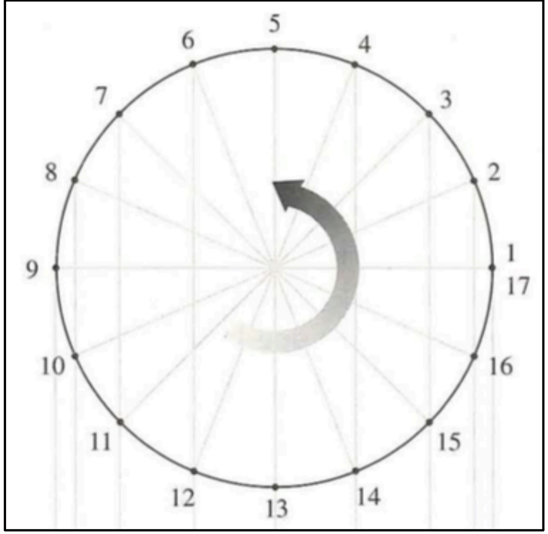
$x(t=0) = x_{max} \cos \phi_0$

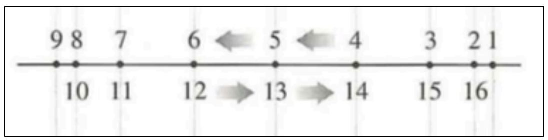
$x(t) = x_{max} \cos(\theta + \phi_0)$

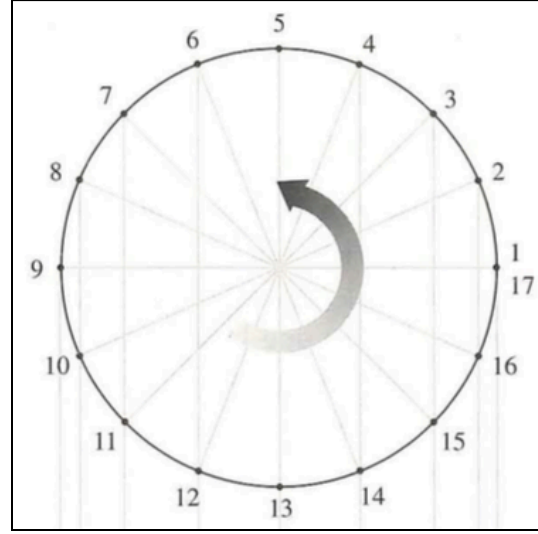
$x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \phi_0)$

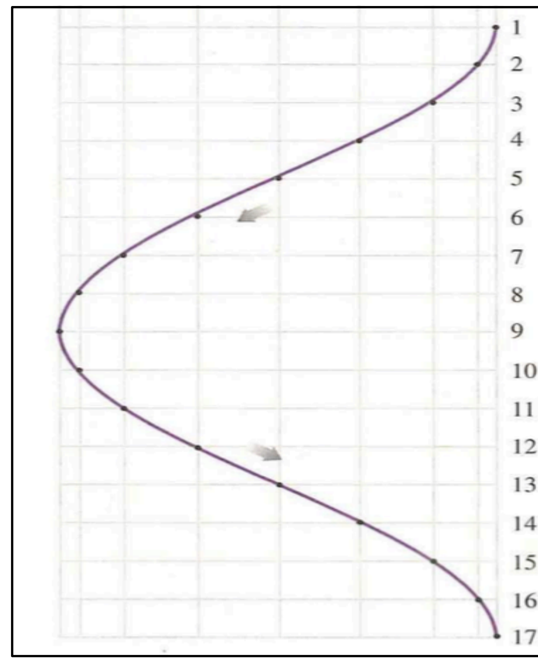


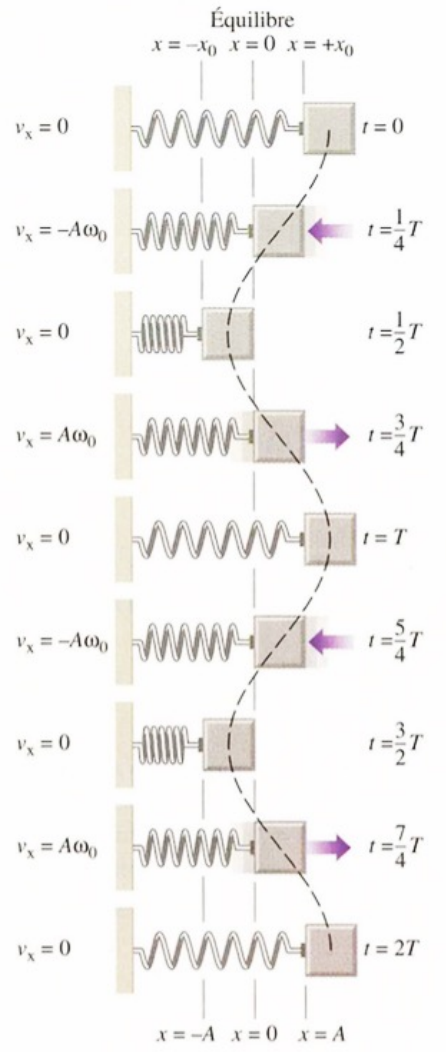



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

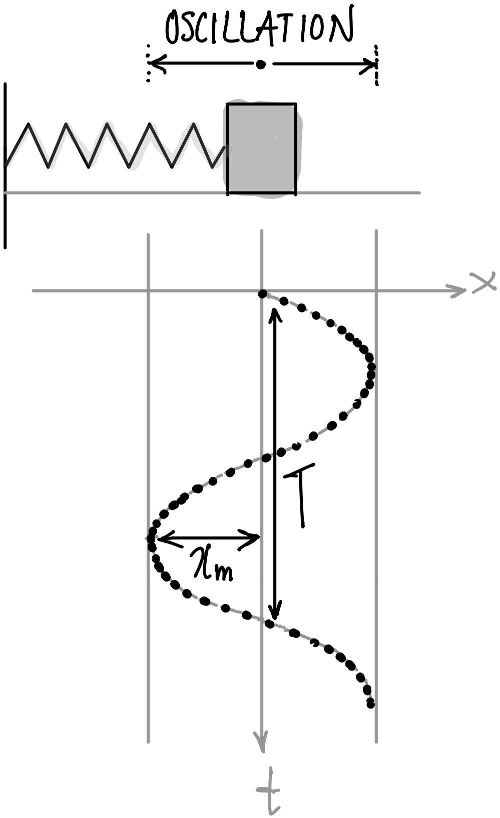

9 8 7 6 5 4 3 2 1
10 11 12 13 14 15 16


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17


Équilibre
$x = -x_0$ $x = 0$ $x = +x_0$
$v_x = 0$ $t = 0$
$v_x = -A\omega_0$ $t = \frac{1}{4}T$
$v_x = 0$ $t = \frac{1}{2}T$
$v_x = A\omega_0$ $t = \frac{3}{4}T$
$v_x = 0$ $t = T$
$v_x = -A\omega_0$ $t = \frac{5}{4}T$
$v_x = 0$ $t = \frac{3}{2}T$
$v_x = A\omega_0$ $t = \frac{7}{4}T$
$v_x = 0$ $t = 2T$
$x = -A$ $x = 0$ $x = A$

LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

x_m : amplitude

$\omega t + \phi$: phase du mouvement

ϕ : phase initiale

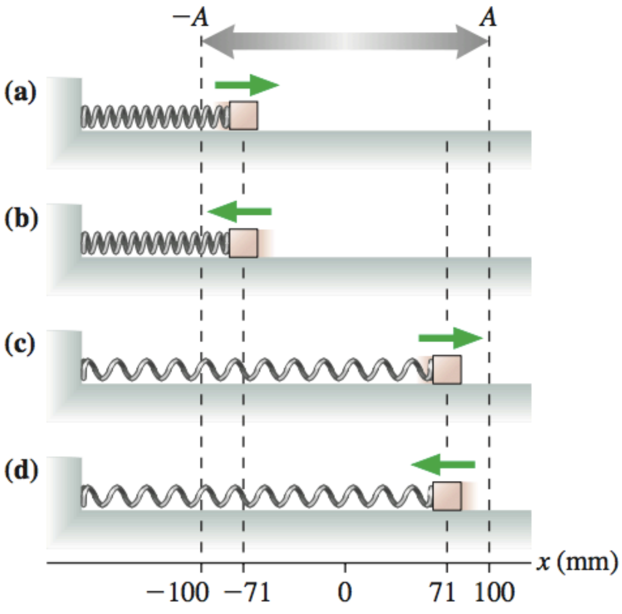
ω : frequence angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (rad/s)$$

QUESTION

La figure montre quatre oscillations à t = 0 s. La quelle a une phase initiale de π/4 rad?

(voir page 9)

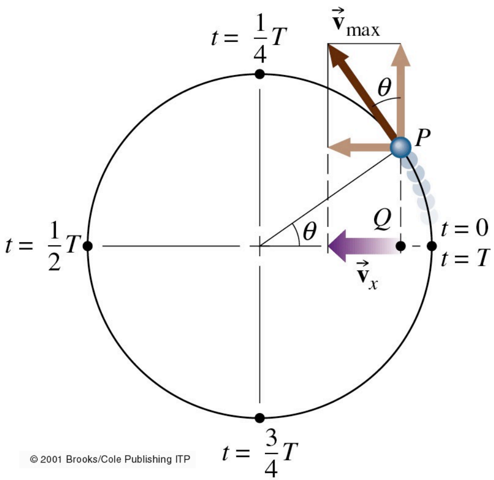


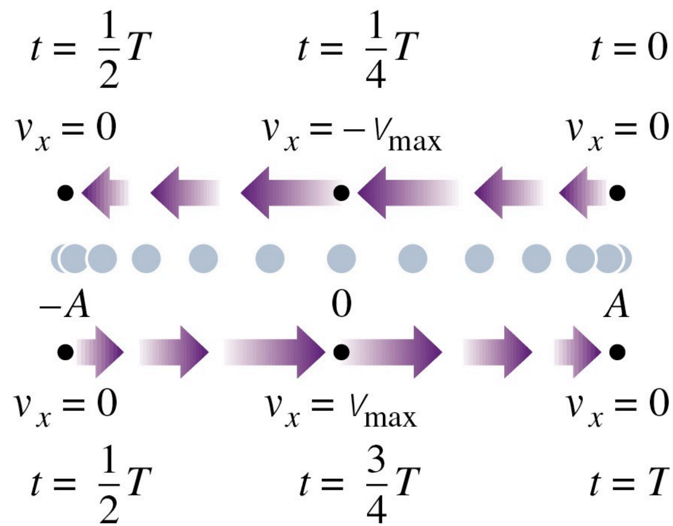
MHS – LA VITESSE

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_{max}\cos(\omega t+\phi)\right) = -x_{max}\,\omega\sin(\omega t+\phi)$$

$$v = -x_{max}\,\omega\,\sin(\omega t+\phi)$$

$v=0$ pour x_{max} max pour $x=0$



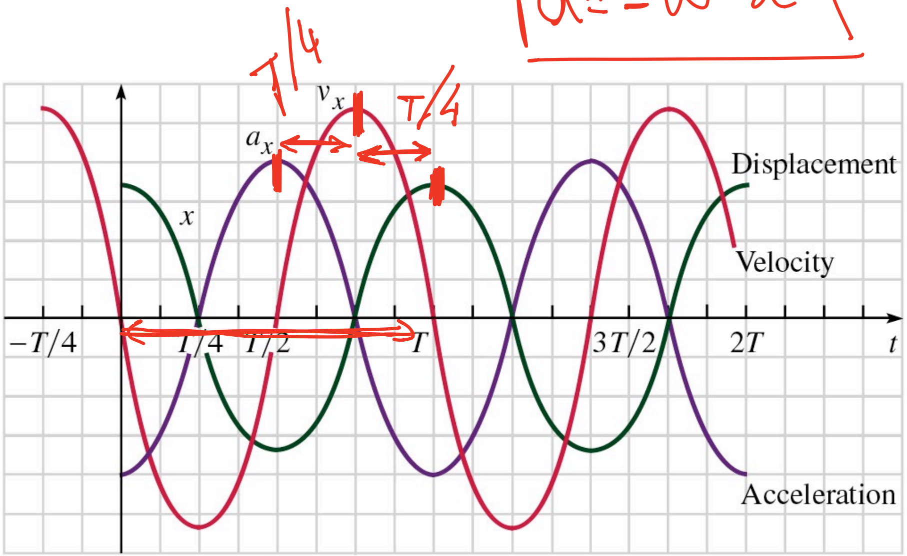


MHS – L’ACCÉLÉRATION

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-x_m \omega \cdot \sin(\omega t + \phi)\right) = -x_{max}\,\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 \underbrace{x_{max} \cos(\omega t + \phi)}_{x(t)}$$

$$\boxed{a = -\omega^2 x}$$



MHS – FORCE ASSOCIÉE

Une particule de masse *m* soumise à une force de rappel proportionnelle à son déplacement suit un mouvement harmonique simple.

$$F = ma$$

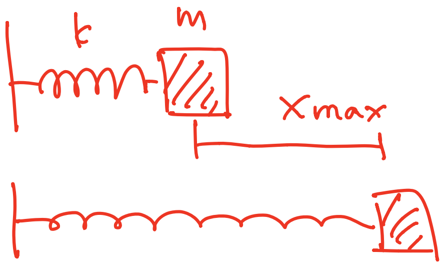
$$a = -\omega^2 x$$

$$F = -\underbrace{m\omega^2}\, x$$

$$\boxed{F = -kx}$$

Force de rappel.

MHS EXEMPLE – LE RESSORT



$$\left.\begin{array}{l} F = -kx \\ F = ma \end{array}\right\} \Rightarrow ma = -kx \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow x = A\cos(\omega t + \phi)$$ Solution

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad A = ? \qquad \phi = ?$$

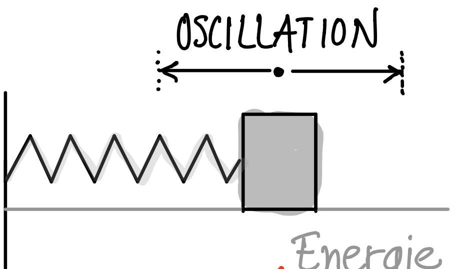
$$\boxed{\begin{array}{l} x(t=0) = x_{max} \\ v(t=0) = 0 \end{array}}$$

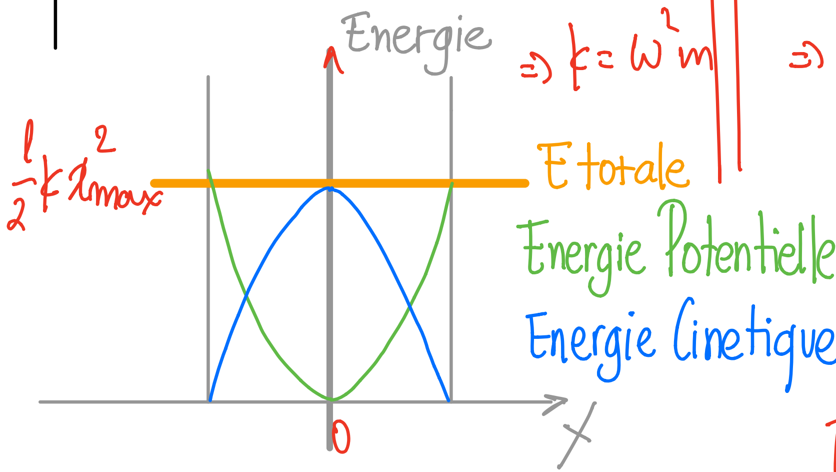
$$x(t=0) = A\cos(\phi) = x_{max} \qquad A = x_{max}$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\phi) = 0 \qquad \phi = 0$$

$$x = x_{max}\cos(\omega t) \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

MHS - ÉNERGIE





$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k x_{max}^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{CIN} = \frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k} x_{max}^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

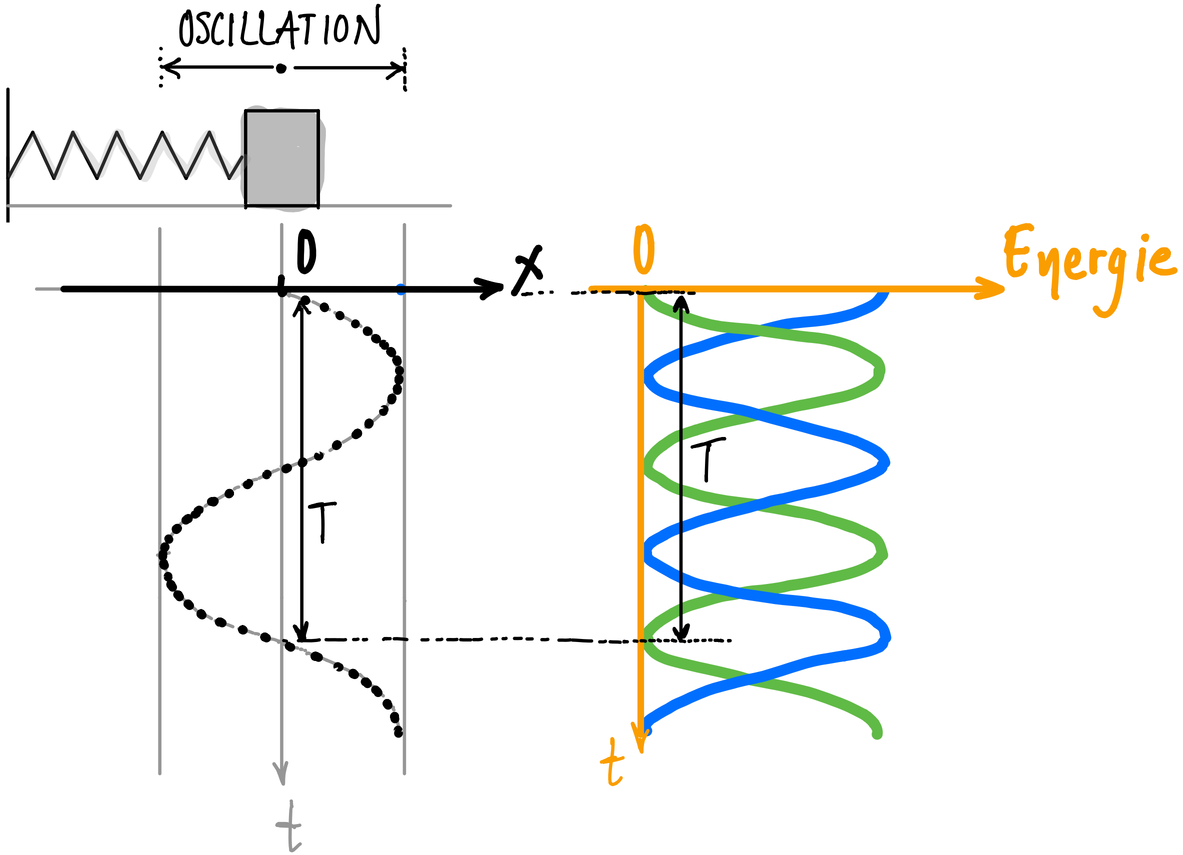
$$v = -x_{max}\,\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

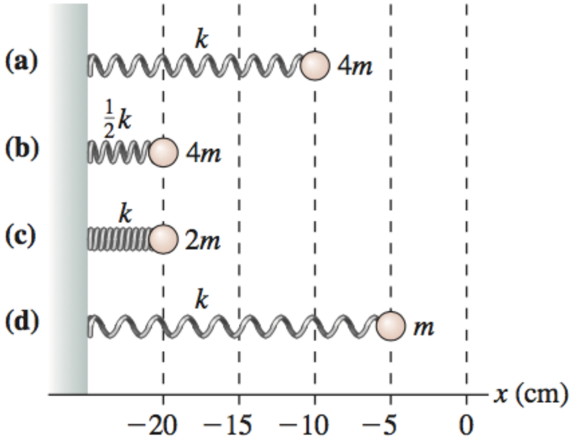
$$\Rightarrow E_{CIN} = \frac{1}{2}k x_{max}^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{TOT} = E_p + E_{CIN} = \frac{1}{2}k x_{max}^2$$

MHS - ÉNERGIE



QUESTION



Les quatres ressorts sur la figure sont comprimés depuis leur position d'équilibre x=0. Quelle relation est vraie pour la vitesse maximale de leur mouvement, après avoir été lâchés?

(a) c > b > a > d

(b) d > a > b = c

(c) b = a > c > d

(d) c > b > a = d

MHS EXEMPLE – CHARIOT ET RESSORT

Le chariot ci-contre a une masse de 1.0 kg. On le déplace de 5.0 cm vers la droite avec une force horizontale de 10.0 N, puis on le lâche.

a) Quelle est la période d'oscillation de ce chariot en l'absence de frottement ?

b) Quelle est la position du chariot 0.20s après le lâché.

c) Que devient la constante d'élasticité si on supprime un des deux ressorts ?

d) Quelle sera alors la fréquence d'oscillation du système ?

$$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{10\,N}{0{,}05\,m} = 200\ N/m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x(t) = x_{max}\cos(\omega t)\ ;\quad x(t = 0{,}20\,s)$$

$$f = 1/T$$

$$k' = \frac{k}{2} \qquad f' = \frac{f}{\sqrt{2}}$$