ÉLASTICITÉ ET OSCILLATIONS

PGC-08

L'ÉLASTICITÉ

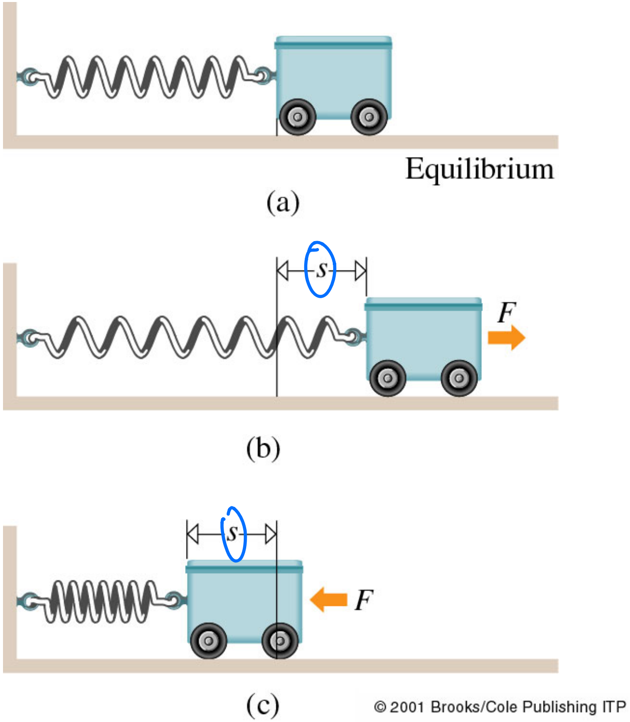
L'élasticité étudie le comportement de matériaux et de structures sous contraintes. Un solide soumis à une force extérieure (contrainte) peut être comprimé, étiré ou cisaillé.

$$F = k \cdot s$$

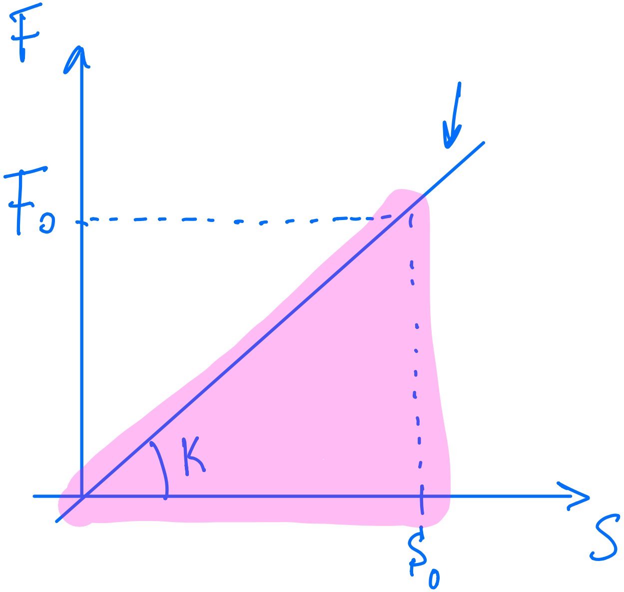
k : const. d'elasticité

$$[k] = \frac{N}{m}$$

s : deformation



ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE



$F = K \cdot S$

$$W = \int_0^{S_0} F\,ds = \int_0^{S_0} KS\,ds \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} K S_0^2$$

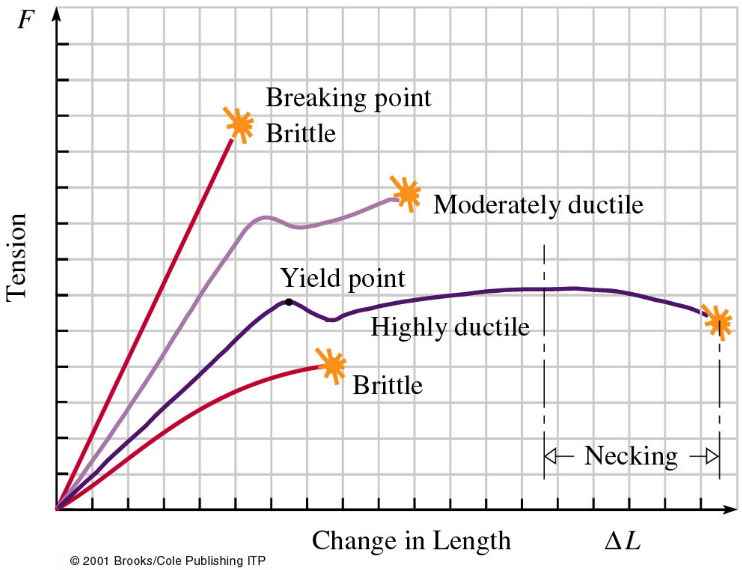
$$W = \Delta E$$

$$A = \frac{1}{2} S_0 \cdot F_0 = \frac{1}{2} S_0 \cdot KS_0 = \frac{1}{2} KS_0^2$$

$$E_{pEL} = \frac{1}{2} KS^2$$

MATÉRIAUX ÉLASTIQUES

Courbes de traction

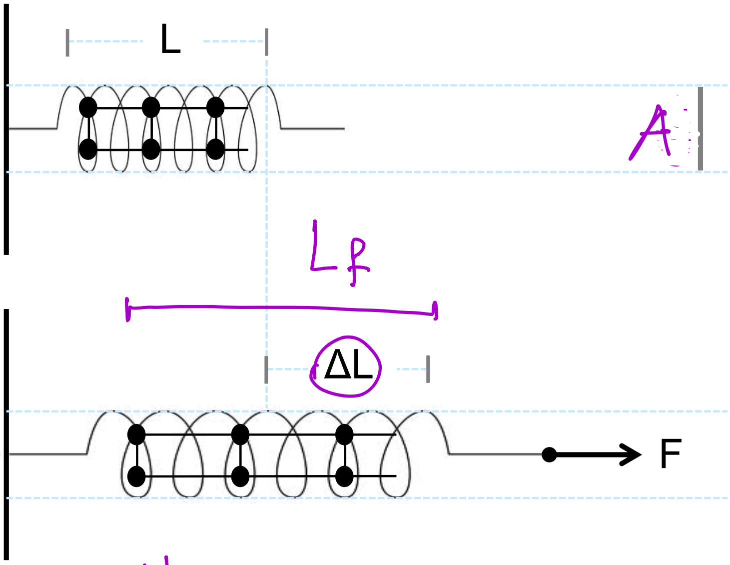


CONTRAINTE ET DÉFORMATION

Hook

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$[\sigma] = \frac{N}{m^2} \qquad [P]$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\rightarrow F = K \cdot \Delta L \leftarrow$$

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{A} \cdot \frac{L}{\Delta L} \Rightarrow F = \frac{A \cdot Y}{L} \cdot \Delta L$$

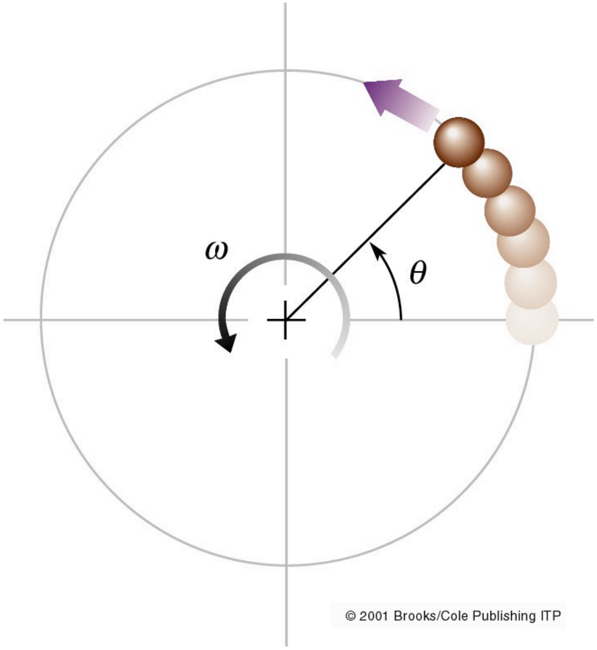
LES OSCILLATIONS

LE MOUVEMENT PÉRIODIQUE

- T $\qquad [T] = s$

- $f = 1/T$ $\qquad [f] = 1/s = Hz$

- $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $\qquad [\omega] = \dfrac{rad}{s}$



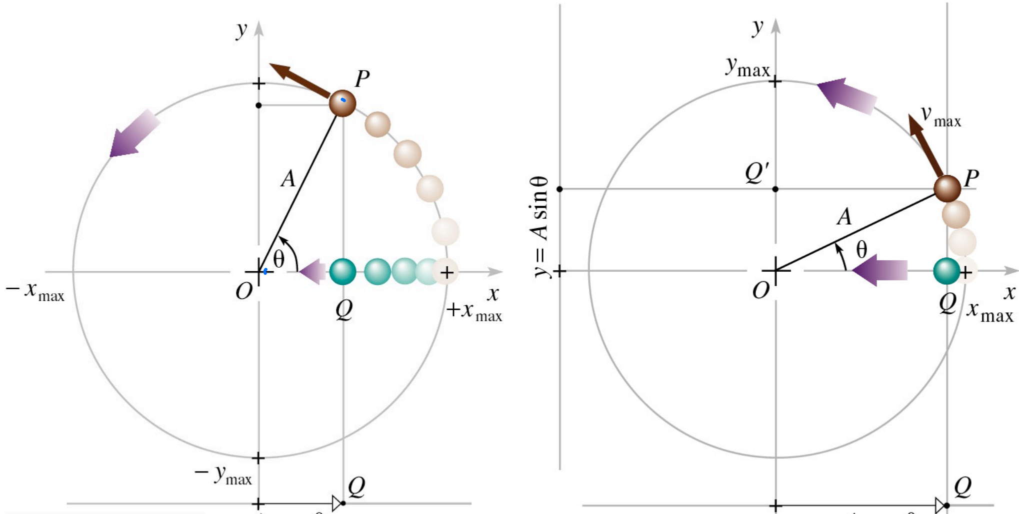
LE MOUVEMENT SINUSOÏDAL

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \cos\theta \\ A = x_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = x_{max}\cos\theta \\ \theta = \omega t \end{array}\right\} \Rightarrow x = x_{max}\cos\omega t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$x = x_{max}\cos\omega t$$
$$= x_{max}\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$= x_{max}\cos 2\pi f t$$

$$y = y_{max}\sin\omega t$$



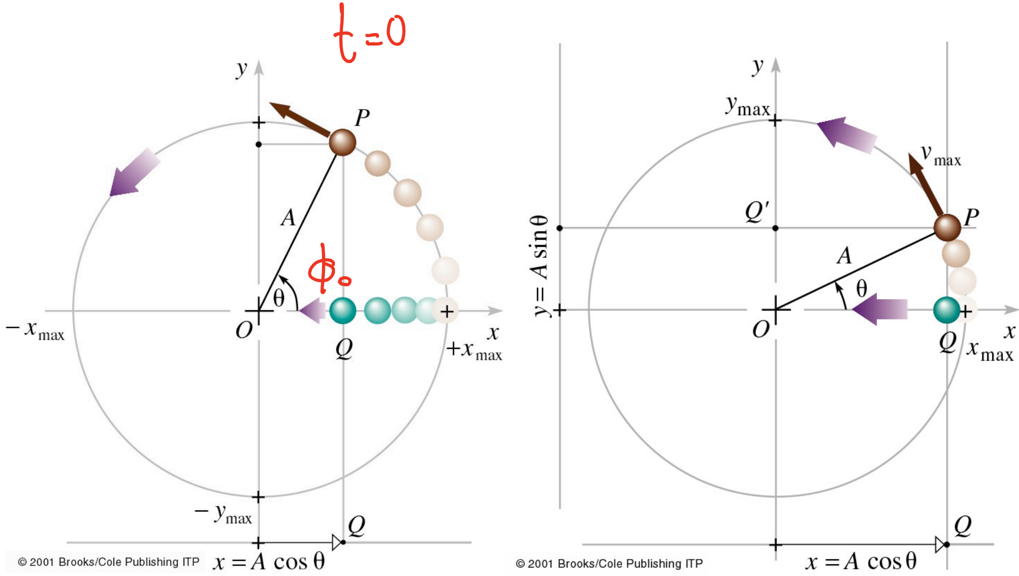
LE MOUVEMENT SINUSOÏDAL

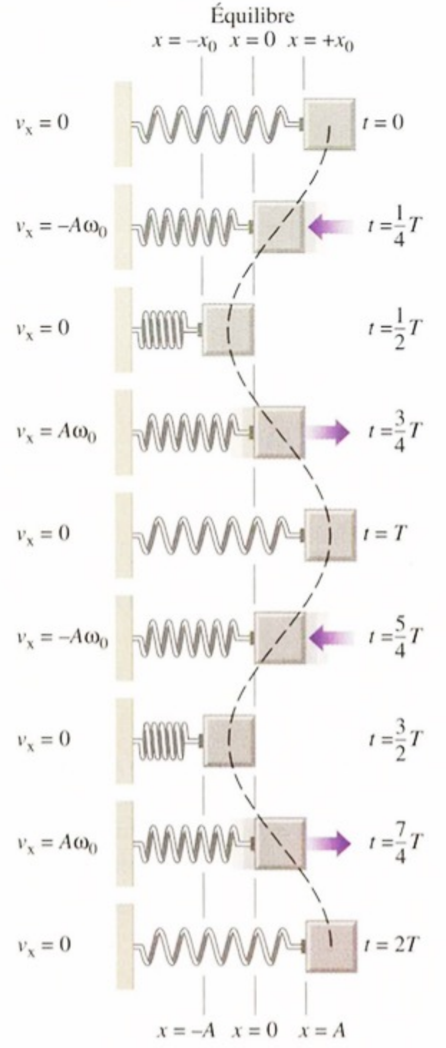
Et si t=0 quand θ > 0?

$\theta_i = \phi_0$

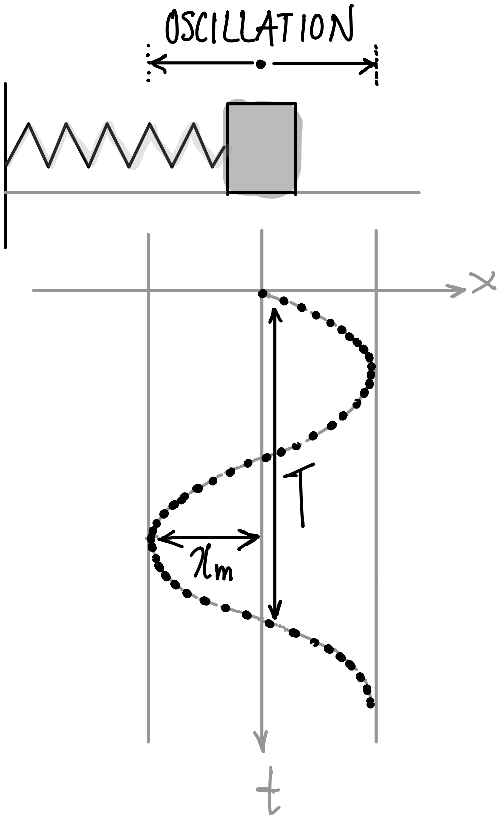
$$x(t=0) = X_{max} \cos\phi_0$$

$$X = X_{max} \cos(\omega t + \phi_0)$$




Équilibre
$x = -x_0$ $x = 0$ $x = +x_0$
$v_x = 0$
$t = 0$
$v_x = -A\omega_0$
$t = \frac{1}{4}T$
$v_x = 0$
$t = \frac{1}{2}T$
$v_x = A\omega_0$
$t = \frac{3}{4}T$
$v_x = 0$
$t = T$
$v_x = -A\omega_0$
$t = \frac{5}{4}T$
$v_x = 0$
$t = \frac{3}{2}T$
$v_x = A\omega_0$
$t = \frac{7}{4}T$
$v_x = 0$
$t = 2T$
$x = -A$ $x = 0$ $x = A$

LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

x_m : amplitude

$\omega t + \phi$: phase du mouvement

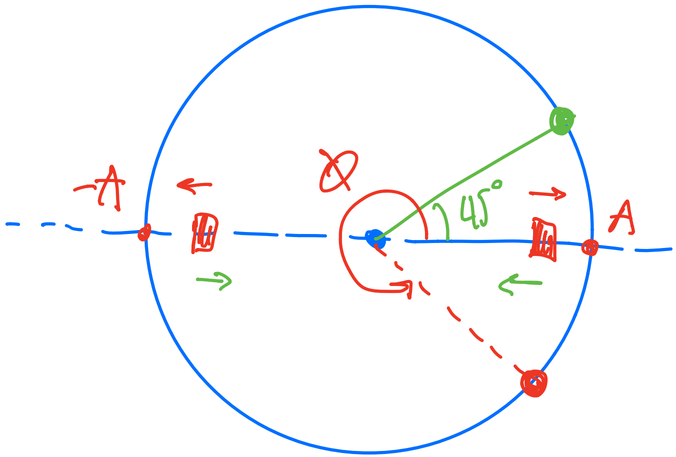
ϕ : phase initiale

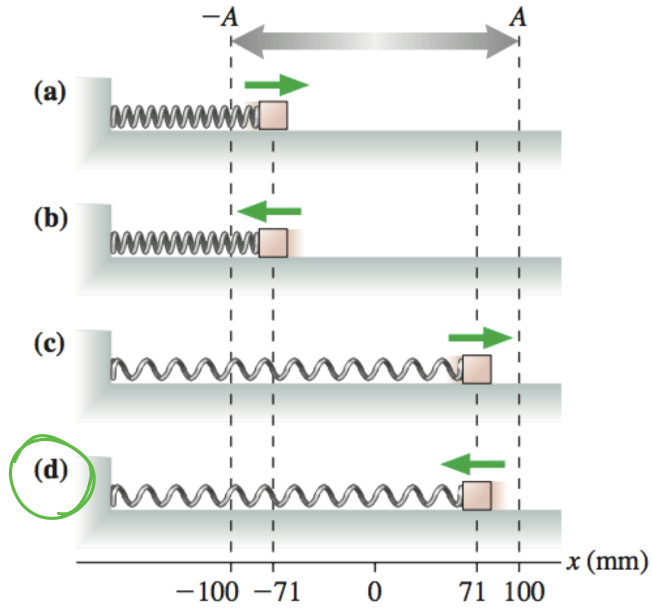
ω : frequence angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (rad/s)$$

QUESTION

La figure montre quatre oscillations à t = 0 s. La quelle a une phase initiale de π/4 rad?





$$\frac{d\cos t}{dt} = -\sin t$$

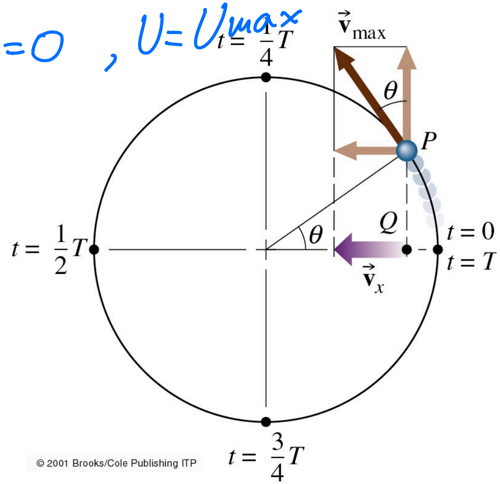
MHS – LA VITESSE

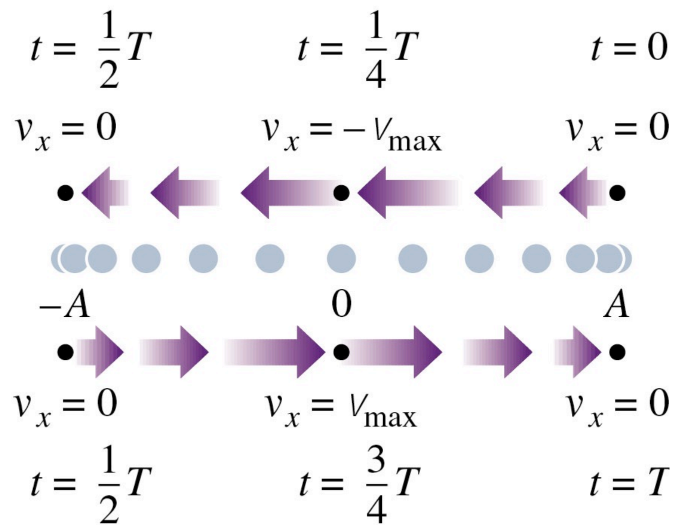
$$\boxed{x} = x_{max}\cos(\omega t+\phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_{max}\cos(\omega t+\phi)\right) = -x_{max}\cdot\omega\cdot\sin(\omega t+\phi) \Rightarrow$$

$$\boxed{v} = -x_{max}\,\omega\,\sin(\omega t+\phi)$$

- $v=0$ pour x_{max}
- $x=0$, $v=v_{max}$

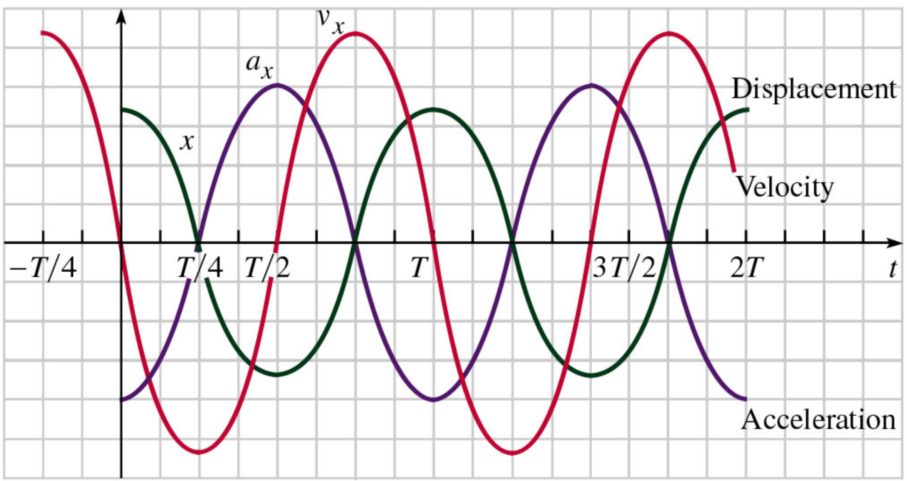




MHS – L'ACCÉLÉRATION

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-x_{max}\,\omega\,\sin(\omega t+\phi)\right) = \underbrace{-x_{max}\,\omega^2}\cos(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow \quad a = -\omega^2 x$$



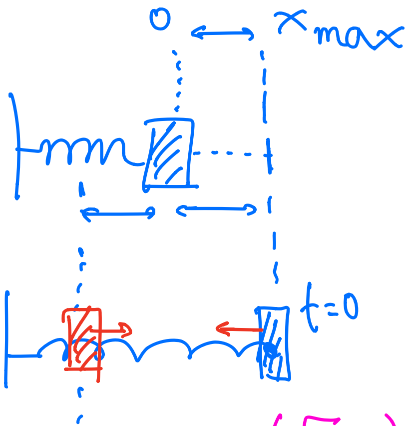
MHS – FORCE ASSOCIÉE

Une particule de masse *m* soumise à une force de rappel proportionnelle à son déplacement suit un mouvement harmonique simple.

$$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow F = -m\omega^2 x$$

$$\underbrace{F = -Kx}_{\text{Force de Rappel}}$$

MHS EXEMPLE – LE RESSORT



$$\left.\begin{array}{l} F = -kx \\ F = ma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ma = -kx \\ a = \dfrac{d^2x}{dt^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x} \quad (1)$$

(*) $x = x_{max} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \phi)} \quad (2)$$

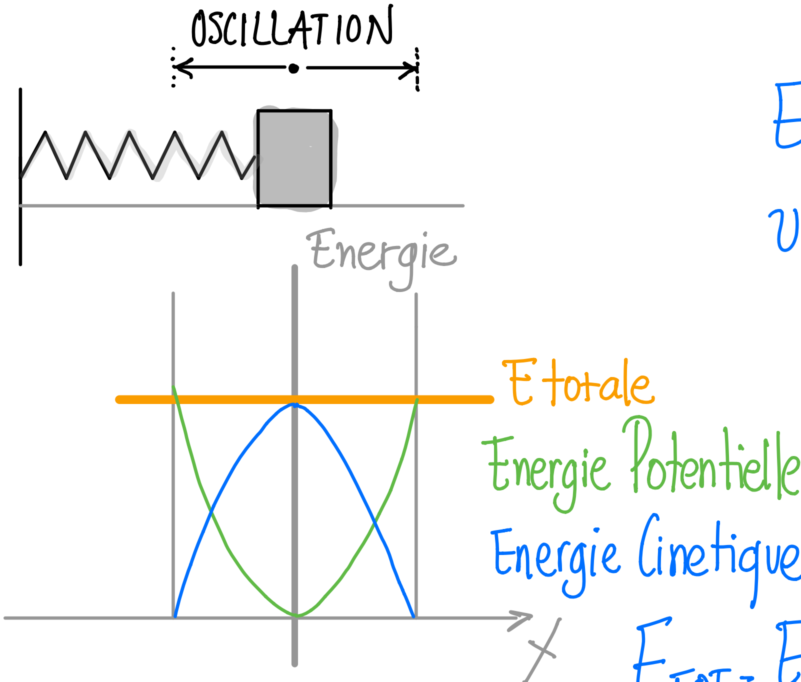
si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (*)

Pour $t=0$

$x(t=0) = x_{max} = A\cos\phi$ $\Rightarrow$ $x_{max} = A$ (*)

$v(t=0) = 0 = -A\omega\sin\phi \Rightarrow \phi = 0$ (*)

MHS - ÉNERGIE



$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)}$$

$$E_{CIN} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = -x_m \omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow E_{CIN} = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\ldots)$$

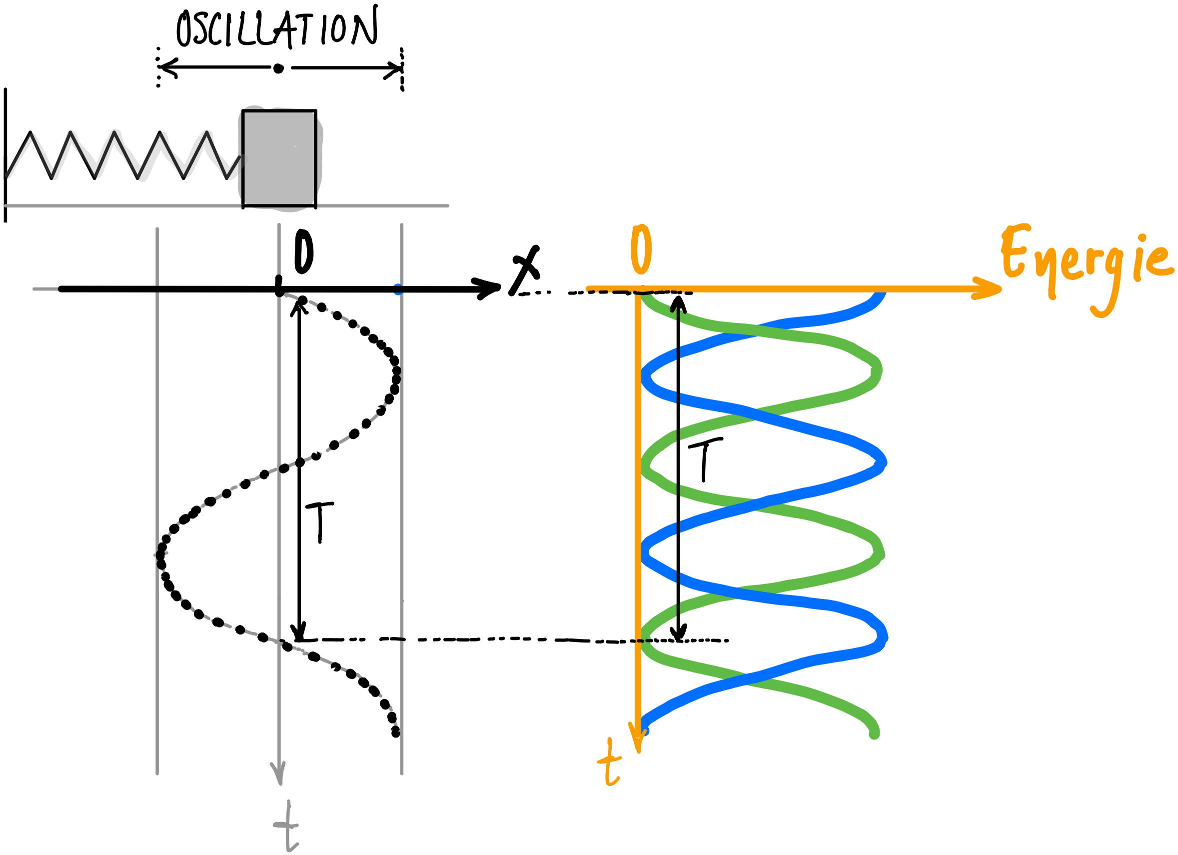
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m\omega^2 = k$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{CIN} = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)}$$

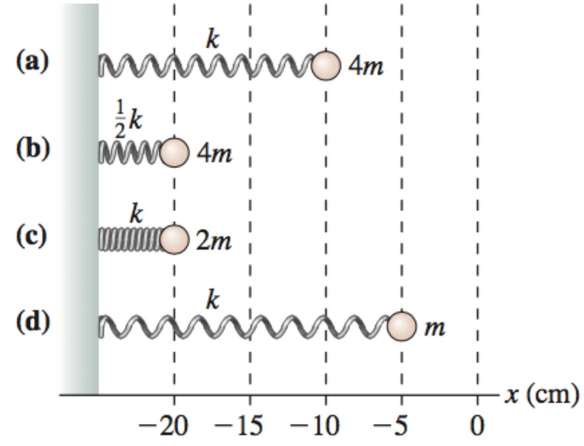
$$E_{TOT} = E_p + E_{CIN} = \frac{1}{2} k x_m^2 \left[\cancelto{1}{\cos^2(\ldots) + \sin^2(\ldots)}\right]$$

$$\Rightarrow E_{TOT} = \frac{1}{2} k x_m^2$$

MHS - ÉNERGIE



QUESTION



Les quatres ressorts sur la figure sont comprimés depuis leur position d'équilibre x=0. Quelle relation est vraie pour la vitesse maximale de leur mouvement, après avoir été lâchés?

(a) c > b > a > d

(b) d > a > b = c

(c) b = a > c > d

(d) c > b > a = d

À la maison !

MHS EXEMPLE –
LE PENDULE SIMPLE

QUESTION

Un adulte et un enfant sont sur des balançoires identiques placées à côté l'une de l'autre. Comparé à l'enfant, le mouvement de l'adulte a

(a) une période beaucoup plus grande,

(b) une fréquence beaucoup plus grande,

(c) la même période,

(d) la même amplitude,

(e) aucune de ces réponses.

LE PENDULE PHYSIQUE – POUR INFO

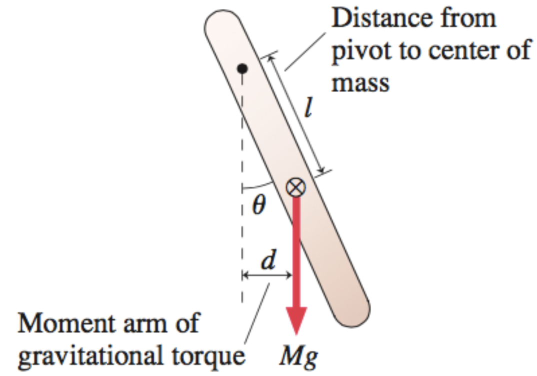
Un pendule physique est un corps solide, libre d'osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal. Le moment de force du poids par rapport à O est :

$$\tau = -(mg)(h\sin\theta)$$

Le signe − indique que le moment de force tend toujours à réduire l'angle □ à 0. La 2ème loi de Newton appliquée au mouvement de rotation $\sum\tau = I\alpha$ donne :

$$-mgh\sin\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

FIGURE 14.22 A physical pendulum.



Pour de petits déplacements, sin□ ≈ □ : $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgh}{I}\theta = 0$

C = centre de masse

On retrouve l'équation d'un MHS : $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

	Pendule simple (□petit) :	**Pendule physique (□petit) :**
fréquence angulaire	$\omega = \sqrt{g/L}$	$\omega = \sqrt{mgh/I}$
période	$T = 2\pi\sqrt{L/g}$	$T = 2\pi\sqrt{I/mgh}$