ÉLASTICITÉ ET OSCILLATIONS

PGC-08

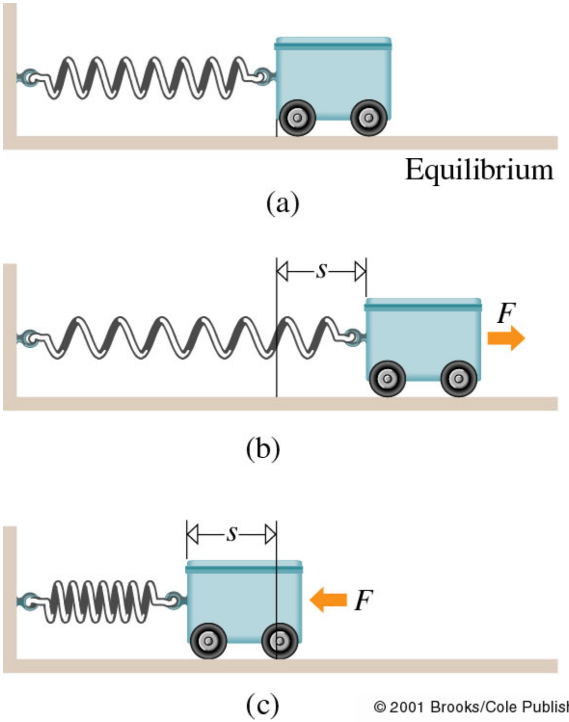
L'ÉLASTICITÉ

L'élasticité étudie le comportement de matériaux et de structures sous contraintes. Un solide soumis à une force extérieure (contrainte) peut être comprimé, étiré ou cisaillé.

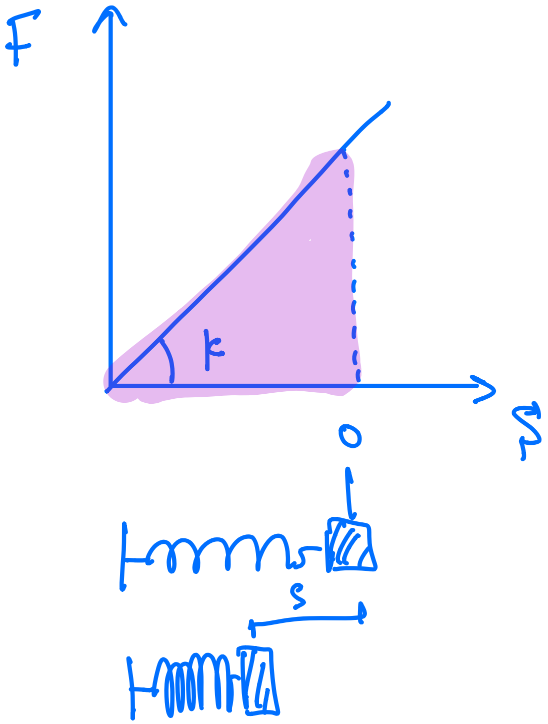
$F = k \cdot s$

k : constante

s : deformation



ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE



$$F = k \cdot s$$

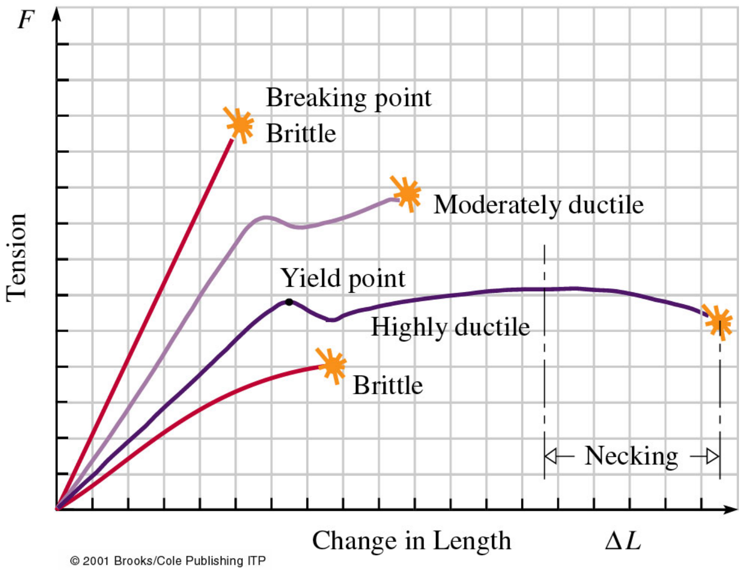
$$W = \int_0^s F\,ds = \Delta E_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \int_0^s k s\,ds = \frac{1}{2} k s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2} k s^2}$$

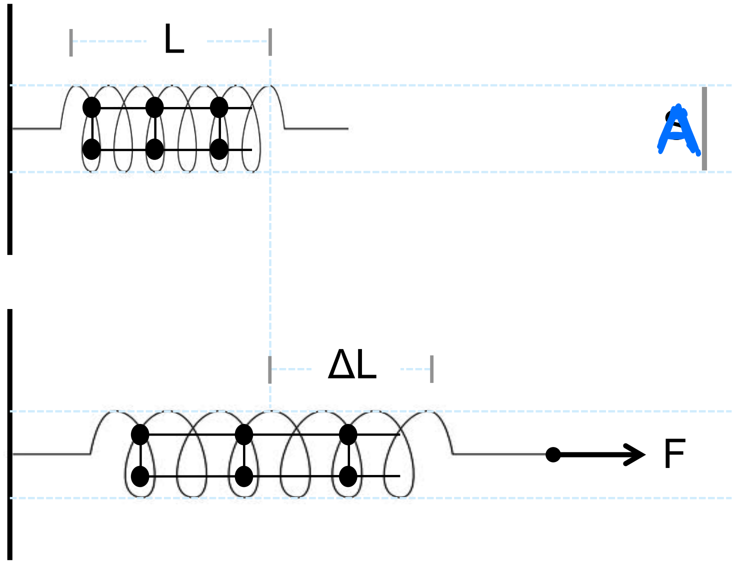
MATÉRIAUX ÉLASTIQUES

Courbes de traction



CONTRAINTE ET DÉFORMATION

$\sigma = \frac{F}{A}$ $\quad \frac{N}{m^2}$ (P)



$\downarrow$

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow F = \frac{SY}{L} \cdot \Delta L \quad (\rightsquigarrow F = k\,S)$

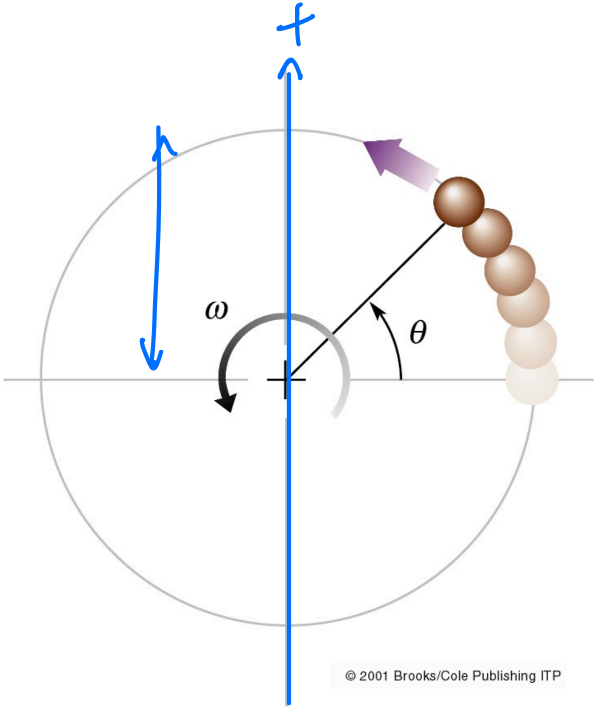
LES OSCILLATIONS

LE MOUVEMENT PÉRIODIQUE

T

$f \qquad f = 1/T$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



LE MOUVEMENT SINUSOÏDAL

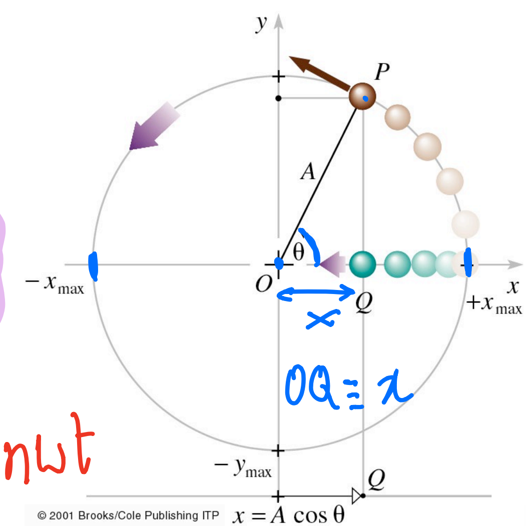
$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \cos\theta \\ A = |x_{max}| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_{max} \cdot \cos\theta \\ \theta = \omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = x_{max} \cos \omega t}$$

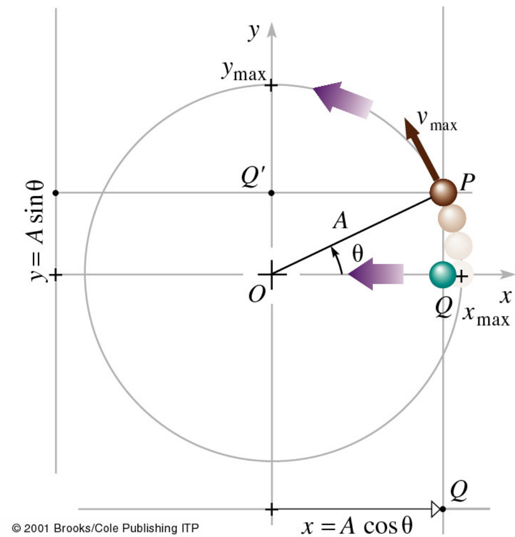
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$x = x_{max} \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$= x_{max} \cos 2\pi f t$$

$$y = y_{max} \sin \omega t = A \sin \omega t$$





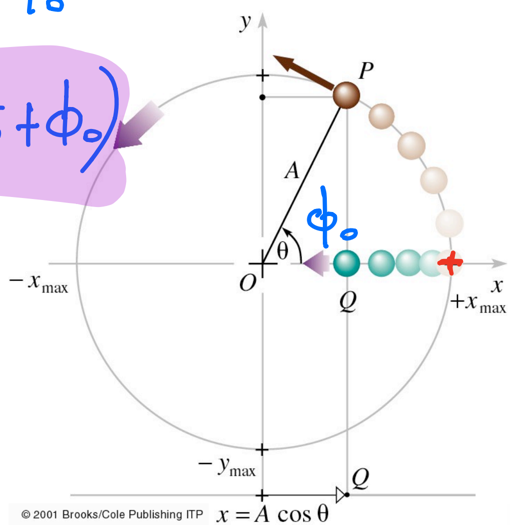
LE MOUVEMENT SINUSOÏDAL

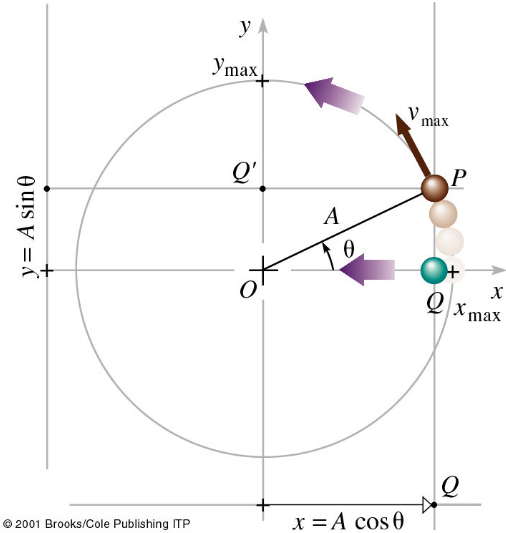
Et si t=0 quand θ > 0?

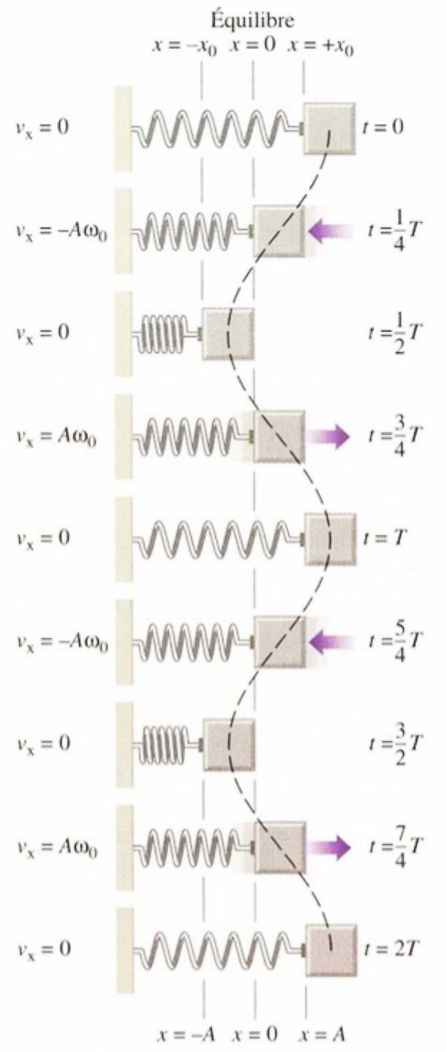
$\theta : \phi_0$

$$x(t=0) = x_{max} \cos \phi_0$$

$$x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \phi_0)$$

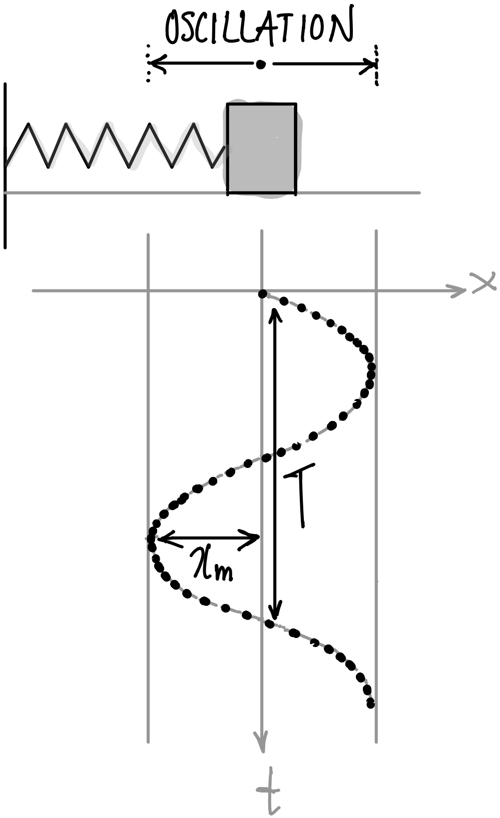






Équilibre
$x = -x_0$ $x = 0$ $x = +x_0$
$v_x = 0$ $t = 0$
$v_x = -A\omega_0$ $t = \frac{1}{4}T$
$v_x = 0$ $t = \frac{1}{2}T$
$v_x = A\omega_0$ $t = \frac{3}{4}T$
$v_x = 0$ $t = T$
$v_x = -A\omega_0$ $t = \frac{5}{4}T$
$v_x = 0$ $t = \frac{3}{2}T$
$v_x = A\omega_0$ $t = \frac{7}{4}T$
$v_x = 0$ $t = 2T$
$x = -A$ $x = 0$ $x = A$

LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

x_m : amplitude

$\omega t + \phi$: phase du mouvement

ϕ : phase initiale

ω : frequence angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (rad/s)$$

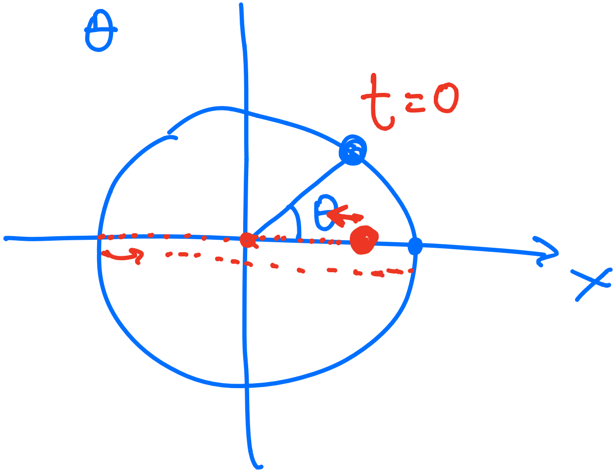
QUESTION

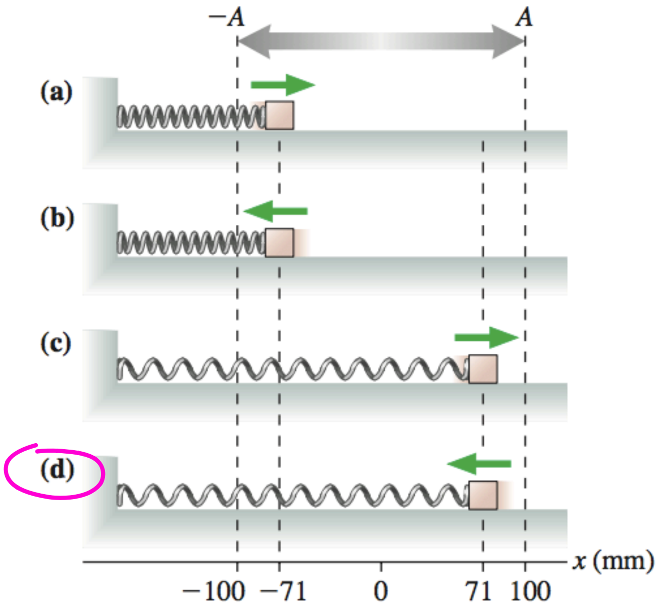
$$x = x_{max} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

100 mm

La figure montre quatre oscillations à t = 0 s. La quelle a une phase initiale de π/4 rad?

θ





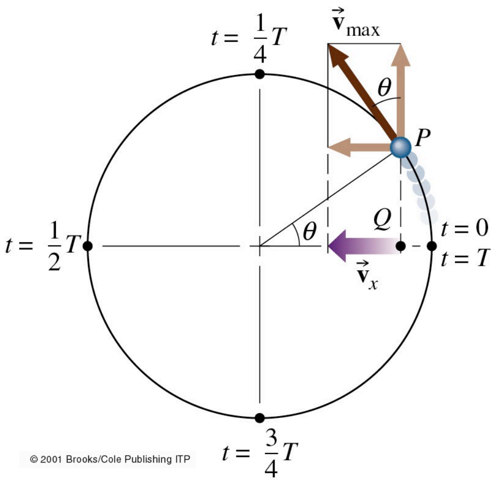
MHS – LA VITESSE

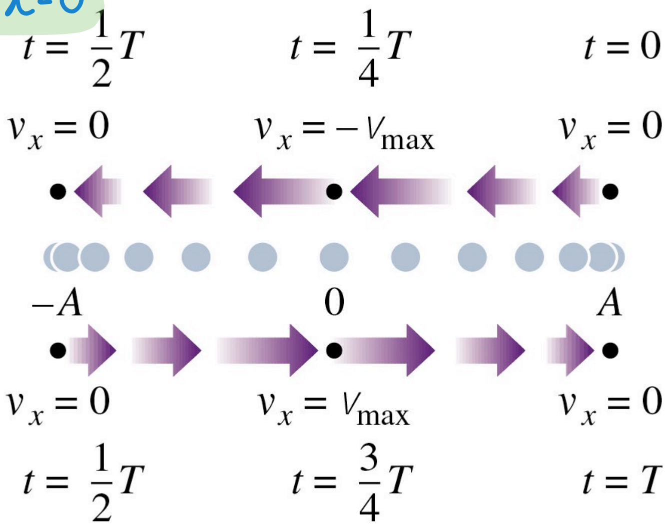
$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(x_{max}\cdot\cos(\omega t+\phi)\Big) = -\,\underbrace{x_{max}\cdot\omega}_{V}\cdot\sin(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow v = -V_{max}\,\sin(\omega t+\phi)$$

* En avance de T/4 par rapport à x
* $v=0$ pour x_{max} et max pour $x=0$





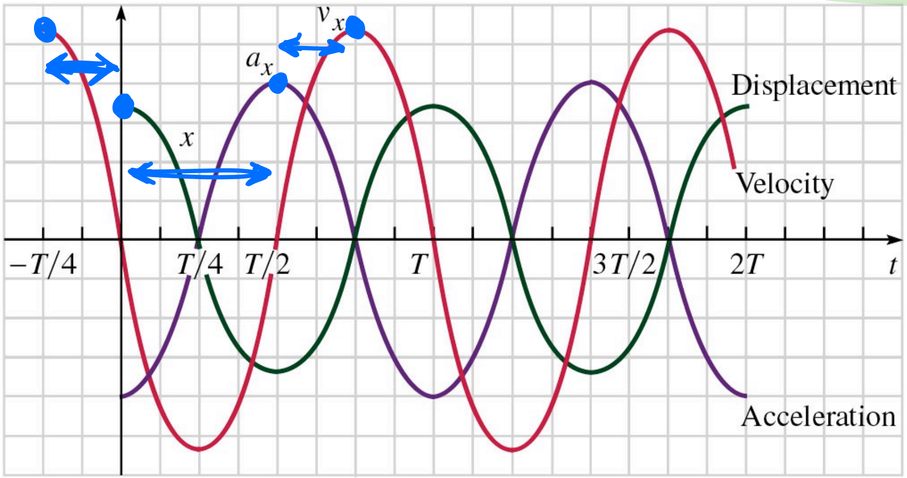
MHS – L'ACCÉLÉRATION

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-x_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \phi)\right) = -x_m \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$$

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\omega^2 x}$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$



MHS – FORCE ASSOCIÉE

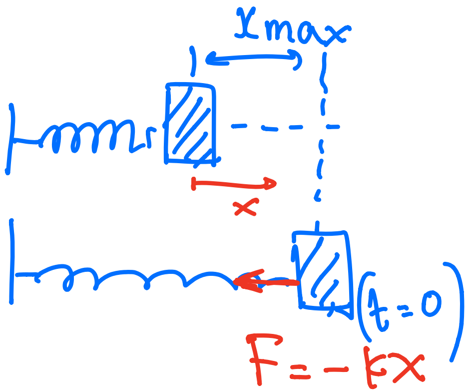
Une particule de masse *m* soumise à une force de rappel proportionnelle à son déplacement suit un mouvement harmonique simple.

$$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ \boxed{a = -\omega^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow F = -m\omega^2 x$$

$$F = -kx$$

Force de RAPPEL!
(Interne au système)

MHS EXEMPLE – LE RESSORT



$$\left.\begin{array}{l} F=-kx \\ F=ma=m\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{array}\right\} \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \quad (1)$$

On peut prouver que la (2) est une solution pour (1) (à faire à la maison!)

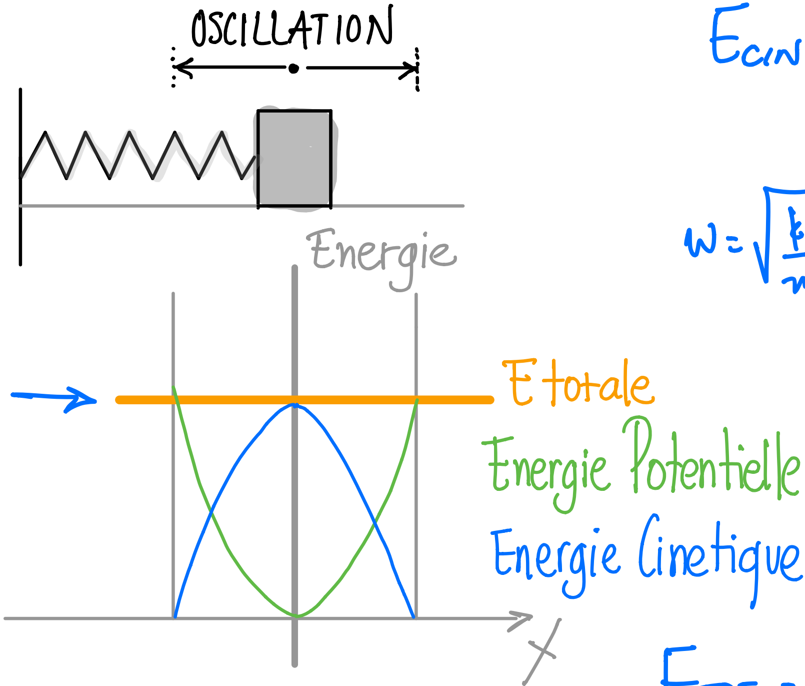
$$x=A\cdot\cos(\omega t+\phi) \quad (2)$$ avec: $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Pour $t=0$: Cond. Initiales (*)

$$\left\| \begin{array}{l} x(t=0)=x_{max} \Rightarrow A\cos\phi = x_{max} \\ v(t=0)=0 \Rightarrow -A\omega\sin\phi=0 \Rightarrow \phi=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_{max}=A$$

$$(*) \quad x=x_{max}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

MHS - ÉNERGIE



$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \boxed{\frac{1}{2}kx_m^2}\cos^2(\omega t+\phi)$$

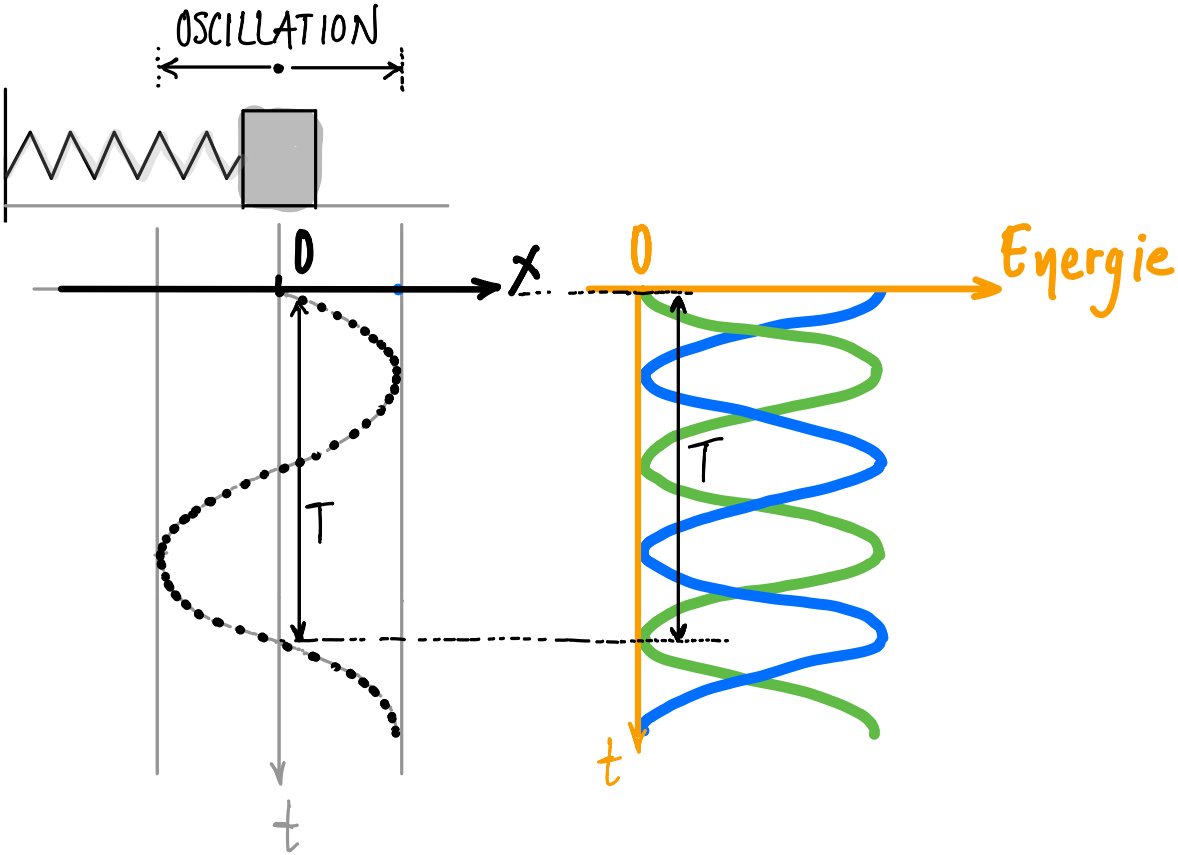
$$E_{CIN} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t+\phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

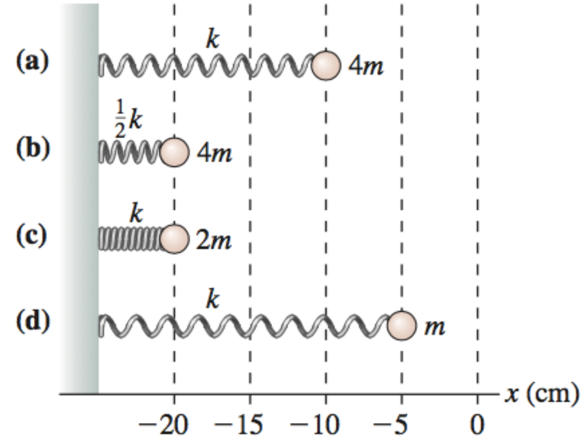
$$= \boxed{\frac{1}{2}kx_m^2}\sin^2(\omega t+\phi)$$

$$E_{TOT} = E_p + E_{CIN} = \boxed{\frac{1}{2}kx_m^2}$$

MHS - ÉNERGIE



QUESTION



Les quatres ressorts sur la figure sont comprimés depuis leur position d'équilibre x=0. Quelle relation est vraie pour la vitesse maximale de leur mouvement, après avoir été lâchés?

(a) c > b > a > d

(b) d > a > b = c

(c) b = a > c > d

(d) c > b > a = d

Faire à la maison
pour la prochaine fois

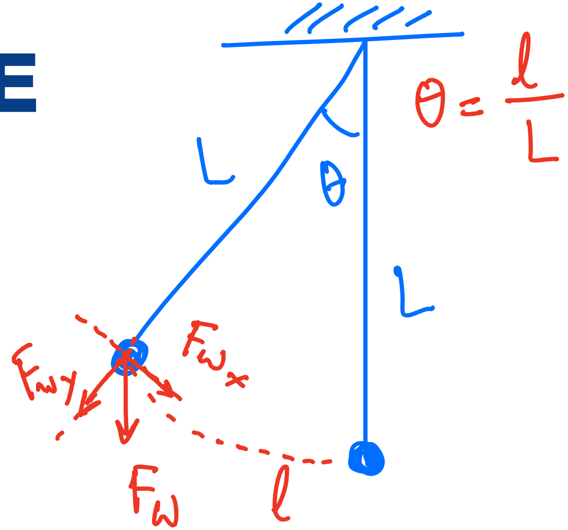
MHS EXEMPLE – LE PENDULE SIMPLE

$$F = -mg\sin\theta$$

petit θ : $\sin\theta \simeq \theta$

$$\theta = \frac{l}{L}$$

$$\Rightarrow F = -mg\frac{l}{L}$$



$$\Rightarrow F = -m\frac{g}{L}\cdot l \quad (\rightarrow F = -k\,l)$$

$$\left(k = \frac{mg}{L}\right)$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

QUESTION

Un adulte et un enfant sont sur des balançoires identiques placées à côté l'une de l'autre. Comparé à l'enfant, le mouvement de l'adulte a

(a) une période beaucoup plus grande,

(b) une fréquence beaucoup plus grande,

(c) la même période,

(d) la même amplitude,

(e) aucune de ces réponses.

LE PENDULE PHYSIQUE – POUR INFO

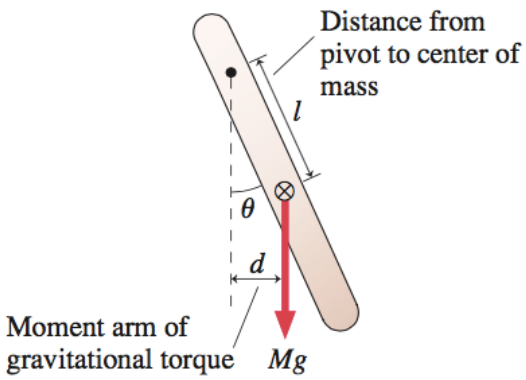
Un pendule physique est un corps solide, libre d'osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal. Le moment de force du poids par rapport à O est :

$$\tau = -(mg)(h\sin\theta)$$

Le signe − indique que le moment de force tend toujours à réduire l'angle θ à 0. La 2ème loi de Newton appliquée au mouvement de rotation $\sum\tau = I\alpha$ donne :

$$-mgh\sin\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

FIGURE 14.22 A physical pendulum.



Pour de petits déplacements, $\sin\theta \approx \theta$: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgh}{I}\theta = 0$

C = centre de masse

On retrouve l'équation d'un MHS : $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

	Pendule simple (θ petit) :	Pendule physique (θ petit) :
fréquence angulaire	$\omega = \sqrt{g/L}$	$\omega = \sqrt{mgh/I}$
période	$T = 2\pi\sqrt{L/g}$	$T = 2\pi\sqrt{I/mgh}$