RAPIN Divic

TRANSPORT DE FAISCEAUX DE PROTONS POLARISES

APPLICATION: ETUDE DES FAISCEAUX SECONDAIRES DU S.I.N.

Divic RAPIN

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE NUCLEAIRE ET CORPUSCULAIRE

DE L'UNIVERSITE DE GENEVE

32, Boulevard d'Yvoy CH-1211 Genève 4

TRANSPORT DE FAISCEAUX DE PROTONS POLARISES

APPLICATION: ETUDE DES FAISCEAUX SECONDAIRES DU S.I.N.

Divic RAPIN

Travail de diplôme mai 1972

Je tiens à remercier ceux qui ont rendu possible cette étude:

M. le Prof. R. Hess, qui m'a proposé ce travail, ainsi que MM. J.-C. Niklès et D.W. Werren, pour leur aide, leurs encouragements et les nombreuses discussions qui ont permis d'éclaircir un grand nombre d'idées et de notions.

M. G. Guignard du S.I.N. pour ses conseils et suggestions lors de l'étude des faisceaux du S.I.N.

M. P. Skarek du MSC CERN pour ses indications et conseils sur l'optique et les programmes de calcul.

TABLE DES MATIERES

		Pages
Chap. I	TRANSPORT DE FAISCEAUX	1
1.1	Equation de base et moyens de guidage	1
1.2	Formalisme et approximations utilisés	2
1.3	Eléments optiques utilisés	6
1.3.1	Longueur libre	6
1.3.2	Quadrupôles	6
1.3.3	Aimants de déflexion	8
1.3.4	Solénoïdes	10
Chap. II	COMPORTEMENT DU SPIN DANS UN SYSTEME DE TRANSPORT DEPOLARISATION	11
2.1	Equation du spin	11
2.2	Matrices de transfert pour le spin	12
2.2.1	Longueur libre	12
2.2.2	Quadrupôle	13
2.2.3	Aimant de déflexion	15
2.2.4	Solénoïde	21
2.3	Utilisation proposée	24
Chap. III	APPLICATION AUX FAISCEAUX SECONDAIRES DE PROTONS POLARISES DU S.I.N.	25
3.1	Dégradeurs	26
3.2	Transport sans déflexion finale	28
3.3	Transport avec déflexion finale	29
3.3.1	Disposition des éléments et contraintes	29
3.3.2	Faisceaux dégradés à 400 MeV	30
3.3.3	Faisceaux non dégradés	33
3.3.4	Remarques	34
REFERENCES:		36
APPENDICES:	A) Résolution de l'équation différentielle du spin dans le solénoïde	A1
	B) Calcul de la matrice de transfert du spin dans un aimant de secteur	B1
	C) Programmes utilisés	C1

Chapitre 1 TRANSPORT DE FAISCEAUX

En physique corpusculaire, les zones expérimentales se trouvent généralement à plusieurs dizaines de mètres de l'accélérateur. Il est donc nécessaire de canaliser les particules jusqu'à l'endroit désiré. Ce premier chapitre expose succintement quelques moyens pour réaliser cet objectif et quelques principes qui régissent l'optique des faisceaux de particules chargées.

Les ouvrages [1] et [2] donnent un aperçu complet de ces techniques.

1.1 EQUATION DE BASE ET MOYENS DE GUIDAGE

Les moyens dont nous disposons pour modifier le mouvement de particules chargées, sont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, dont l'effet est décrit par la formule de Lorentz :

(1.1) $$\dot{\vec{p}} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$ (unités de Gauss)

On peut se convaincre facilement qu'il est plus avantageux d'employer un champ magnétique plutôt qu'éléctrique. En effet, pour des particules relativistes ($v \cong c$), l'équation ci-dessus montre que l'effet d'un champ B de 1 kGauss équivaut à un champ E de 300 kV/cm.

Remarquons que pour des faisceaux de haute énergie, l'effet de la répulsion éléctrostatique entre les particules individuelles est négligeable. Soit un faisceau de 100 μA (ordre de grandeur du faisceau du SIN) et de 1 mm^2 de section. La distance moyenne entre les particules est de l'ordre de 10^{-2} cm, ce qui correspond à un champ E de 1.5 10^{-3} V/cm. En revanche, pour des faisceaux intenses à basse énérgie, cet effet peut devenir appréciable. [2]

L'interaction spin-champ magnétique inhomogène est négligeable pour l'optique comme l'indique l'exemple suivant :

Soient : - un gradient de champ $\frac{dB}{dx} = 10^3$ gauss/cm

- le moment magnétique du proton $\mu_p = 0.9\,10^{-11}$ eV/gauss

La force due à l'interaction spin-champ B sera :

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{d(\vec{\mu}_p \cdot \vec{B})}{dx} = \mu_p \frac{dB}{dx} \cong 10^{-8}\ eV/cm$$

Si le spin n'influence pas l'optique nous verrons en revanche, au chapitre II, que les champs magnétiques de guidage influencent la polarisation du faisceau.

Citons pour terminer ce paragraphe, le théorème de Liouville qui dit que la densité de points dans l'espace de phase reste constante sous l'action de forces conservatives. Le concept d'espace de phase utilisé pour l'optique de faisceau est légèrement différent de celui de la mécanique statistique. En effet on décrit un faisceau par un hypervolume contenant N points dans un espace à 6 dimensions et non par un seul point dans un espace à 6N dimensions. Le théorème de Liouville reste valable pour notre espace.

1.2 FORMALISME ET APPROXIMATIONS UTILISES

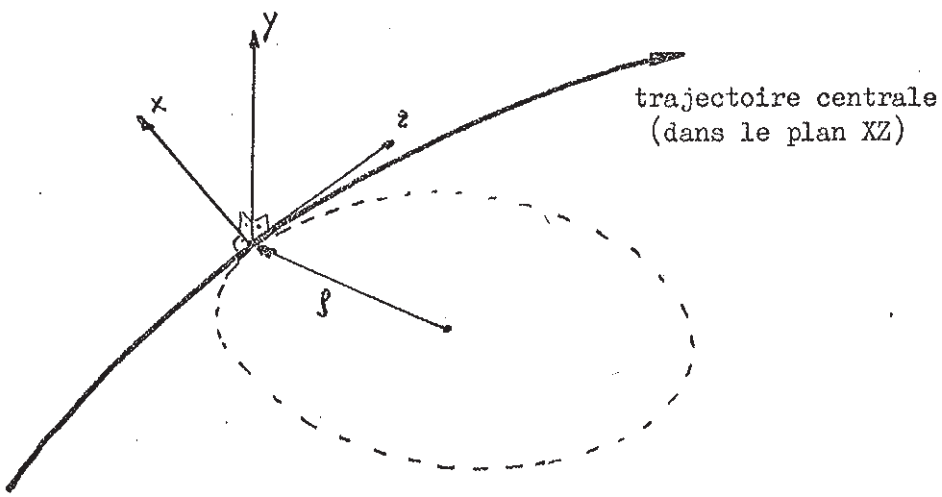
Nous utiliserons un système de coordonnées curvilignes dont l'axe Z suit la trajectoire centrale du faisceau (axe du faisceau). [3] et [4]

Soient : - ρ : rayon de courbure de la trajectoire centrale

- B_0 : champ sur l'axe du faisceau
- p : impulsion centrale du faisceau

On aura $h = \frac{1}{\rho} = \frac{eB_0}{p}$

Numériquement : $h[m^{-1}] = \frac{B[kGauss]}{33.36\,p[GeV/c]}$

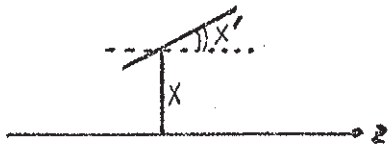


De préférence, nous utiliserons la position Z le long de la trajectoire centrale, plutôt que la variable temps t .

Une trajectoire à un Z donné sera alors caractérisée par 4 variables :

$$\left.\begin{array}{l} X \\ Y \end{array}\right\} \text{ position}$$

$$\left.\begin{array}{l} X' = \dfrac{dX}{dZ} \\ Y' = \dfrac{dY}{dZ} \end{array}\right\} \text{ divergence angulaire (pente de la trajectoire)}$$

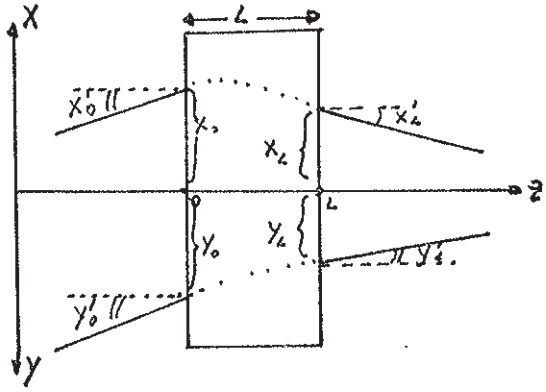


Dans ce travail, nous nous sommes limités aux <u>termes du 1er ordre en X , X', Y et Y'</u>. La vitesse et sa projection sur Z sont égales ($\cos(X') = 1$). Elles sont en plus constantes s'il n'y a pas de champ $\vec{E}$ longitudinal.

Avec cette approximation, on montre [4] que l'équation (1.1) devient :

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} X'' &= h(1 + hX) + \frac{e}{p}\left[Y'B_z - (1 + 2hX)B_y\right] \\ Y'' &= -\frac{e}{p}\left[X'B_z - (1 + 2hX)B_x\right] \end{aligned}$$

Au 1er ordre, les coordonnées d'une trajectoire à la sortie d'un élément s'expriment comme une fonction linéaire des coordonnées à l'entrée. Un élément d'un système de transport sera donc représenté par une <u>matrice</u> R :



$$\begin{pmatrix} X_L \\ X_L' \\ Y_L \\ Y_L' \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \\ Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix}$$

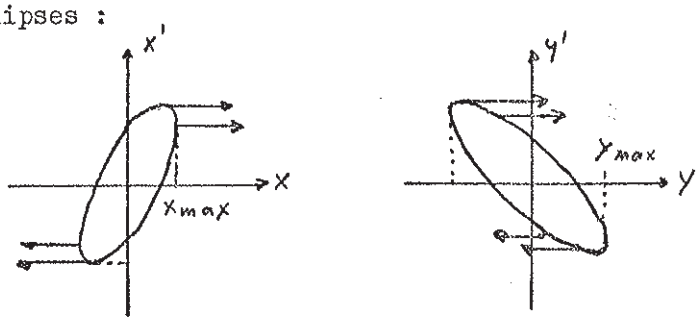
avec <u>Det(R) = 1</u> ce qui est une manifestation du théorème de Liouville.

Les comportements des trajectoires dans les plans horizontaux (X) et vertcaux (Y) sont souvent indépendants. La matrice R prendra alors la forme:

$$R = \left(\begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ \hline 0 & R_y \end{array}\right)$$

<u>L'espace de phase</u> sera celui des coordonnées X , X', Y , Y'. Nous décrirons un ensemble de trajectoires (le faisceau) par un ellipsoïde centré à l'origine dans l'espace de phase. Nous savons par Liouville que son volume reste constant.

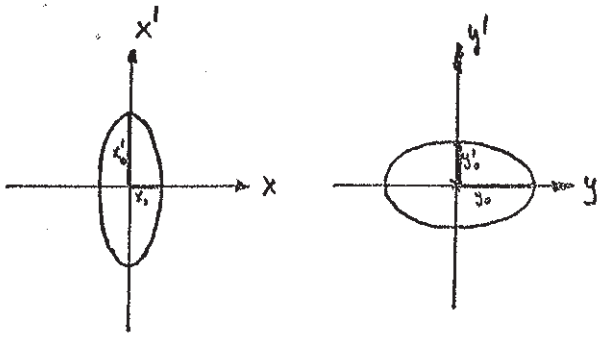
Si X et Y ne sont pas couplés, nous pouvons considérer séparément deux ellipses :



Xmax et Ymax sont les dimensions de l'enve--loppe.

Les figures ci-dessus décrivent un faisceau qui diverge dans le plan horizontal (X) et qui converge dans le plan vertical (Y).

Nous définirons <u>l'émittance</u> $\mathcal{E}$ d'un faisceau comme le produit des demi--axes de son ellipsoïde de phase. $\mathcal{E}$ est donc proportionnelle au volume de l'ellipsoïde.



Si l'ellipsoïde est droit (par rapport aux axes de coordonnées) on aura :

$$\mathcal{E} = X_o X'_o Y'_o Y_o$$

Si en plus X et Y sont indé-pendants, on peut définir :

$$\mathcal{E}_x = X_o X'_o \qquad \mathcal{E}_y = Y_o Y'_o$$

Une ellipse de phase droite décrit la situation lors d'un étranglement du faisceau ("waist").

<u>L'acceptance</u> d'un système de transport est la région de l'espace de phase qui pourra être transmise par le système,compte tenu des dimensions finies des éléments optiques.

<u>Remarque</u> : Pour certaines applications, il est commode d'introduire deux variables supplémentaires pour décrire une particule dans un faisceau. Il s'agit de : $-\delta$: distance (sur l'axe Z) entre la particule et le centre de la bouffée.

$\frac{\Delta p}{p}$: écart relatif en impulsion de la particule.

Il y a maintenant 6 coordonnées, nous pourrions travailler dans un espace de phase à 6 dimensions. Nous retrouvons la correspondance entre les paramètres de la mécanique : $(q_x ; \dot{q}_x ; q_y ; \dot{q}_y ; q_z ; \dot{q}_z)$

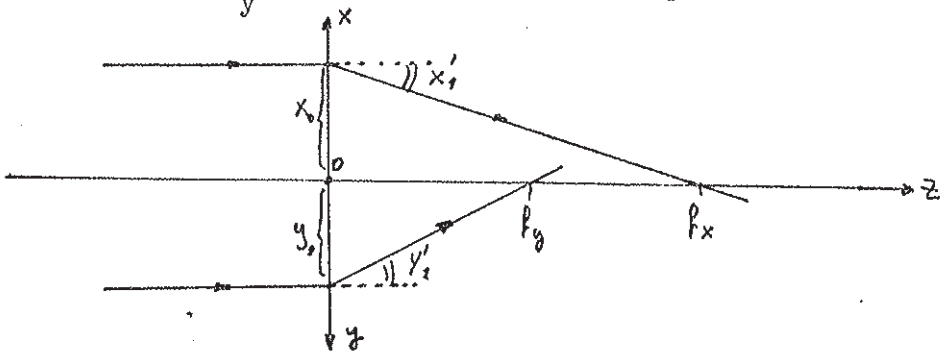
et : $(X ; X' ; Y ; Y' ; \delta ; \frac{\Delta p}{p})$

<u>Exemple :</u> Lentille mince

Supposons que X et Y sont indépendants.

Soient – f_x : distance focale dans le plan horizontal

– f_y : distance focale dans le plan vertical



La distance X (Y) d'une trajectoire ne change pas dans une lentille mince. Par contre le dessin ci-dessus montre que la divergence des trajectoires X' (Y') est augmentée de $-\frac{X}{f_x}$ $\left(-\frac{Y}{f_y}\right)$. D'où :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix}$$

La figure ci-dessous montre l'évolution de l'ellipse de phase sous une telle transformation.

1.3 ELEMENTS OPTIQUES UTILISES

Nous avons vu que l'effet d'un élément optique sur les trajectoires est décrit par une matrice de transfert. Le calcul de l'évolution d'une trajectoire ou de l'enveloppe du faisceau se réduira à des produits matriciels.

Dans ce paragraphe nous rappellerons les caractéristiques et les matrices de transfert des éléments que nous avons utilisés, sans toutefois les justifier. Le lecteur trouvera des calculs détaillés dans [1], [2] et [4]. Des approximations et des raisonnements analogues sont d'ailleurs utilisés au chapitre II lors de l'étude de la dépolarisation du faisceau. Les éléments du type particulier fente et dégradeur sont traités dans un premier rapport [5] .

1.3.1 Longueur libre (Drift Length)

C'est un tronçon de longueur L sans champs. Les trajectoires sont donc des droites. Pour les plans X et Y la matrice R prend la forme :

$$\begin{pmatrix} X_L \\ X'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X'_o \end{pmatrix}$$

1.3.2 Quadrupôles

Le moyen le plus couramment utilisé pour focaliser un faisceau est une paire de lentilles quadrupolaires. Le champ dans une de ces lentilles est donné par :

$$B_x = g \cdot Y$$

$$B_y = g \cdot X$$

$$B_z = 0$$

avec g : gradient de champ

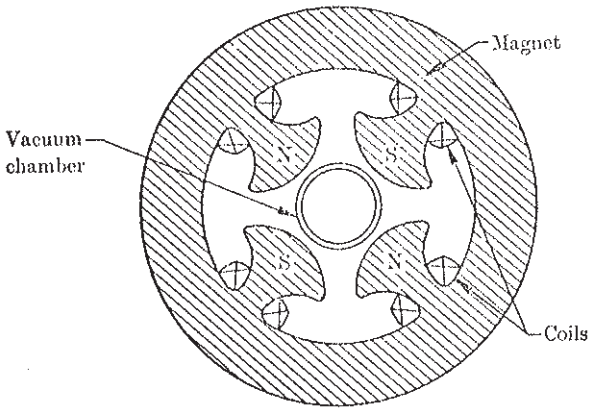
$$g = \frac{\partial B_x}{\partial Y} = \frac{\partial B_y}{\partial X} = \text{constante}$$

Si B_o : champ au sommet d'un pôle

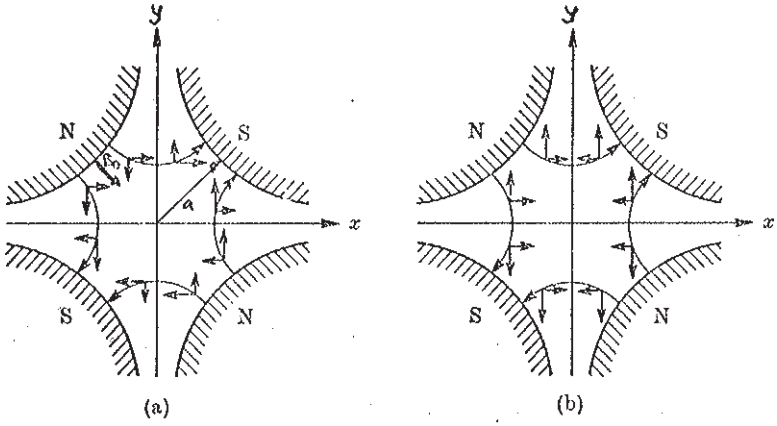
a : rayon d'ouverture du quadrupôle

On a : $g = \frac{Bo}{a}$

La figure de la page suivante montre qu'une telle configuration de champ focalise dans le plan X et défocalise dans le plan Y .



Coupe transversale d'une lentille quadrupolaire



(a) composantes du champ B

(b) composantes de la force de Lorentz

Matrices de transfert

On introduit les expressions de B_x, B_y et B_z dans l'équation (1.2) et l'on trouve après résolution :

$$\begin{pmatrix} X_L \\ X'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}\,L) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}\,L) \\ -\sqrt{k}\,\sin(\sqrt{k}\,L) & \cos(\sqrt{k}\,L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X'_o \end{pmatrix} \qquad \text{plan focalisant}$$

$$\begin{pmatrix} Y_L \\ Y'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k}\,L) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}\,L) \\ \sqrt{k}\,\sinh(\sqrt{k}\,L) & \cosh(\sqrt{k}\,L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_o \\ Y'_o \end{pmatrix} \qquad \text{plan défocalisant}$$

Avec : $k = \dfrac{e\,B_o}{p\,a} = \dfrac{e\,g}{p}$

L : longueur du quadrupôle

Approximation lentille mince

Si $L \ll \left|\dfrac{1}{k \cdot L}\right|$, les matrices deviennent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp kL & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où : } f_x = -f_y = \frac{1}{k\,L}$$

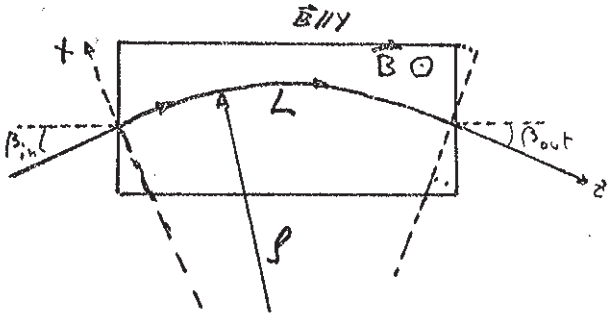
Numériquement : $k[m^{-2}] = 3\,\dfrac{g\ [kG/cm]}{p\ [GeV/c]}$

Focalisation à l'aide de quadrupôles

Comme un seul quadrupôle focalise dans un plan et défocalise dans l'autre, il faut au moins deux éléments de polarités inverses. Les figures des pages suivantes montrent l'évolution des trajectoires dans le cas d'un doublet et celle des enveloppes dans le cas d'un triplet. Ces résultats ont été obtenus à l'aide du programme PLOTRAMP.

1.3.3 Aimants de déflexion (Bending Magnet)

Outre leur faculté de modifier la direction du faisceau, ces éléments présentent des propriétés focalisantes et dispersent un faisceau poly-énergétique dans le plan de déflexion. Il est ainsi possible d'opérer une sélection des particules d'après leur impulsion.



Soit Θ_B : l'angle de déflexion du faisceau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{e \cdot B}{p} = h$$

$$\Theta_B = \frac{L}{\rho} = h \cdot L = \frac{e \cdot B}{p} \cdot L$$

(dépend de p)

Il est courant de séparer un aimant de déflexion en trois éléments :

- lentille de coin avec champ de fuite (pole face rotation)
- aimant de secteur (sector magnet)
- lentille de coin avec champ de fuite (sortie)

Lentille de coin avec champ de fuite

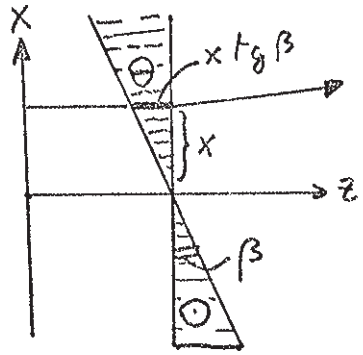
On considère cet effet somme celui d'une lentille mince.

En X Une particule à $X \neq 0$ rencontre le champ de la lentille de coin sur une distance de $X \cdot tg(\beta)$.

L'angle dont tournera la trajectoire sera: $\frac{X \cdot tg(\beta)}{\rho}$

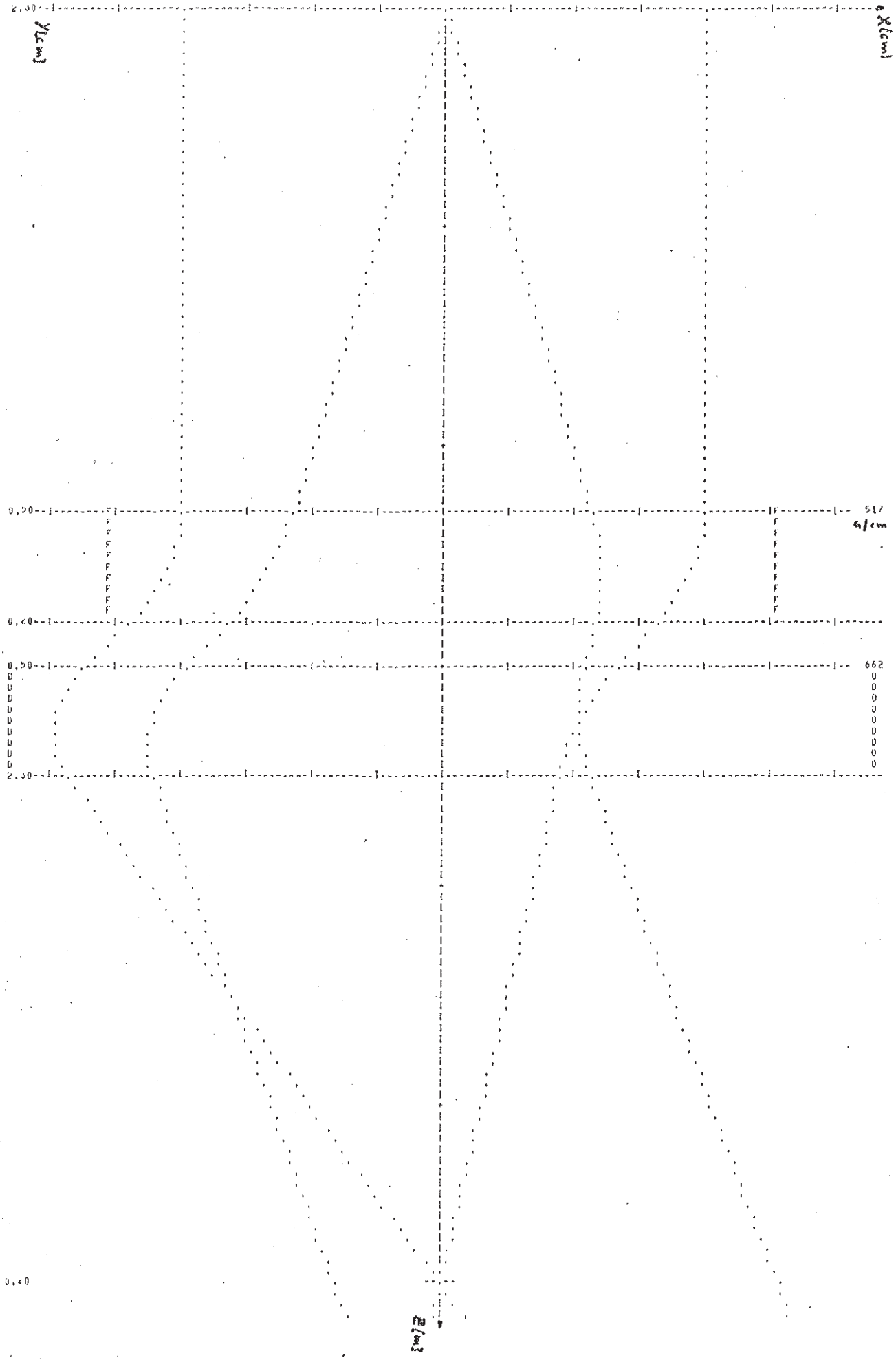
D'où :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{tg(\beta)}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X'_0 \end{pmatrix}$$



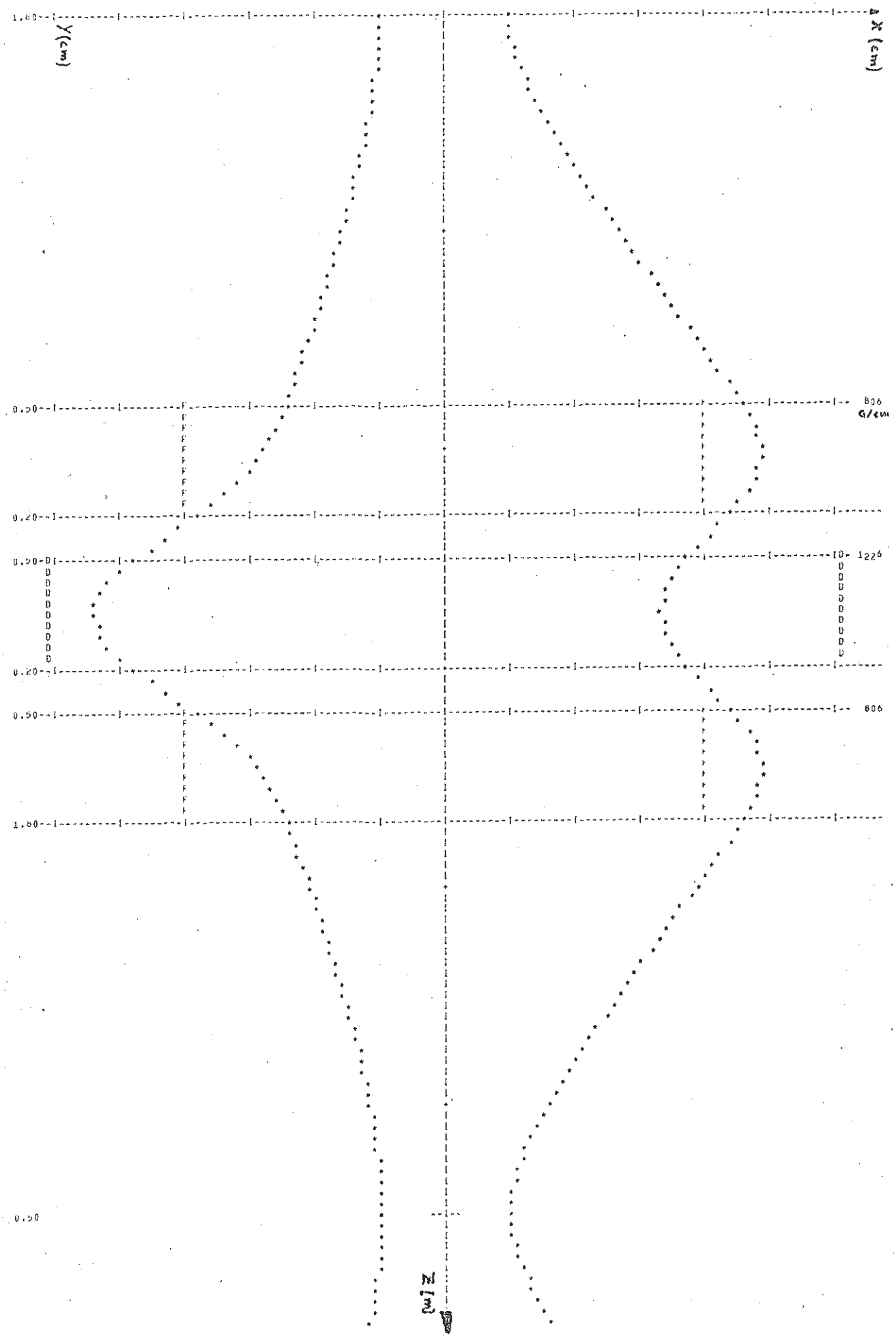
FOCALISATION A L AIDE D UN DOUBLET DE QUADRUPOLES 1 GEV/C TRAJECTOIRES

10 POS./CM 20 POS./ M 0.100 POS. / (GAUSS/CM) -0.000 POS. / KGAUSS -0.000 POS. / (KV/CM)



FOCALISATION A L AIDE D UN TRIPLET SYMETRIQUE 1 GEV/C ENVELOPPES

10 POS./CM 20 POS./M 0.050 POS. / (GAUSS/CM) -0.000 POS. / KGAUSS -0.000 POS. / (KV/CM)



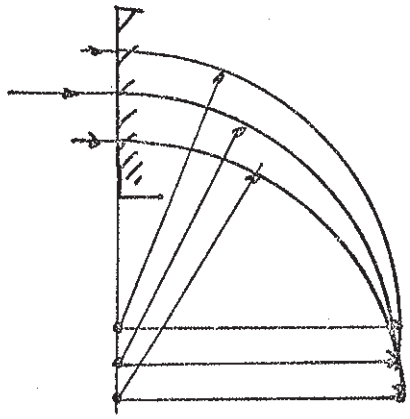
<u>En Y</u> La coordonnée Y' est sensible au champ B_x. On montre que l'effet du champ de fuite dans cette direction est proportionnel à $\frac{Y \cdot tg(\beta)}{\rho}$. (effet focalisant)

D'où :
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{tg(\beta)}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_o \\ Y_o \end{pmatrix}$$

<u>Aimant de secteur</u>

<u>En X</u> On a un effet focalisant dû à la courbure du faisceau. Il y a en plus un effet dispersif qui va coupler X et X' à $\frac{\Delta p}{p}$

En introduisant $\frac{\Delta p}{p}$ comme coordonnée, on peut montrer :



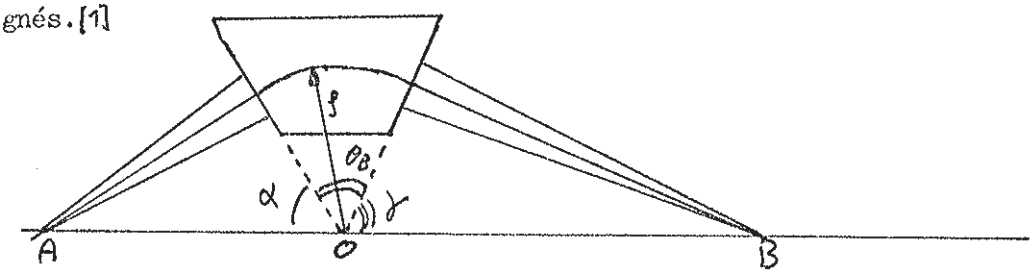
$$\begin{pmatrix} X_L \\ X'_L \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_B & \frac{1}{h}\sin\theta_B & \frac{1}{h}(1-\cos\theta_B) \\ -h\cdot\sin\theta_B & \cos\theta_B & \sin\theta_B \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_o \\ X'_o \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}$$

$\theta_B = h \cdot L$

<u>En Y</u> Il n'y a pas d'effet car $\vec{B}$ // Y. D'où :

$$\begin{pmatrix} Y_L \\ Y'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_o \\ Y'_o \end{pmatrix}$$

Les aimants de secteur possèdent la propriété illustrée par la figure ci-dessous. Les deux points de focalisation et le centre de courbure sont alignés.[1]

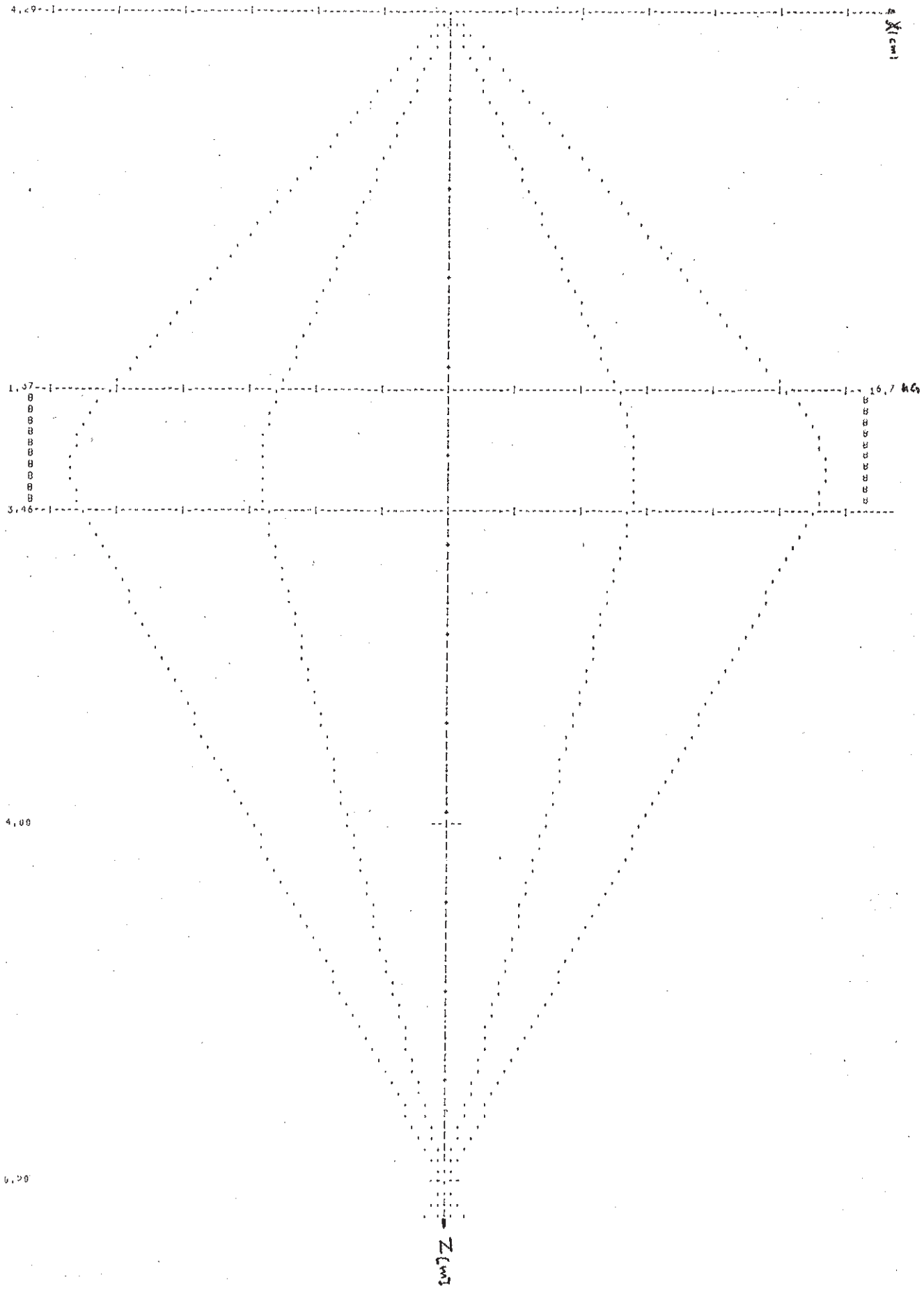


Cet effet est montré à la page suivante à l'aide du programme PLOTRAMP.

On a choisi : $\rho = 2$ m ; $\theta_B = 40^\circ$; $\alpha = 65^\circ$; $\gamma = 75^\circ$; $p = 1$ GeV/c .

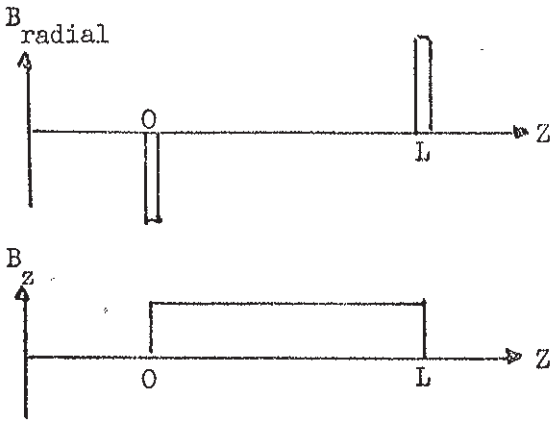
AIMANT DE SECTEUR FOCALISATION DANS LE PLAN HORIZONTAL 1 GEV/C TRAJ.

10 POS./CM 0 POS./ M 0.000 POS. / (GAUSS/CM) 3.000 POS. / (GAUSS -0.000 POS. / (KV/CM)



1.3.4 Solénoïde

A haute énergie cet élément est utilisé pour faire tourner la polarisation d'un faisceau (chap. II et III). A basse énergie, on peut l'utiliser comme élément de focalisation. Dans un solénoïde axé sur le faisceau, les particules décrivent des hélices. Les effets des champs de fuite peuvent s'approximer comme suit : [6] , [7] et [2]



Comme pour l'aimant, on sépare l'effet des champs de fuite de celui de la partie homogène.

Le calcul de la matrice produit des matrices représentant ces divers effets, conduit au résultat :

$$R_s = \begin{pmatrix} C^2 & SC/K & SC & S^2/K \\ -KSC & C^2 & -KS^2 & SC \\ -SC & -S^2/K & C^2 & SC/K \\ KS^2 & -SC & -KSC & C^2 \end{pmatrix}$$

Avec: $K = \frac{e\,B_0}{2\,p}$

$S = \sin(KL)$

$C = \cos(KL)$

On montre que cette matrice peut se mettre sous la forme :

$R_s = R_f \cdot R_r$ Avec : R_r : matrice de rotation du faisceau autour de Z d'un angle KL.

R_f : matrice de focalisation du faisceau dans les deux plans avec $f \cong \frac{1}{K^2\,L}$

L'effet focalisant est faible. Le calcul donne $f \cong 10$ m pour $p = 1$ GeV/c ; $L = 1$ m et $B_0 = 20$ kGauss

Chapitre II

COMPORTEMENT DU SPIN DANS UN SYSTEME DE TRANSPORT. DEPOLARISATION.

L'orientation du spin de chaque particule sera affectée par les champs de guidage. Une dépolarisation du faisceau peut survenir du fait que toutes les particules ne rencontrent pas les mêmes champs. Leurs spins se comporteront donc différemment les uns des autres.

La dépolarisation d'un faisceau dans un accélérateur à déjà été l'objet de plusieurs études [8], [9]. Il nous a paru utile d'évaluer ces effets pour un système de transport. Nous ne discuterons ici que le cas des champs de guidage car les résonnances n'affectent que la phase d'accélération.

2.1 EQUATION DU SPIN

Dans le référentiel du laboratoire, l'évolution de la direction du spin d'une particule relativiste est décrite par [8], [10] :

$$(2.1) \qquad \left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)_{Lab} = \vec{S} \times \frac{e}{\gamma m}\left\{\vec{B} + \mu_a\left(\gamma\vec{B}_\perp + \vec{B}_{//}\right)\right\}$$

Avec: $\vec{B}_{//} = (\hat{v}\cdot\vec{B})\hat{v}$: champ // à la vitesse

$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$

$\vec{B}_\perp = \vec{B} - \vec{B}_{//}$: champ $\perp$ à la vitesse

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

m : masse au repos de la particule

e : charge de la particule

μ_a : moment magnétique anormal de la particule (proton: 1.793)

La vitesse angulaire peut se décomposer en deux termes:

- $\frac{e\cdot\vec{B}}{\gamma\cdot m}$: c'est la rotation du référentiel propre de la particule. (fréquence cyclotron)

$- \mu_a \frac{e}{m}\left(\vec{B}_\perp + \frac{\vec{B}_{//}}{\gamma}\right)$: c'est la rotation du spin (due au moment magnétique anormal) autour du champ vu par la particule dans son référentiel propre.

L'étude de la dépolarisation dans un solénoïde et un doublet de quadrupôles par une méthode de Monte-Carlo, est présentée dans un premier rapport[5]. L'équation (2.1) était résolue numériquement pour chaque particule à l'aide des programmes POLAR et POLQUAD.

Pour pouvoir étendre cette étude à un système de transport complet quelconque, il nous a paru utile de trouver des solutions analytiques de l'équation (2.1), pour chaque type d'élément optique utilisé. De telles solutions (sous forme de matrices de transfert) sont données dans [11] pour le cas non relativiste. Le paragraphe suivant est consacré au calcul des matrices de transfert du spin pour le cas relativiste.

2.2 MATRICES DE TRANSFERT POUR LE SPIN

Pour évaluer facilement l'effet d'un système de transport sur la polarisation du faisceau, il est judicieux d'utiliser un formalisme matriciel de façon que l'on ait, pour chaque élément optique utilisé:

$$\vec{S}_{out} = A \cdot \vec{S}_{in}$$

Remarquons que la matrice A dépend des coordonnées de la trajectoire de la particule. Dans ce qui suit nous avons utilisé une voie analogue et les mêmes approximations que pour le calcul de l'optique.

Au premier ordre et si la trajectoire centrale du faisceau est droite, nous savons que : $dZ = \beta c dt$. Nous pouvons introduire cela dans l'équation (2.1) qui devient :

$$(2.2) \qquad \vec{S}' = \left(\frac{d\vec{S}}{dZ}\right)_{Lab} = \vec{S} \times \frac{e}{p}\left\{\vec{B} + \mu_a\left(\gamma\vec{B}_\perp + \vec{B}_{//}\right)\right\}$$

2.2.1 Longueur libre

Pour cet élément la matrice de transfert se réduit à la matrice unité.

$$\vec{S}_{out} = \mathbb{1} \cdot \vec{S}_{in}$$

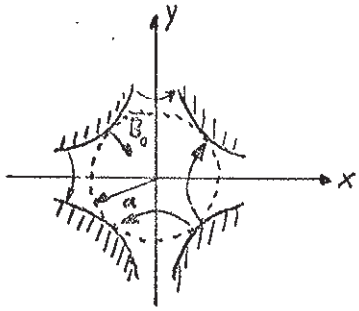
2.2.2 Quadrupôle

Soient : L : longeur effective du quadrupôle

a : ouverture du quadrupôle

B_0: champ au sommet du pôle.

$g = \frac{B_0}{a}$: gradient de champ



Nous avons vu (1.3.2) que dans un quadrupôle: $\vec{B} = g\ (\ Y\ ;\ Y\ ;\ 0\ )$

Au 1er ordre nous avons : $\hat{v} \cong (\ X'\ ;\ Y'\ ;\ 1\ )$

$$\vec{B}_{//} = (\ \vec{B}\cdot\hat{v}\ )\ \hat{v} \cong g(X'Y + XY')(\ X'\ ;\ Y'\ ;\ 1\ ) \cong 0$$

$$\vec{B}_{\perp} = \vec{B} - \vec{B}_{//} \cong \vec{B}$$

En introduisant ces valeurs dans (2.2) on obtient:

$$(2.3) \qquad \vec{S}' = \vec{S} \times k(\mu_a\gamma + 1)\left[\ Y(Z)\ ;\ X(Z)\ ;\ 0\right] \qquad \text{avec} \quad k = \frac{e\ g}{p}$$

Les expressions de X(Z) et Y(Z) sont données en 1.3.2.

Comme l'angle dont tourne le spin est petit, nous pouvons faire l'approximation :

$$(2.4) \qquad \Delta\vec{S} = \vec{S}_{in} \times k(\mu_a\gamma + 1)\int_0^L \left[\ Y(Z)\ ;\ X(Z)\ ;\ 0\right] dZ \qquad \text{(1 pas d'intégration)}$$

Calculons l'intégrale; deux cas peuvent se présenter :

a) $k > 0$ focalisant X - défocalisant Y

$$\int_0^L X(Z)\ dZ = \frac{1}{k}\ (\ X'_0 - X'(L)\ )$$

$$\int_0^L Y(Z)\ dZ = \frac{1}{k}\ (\ Y'(L) - Y'_0\ )$$

b) $k < 0$ défocalisant X - focalisant Y

$$\int_0^L X(Z)\ dZ = \frac{1}{|k|}(\ X'(L) - X'_0\ )$$

$$\int_0^L Y(Z)\ dZ = \frac{1}{|k|}(\ Y'_0 - Y'(L)\ )$$

En remplacant ces valeurs dans (2.4) nous obtenons pour les deux cas la même expression :

$$(2.5) \qquad \Delta\vec{S} = \vec{S}_{in} \times (\mu_a\gamma + 1)\left[Y'_0 - Y'(L)\ ;\ X'(L) - X'_0\ ;\ 0\right]$$

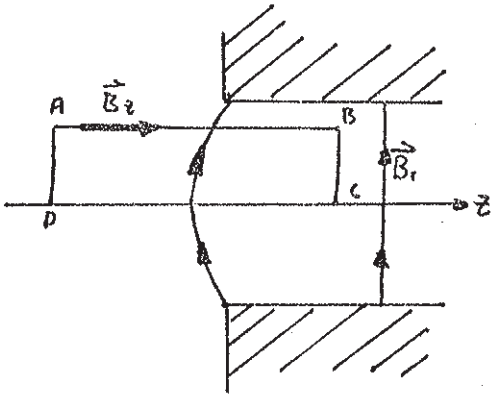
L'examen de l'expression (2.5) montre que le spin tourne $(\mu_a\gamma + 1)$ fois plus que la particule. En posant $\vec{S}_{out} = \vec{S}_{in} + \Delta\vec{S}$, on trouve la matrice de transfert.

$$\vec{S}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\mu_a\gamma+1)(X'_L-X'_o) \\ 0 & 1 & (\mu_a\gamma+1)(Y'_L-Y'_o) \\ -(\mu_a\gamma+1)(X'_L-X'_o) & -(\mu_a\gamma+1)(Y'_L-Y'_o) & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{S}_{in}$$

<u>Effet des champs de fuite</u>

Pour évaluer l'effet des champs de bords sur la rotation du spin, on peut calculer l'intégrale du champ B_z longitudinal rencontré par la particule à l'entrée du quadrupôle. Cette intégrale sera proportionnelle à la rotation du spin dans le plan transversal. L'effet des champs transversaux B_x et B_y est compris dans la partie homogène du quadrupôle.

Soit le contour ABCD (figure).



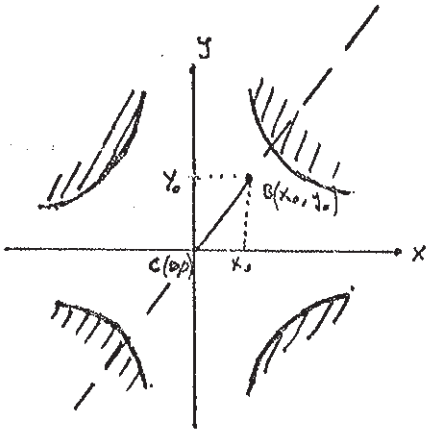
Maxwell : $\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{l}$ (sans courants)

Comme il n'y a pas de contribution à $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ sur CD et DA, on a :

$$0 = \oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B B_z\,dz + \int_B^C B_r\,dr$$

D'où :

$$\int_{entrée} \vec{B}_z\,dz = \int_A^B B_z\,dz = \int_C^B B_r\,dr$$



Puisqu'entre les pôles le champ dérive d'un potentiel, nous pouvons changer le chemin d'intégration :

$$\int_C^B B_r\,dr = \int_{(0,0)}^{(x_o,y_o)} B_r\,dr = \int_0^{(x_o,0)} B_x\,dx + \int_{(x_o,0)}^{(x_o,y_o)} B_y\,dy$$

Comme $B_x = gy$ et $B_y = gx$ nous trouvons :

$$\int_0^{x_o} 0\,dx + \int_0^{y_o} gx_o\,dy = gx_o y_o$$

D'où :

$$\int_{entrée} B_z\,dz = g\,x_o\,y_o$$

Cet effet est du 2e ordre, nous n'en tiendrons pas compte.

2.2.3 Aimant de deflexion

Comme pour l'optique nous le séparerons en 3 éléments :

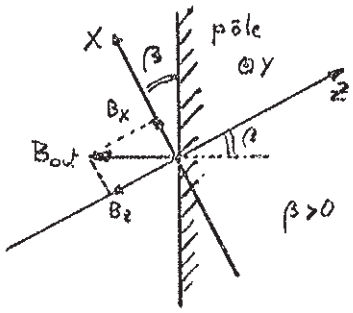
- Lentille de coin avec champ de fuite (entrée)
- Aimant de secteur (homogène, $B_o//Y$)
- Lentille de coin avec champ de fuite (sortie)

A) Lentille de coin avec champ de fuite (entrée)

Nous allons considérer globalement l'effet du champ que rencontre une particule à l'entrée de l'aimant. Nous devons donc calculer $\int \vec{B}dZ$ pour une trajectoire de coordonnées X et Y.

Calcul de $\int \vec{B}dZ$ à l'entrée

Soit B_{out} le champ de fuite perpendiculaire à la face d'entrée dans le plan horizontal. (figure)



La figure montre que :

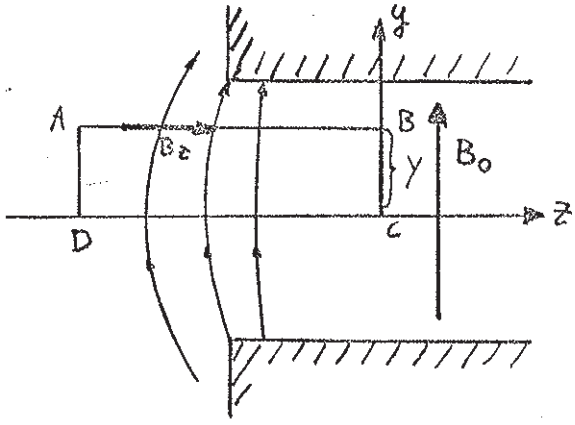
$$B_x = B_{out}\sin\beta$$

$$B_z = -B_{out}\cos\beta$$

d'où : $B_x = - B_z tg\beta$

Calculons $\int B_z dZ$. D'après Maxwell nous savons qu'en l'absence de courants on a :

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0$$



Comme $\vec{B}d\vec{\ell}$ est nul sur les segments CD et DA, on écrit :

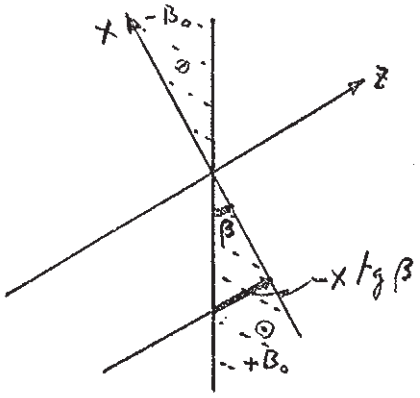
$$0 = \int_{ABCD} \vec{B}d\vec{\ell} = \int_B^C -B_o dY + \int_A^B B_z dZ$$

D'où:

$$\int B_z dZ = Y\cdot B_o$$

Sachant que $B_x = - B_z tg\beta$, on trouve : $\int B_x dZ = - Y\cdot B_o\cdot tg\beta$

Calculons maintenant $\int B_y dZ$. On tiendra compte du champ B_y résiduel à l'extérieur des pôles en introduisant une "longueur effective" pour l'aimant de secteur. Nous devons encore tenir compte de l'effet de lentille de coin à l'entrée. Cet effet provient du fait qu'une particule à $X>0$ rencontre un "manque de champ" qui sera compté négativement. La figure montre



qu'une trajectoire à $X>0$ rencontre un champ $-B_o$ sur une distance égale à $X\cdot tg\beta$. De même si $X<0$, on rencontre un champ $+B_o$ sur une distance $-X\cdot tg\beta$.

Il s'ensuit donc que :

$$\int B_y dZ = -B_o X\, tg\beta$$

Nous trouvons finalement que : $\int_{entrée} \vec{B} dZ = B_o \left[-Y tg\beta \; ; \; -X tg\beta \; ; \; Y \right]$

<u>Calcul de la rotation du spin</u>

Comme pour l'optique, on peut considérer globalement l'effet du champ à l'entrée. Puisque d'autre part l'angle dont tourne le spin est petit, on peut calculer la rotation du spin en faisant un seul pas d'intégration comme pour les quadrupôles. Nous aurons donc :

$$(2.6) \qquad \Delta \vec{S} = \vec{S}_{in} \times \int \frac{e}{p} \left[\vec{B} + \mu_a (\gamma \vec{B}_\perp + \vec{B}_{/\!/}) \right] dZ$$

Au 1er ordre en X,X',Y,Y' nous avons : (avec $\hat{v} \cong (X' \; ; \; Y' \; ; \; 1)$)

$$\int \vec{B}_{/\!/} dZ = \int (\vec{B}\cdot\hat{v})\, \hat{v}\, dZ \cong \int (B_x X' + B_y Y' + B_z)(X' ; Y' ; 1) dZ$$

$$\cong \int (X' B_z ; \; Y' B_z ; \; X' B_x + Y' B_y + B_z) dZ \cong \int B_z dZ = B_o (0 \; ; \; 0 \; ; \; Y)$$

car $\int B_x dZ$, $\int B_y dZ$ et $\int B_z dZ$ sont petits au 1er ordre.

En posant $\int \vec{B}_\perp dZ = \int \vec{B} dZ - \int \vec{B}_{/\!/} dZ$, on obtient :

$$\int \vec{B}_\perp dZ = B_o (- Y tg\beta \; ; \; - X\, tg\beta \; ; \; 0)$$

Si l'on remplace ces expressions dans l'équation (2.6), on trouve :

$$(2.7) \qquad \Delta \vec{S} = \vec{S}_{in} \times \frac{e\, B_o}{p} \left[-Y tg\beta (\mu_a \gamma + 1) \; ; \; -Y tg\beta (\mu_a \gamma + 1) \; ; \; Y(1 + \mu_a) \right]$$

L'examen de l'expression (2.7) montre qu'en plus des rotations autour des axes X et Y déjà présentes en optique, il y a une rotation autour de Z (champ de fuite).

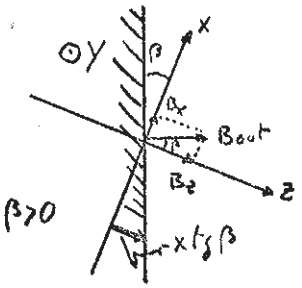
Si l'on pose $\vec{S}_{out} = \vec{S}_{in} + \Delta\vec{S}$, on obtient la matrice de transfert :

(avec $h = \frac{e\,B_o}{p}$)

$$\vec{S}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & Yh(\mu_a + 1) & Xh\,tg\beta(\mu_a\gamma+1) \\ -Yh(\mu_a + 1) & 1 & -Yh\,tg\beta(\mu_a\gamma+1) \\ -Xh\,tg\beta(\mu_a\gamma+1) & Yh\,tg\beta(\mu_a\gamma+1) & 1 \end{pmatrix} \cdot S_{in}$$

B) <u>Lentille de coin avec champ de fuite (sortie)</u>

On procède comme pour l'entrée et l'on trouve :



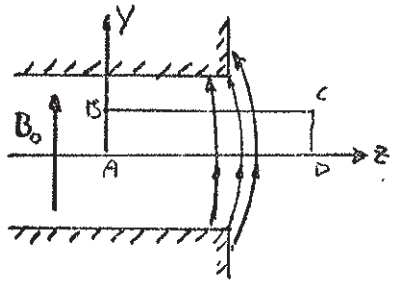
$$\left.\begin{aligned} B_z &= B_{out}\cos\beta \\ B_x &= B_{out}\sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_x = B_z\,tg\beta$$

D'après Maxwell on sait :

$$\int_A^B B_o\,dY + \int_B^C B_z\,dZ = 0$$

D'où :

$$\int_{sortie} B_z\,dZ = -\,Y\,B_o \qquad \text{et} \int_{sortie} B_x\,dZ = -YB_o\,tg\beta$$



Pour l'effet de lentille de coin on trouve :

$$\int_{sortie} B_y\,dZ = -\,X\,B_o\,tg\beta$$

D'où : $\int \vec{B}\,dZ = B_o(-\,Y\,tg\beta\,;\,-\,X\,tg\beta\,;\,-\,Y\,)$

Et pour le spin :

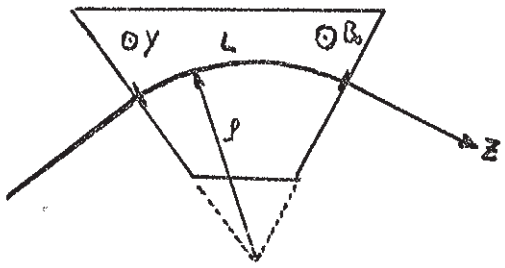
$$(2.8) \quad \Delta\vec{S} = \vec{S}_{in} \times \frac{e\,B_o}{p}\left[-Ytg\beta(\mu_a\gamma+1)\,;\,-Xtg\,(\mu_a\gamma+1)\,;\,-\,Y(1+\mu_a)\right]$$

Nous voyons que le terme de rotation autour de Z a changé de signe, car le champ de fuite a changé de signe. La rotation autour de X n'a pas changé de signe car la relation géométrique entre B_x et B_z a changé de signe. L'effet de lentille de coin n'a pas changé de signe.

La matrice de transfert s'exprime comme :

$$\vec{S}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & -Yh(\mu_a+1) & Xhtg\beta(\mu_a\gamma+1) \\ Yh(\mu_a+1) & 1 & -Yhtg\beta(\mu_a\gamma+1) \\ -Xhtg\beta(\mu_a\gamma+1) & Yhtg\beta(\mu_a\gamma+1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{S}_{in}$$

C) <u>Aimant de secteur</u>



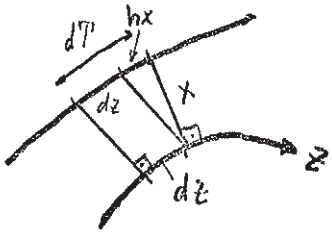
Soient : B_o : champ // axe Y

L : longueur effective

ρ : rayon de courbure

avec $\frac{1}{\rho} = h = \frac{e\,B_o}{p}$

Comme nous travaillons en coordonnées curvilignes, nous devons modifier légèrement l'équation (2.2).



Soient : dT : élément de longueur sur la trajectoire de la particule.

dZ : élément de longueur sur la trajectoire centrale du faisceau.

Nous savons que : $dT = \beta c dt$

La figure montre qu'au premier ordre nous avons : $dT \cong (1 + hX)dz$

D'où : $dt = \frac{(1+hX)}{\beta c}\, dZ$

Nous pouvons remplacer $\frac{d}{dt}$ dans (2.1) par $\frac{\beta c}{(1+hX)}\frac{d}{dz}$ et nous trouvons :

$$(2.9) \quad \left.\frac{d\vec{S}}{dZ}\right)_{Lab} = \vec{S} \times (1+hX)\,\frac{e}{p}\left[\vec{B} + \mu_a(\gamma\vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{//})\right]$$

(orientation repérée dans le Lab)

Comme le référentiel du faisceau tourne à la vitesse angulaire $h = \frac{e\,B_0}{p}$, nous devons la soustraire de l'expression (2.9) afin de trouver la rotation du spin dans le référentiel du faisceau. D'où :

$$(2.10)\quad \left.\frac{d\vec{S}}{dZ}\right)_{fsc} = \vec{S} \times \frac{e}{p}\left[hX\cdot\vec{B} + \mu_a(1 + hX)(\gamma\vec{B}_\perp + \vec{B}_{//})\right]$$

Il est intéressant de noter que le référentiel du faisceau et différent de celui de la particule.

Dans l'aimant envisagé on a $\vec{B} = B_0(\,0\,;\,1\,;\,0\,)$

Au 1er ordre : $\hat{v} \cong (X';\,Y';\,1)$

$$\vec{B}_{//} = (\vec{B}\cdot\hat{v})\hat{v} \cong B_0(0;\,0\,;\,Y')$$

$$\vec{B}_\perp = \vec{B} - \vec{B}_{//} \cong B_0(0;\,1\,;-Y')$$

En remplaçant ces expressions dans (2.10), on trouve :

$$(2.11)\quad \vec{S}' = \vec{S} \times h\left[\,0\,;\,hX(\mu_a\gamma+1) + \mu_a\gamma\,;\,-Y'\mu_a(\gamma-1)\right]$$

Ces différentes contributions à la rotation du spin peuvent s'expliquer comme suit:

$\mu_a\gamma$: rotation de la polarisation du faisceau (ordre 0)

$hX(\mu_a\gamma + 1)$: rotation due au fait qu'une particule hors de la trajectoire centrale subit le champ plus ou moins longtemps. Cet effet provoque une focalisation du faisceau. Il faut noter que la dépolarisation qui s'ensuit est proportionelle à $\mu_a\gamma+1$ comme dans le cas du quadrupôle et de la lentille de coin.

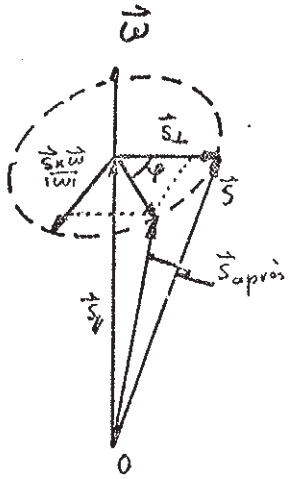
$Y'\mu_a(\gamma - 1)$: effet de dépolarisation relativiste.
(Y' = cte pour une trajectoire dans un aimant)

Résolution de (2.11)

Cette équation est du type : $\frac{d\vec{S}}{dZ} = \vec{S} \times \vec{\omega}(Z)$

Envisageons trois cas:

i) Supposons d'abord $\vec{\omega}$ constant et fixe dans l'espace.
$|\vec{\omega}|$ est alors la vitesse angulaire et $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ donne la direction de l'axe de rotation.



On a :

$$\vec{S}_{après} = \vec{S}_{//} + \vec{S}_{\perp}\cos\varphi + \frac{S\times\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\sin\varphi$$

avec : $\varphi = |\vec{\omega}|\,\Delta Z$

$$\vec{S}_{//} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{\omega}}{\omega^2}\,\vec{\omega}$$

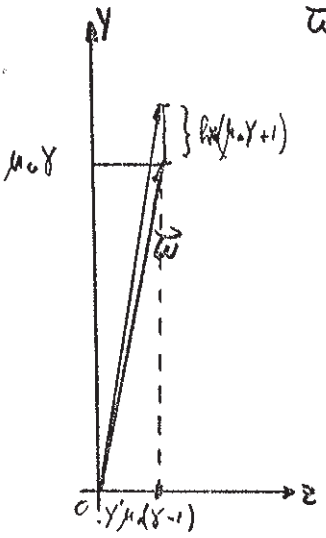
$$\vec{S}_{\perp} = \vec{S} - \vec{S}_{//}$$

ii) Si la direction de $\vec{\omega}$ reste constante, mais son module varie, on obtient les mêmes équations, sauf que cette fois :

$$\varphi = \int |\omega|\, dz$$

iii) Dans l'équation (2.11) on a cette fois :

$$\vec{\omega} = h\left[0\ ;\ hX(\mu_a\gamma + 1) + \mu_a\gamma\ ;\ -Y'\mu_a(\gamma - 1)\right]$$



La figure ci-contre montre que la direction de $\vec{\omega}$ est constante au 2e ordre près. Nous pouvons donc appliquer la méthode ii) en choisissant comme axe de rotation la moyenne de $\vec{\omega}$ (ou son intégrale).

Soit $\vec{\Omega} = \int \vec{\omega}\, dz$

Nous aurons une rotation autour de $\vec{\Omega}$ d'un angle : $|\vec{\Omega}|$

De l'optique nous savons: $X(Z) = X_o\cos(hZ) + \frac{X'_o}{h}\sin(hZ)$ (trajectoire)

$$Y'(Z) = \text{cte}$$

Sachant que $\int_0^L hX(Z)dZ = \frac{1}{h}\left(X'_o - X'_L \right)$, on obtient :

$$\vec{\Omega} = \left(0\ ;\ (X'_o - X'_L)(\mu_a\gamma - 1) + hL\mu_a\gamma\ ;\ -Y'hL(\gamma - 1) \right)$$

Si l'on pose $\vec{\Omega} = \left(0,\ \omega_2, \omega_3 \right)$, c'est à dire :

$$\omega_2 = (X'_o - X'_L)(\mu_a\gamma + 1) + hL\mu_a\gamma$$

$$\omega_3 = -Y'hL\mu_a(\gamma - 1)$$

avec : $\omega_3 \ll \omega_2$ et $\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 \simeq 0$,

le calcul exposé à l'appendice B montre que l'on obtient la matrice de transfert suivante :

$$\vec{S}_{out} = \begin{bmatrix} \cos\omega_2 & \frac{\omega_3}{\omega_2}\sin\omega_2 & -\sin\omega_2 \\ -\frac{\omega_3}{\omega_2}\sin\omega_2 & 1 & \frac{\omega_3}{\omega_2}(1-\cos\omega_2) \\ \sin\omega_2 & \frac{\omega_3}{\omega_2}(1-\cos\omega_2) & \cos\omega_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{S}_{in}$$

2.2.4 Solénoïde ($\vec{B} \parallel Z$)

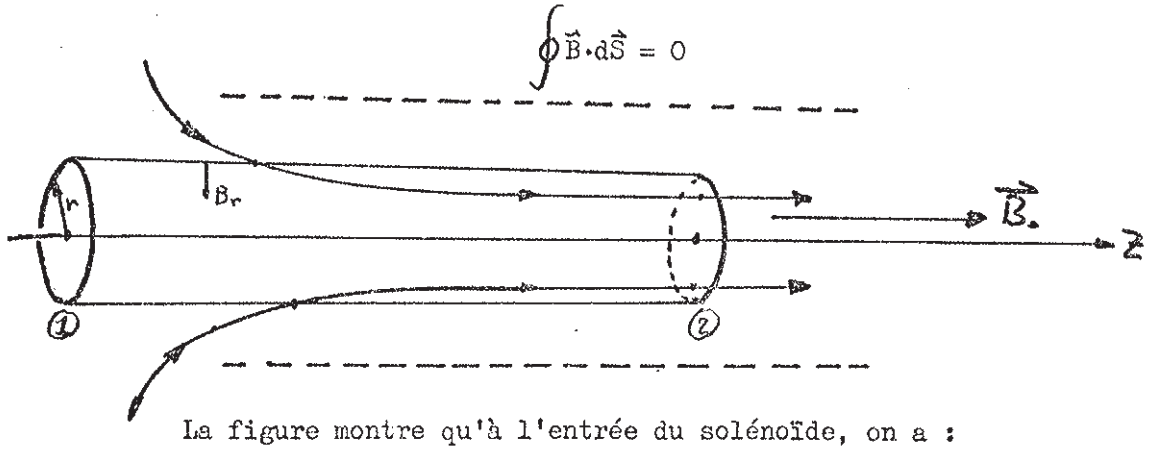
Nous séparerons l'effet des champs de fuite aux extrémités du solénoïde, de celui du champ longitudinal homogène.

Comme pour l'optique, on peut ne considérer aux extrémités que l'effet du champ radial, l'effet du champ longitudinal étant inclu dans la partie homogène du solénoïde.

A) Extrémités du solénoïde

Soit S la surface limitant le volume cylindrique montré à la figure ci-dessous. Par Maxwell on sait que :

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$



La figure montre qu'à l'entrée du solénoïde, on a :

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \underset{\text{face 1}}{0\,\pi r^2} + \underset{\text{cylindre}}{2\pi r \cdot \int B_r dZ} + \underset{\text{face 2}}{\pi r^2 B_o} = 0$$

De cette expression, nous tirons :

$$\int B_r dZ = -B_o \frac{r}{2} \qquad \text{à l'entrée}$$

En appliquant un raisonnement analogue pour la sortie du solénoïde, on trouve aisément que :

$$\int B_r dZ = B_o \frac{r}{2} \qquad \text{à la sortie}$$

Comme la rotation du spin provoquée par le champ radial est faible, nous pouvons faire l'approximation :

$$(2.12)\quad \Delta\vec{S} = \vec{S}_{in} \times \frac{e}{p}\int\left[\vec{B} + \mu_a(\gamma\vec{B}_\perp + \vec{B}_{//})\right] dZ$$

Puisqu'il est tenu compte de B_z dans la partie homogène, nous aurons :

$\vec{B} = \vec{B}_r$ d'où : $\vec{B}_{//} \cong 0$ et $\vec{B}_\perp \cong \vec{B} = \vec{B}_r$

Le calcul de la page précédente conduit à :

$$\int\vec{B}\cdot dZ = \mp\frac{r}{2}B_o\cdot\hat{r} = \mp\frac{B_o}{2}(X\,;\,Y\,;\,0) \qquad \begin{pmatrix}\text{entrée}\\ \text{sortie}\end{pmatrix}$$

L'équation (2.12) devient :

$$\Delta\vec{S} = \vec{S}_{in} \times \frac{e\,B_o}{p}\left[\mp\frac{X}{2}(\mu_a\gamma+1)\,;\,\mp\frac{Y}{2}(\mu_a\gamma+1)\,;\,0\right]$$

En posant $k = \frac{e\cdot B_o}{p}$, les matrices de transfert s'expriment comme :

$$\text{A l'entrée : } \vec{S}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{Y}{2}k(\mu_a\gamma+1) \\ 0 & 1 & -\frac{X}{2}k(\mu_a\gamma+1) \\ -\frac{Y}{2}k(\mu_a\gamma+1) & \frac{X}{2}k(\mu_a\gamma+1) & 1 \end{pmatrix}\cdot\vec{S}_{in}$$

$$\text{A la sortie : } \vec{S}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{Y}{2}k(\mu_a\gamma+1) \\ 0 & 1 & \frac{X}{2}k(\mu_a\gamma+1) \\ \frac{Y}{2}k(\mu_a\gamma+1) & -\frac{X}{2}k(\mu_a\gamma+1) & 1 \end{pmatrix}\cdot\vec{S}_{in}$$

Nous voyons que la rotation du spin change de signe entre l'entrée et la sortie. Ceci provient du signe du champ radial.

B) Partie homogène

Dans ce cas : $\vec{B} = B_o(0 ; 0 ; 1)$

$\hat{v} \cong (X' ; Y' ; 1)$

$\vec{B}_{//} = (\vec{B}\cdot\hat{v})\hat{v} \cong B_o(X'; Y'; 1)$

$\vec{B}_{\perp} = \vec{B} - \vec{B}_{//} \cong B_o(-X'; -Y'; 0)$

Si l'on pose $k = \frac{e\,B_o}{p}$, l'équation (2.2) devient :

$$(2.13) \quad \vec{S}' = \vec{S} \times k\left[-\mu_a(\gamma-1)X' \; ; \; -\mu_a(\gamma-1)Y' \; ; \; 1+\mu_a \right]$$

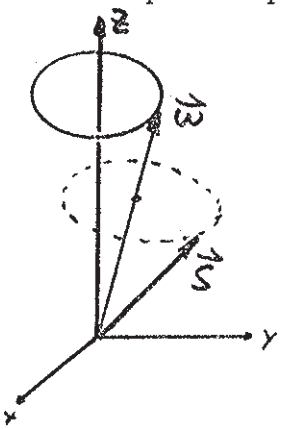
De l'optique nous savons que : $X'(Z) = X'_o\cos(kZ) + Y'_o\sin(kZ)$

$Y'(Z) = -X'_o\sin(kZ) + Y'_o\cos(kZ)$

(mouvement hélicoïdal)

L'équation que nous devons résoudre est du type :

$$\vec{S}'(Z) = \vec{S}(Z) \times \vec{\omega}(Z)$$



Contrairement au cas de l'aimant, le module de $\vec{\omega}$ est constant mais sa direction varie au 1er ordre. Il s'agit d'un mouvement autour d'un axe instantané $\vec{\omega}$ qui tourne autour de Z.

Si l'on pose : $k = \frac{eB_o}{p}$

$a = -X'_o k\mu_a(\gamma-1)$

$b = -Y'_o k\mu_a(\gamma-1)$

$c = k(1 + \mu_a)$,

l'équation (2.13) devient :

$$\begin{pmatrix} S'_1(Z) \\ S'_2(Z) \\ S'_3(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & a\cdot\sin(kZ) - b\cdot\cos(kZ) \\ -c & 0 & a\cdot\cos(kZ) + b\cdot\sin(kZ) \\ -a\cdot\sin(kZ) + b\cdot\cos(kZ) & -a\cdot\cos(kZ) + b\cdot\sin(kZ) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1(Z) \\ S_2(Z) \\ S_3(Z) \end{pmatrix}$$

La résolution d'une telle équation représente un volume de calcul important. La solution exacte est donnée en appendice A.

Si l'on admet que a et b restent petits devant c, c'est à dire que le produit énergie x divergence du faisceau reste petit, on peut négliger les termes en a^2 , b^2 et ab dans la solution exacte et l'on trouve:

$$\vec{S}_{out} = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & \sin\theta_p & (\gamma-1)\sin\theta_L Y'_L - (\gamma-1)(1-\cos\theta_L)X'_L \\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p & -(\gamma-1)\sin\theta_L X'_L - (\gamma-1)(1-\cos\theta_L)Y'_L \\ -(\gamma-1)\sin\theta_L Y'_o - (\gamma-1)(1-\cos\theta_L)X'_o & (\gamma-1)\sin\theta_L X'_o - (\gamma-1)(1-\cos\theta_L)Y'_o & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{S}_{in}$$

Expression dans laquelle on a rétabli les valeurs de a et b et posé :

$\theta_p = (\mu_a + 1)$ kL : angle de rotation de la polarisation du faisceau.

$\theta_L = \mu_a$ kL (effet de dépolarisation)

kL = angle dont tournent les particules.

2.3 UTILISATION PROPOSEE

Il serait intéressant d'utiliser les matrices de transfert calculées plus haut dans le cadre d'un programme calculant la dépolarisation provoquée par un système de transport à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo.

Ce programme se déroulerait en trois phases :

i) Données et initialisation

- Entrée des caractéristiques du faisceau au départ, de la direction de la polarisation et du nombre de particules.
- Entrée des éléments optiques, calcul des matrices de transfert pour l'optique et initialisation de certaines variables entrant dans le calcul de la rotation du spin.
- En plus des éléments purement optiques, on peut introduire des pseudo-éléments qui provoquent le calcul de la moyenne de la polarisation et/ou l'établissement d'histogrammes à certains endroits du système de transport.

ii) Simulation et calcul

- Les particules du faisceau sont générées selon la distribution choisie en i) , leurs trajectoires et la rotation de leur spin sont calculées tout au long du système de transport.
- Pour le calcul des moyennes et l'établissement d'histogrammes il faut savoir que les matrices citées plus haut n'ont pas un déterminant rigoureusement égal à 1. Il est donc nécessaire de normaliser le spin avant d'accumuler les sommes pour les moyennes.

iii) Impression des résultats

- Rappel des élements utilisés
- Calcul et impression des valeurs moyennes
- Edition des histogrammes

Chapitre III — APPLICATION AUX FAISCEAUX SECONDAIRES DE PROTONS POLARISES DU SIN

La partie pratique de ce travail consiste en la participation à l'étude du transport des faisceaux secondaires de protons polarisés du S.I.N.

Le S.I.N. disposera à Willigen dès 1974 d'un synchro-cyclotron isochrone accelérant des protons jusqu'à une énergie d'environ 590 MeV. Le système est principalement prévu pour fournir des faisceaux de pions et de muons de forte intensité. Ces faisceaux sont émis depuis deux cibles placées dans le faisceau primaire de 100 μA.

En plus des faisceaux de pions, on pourra disposer d'un faisceau de protons polarisés diffusés par l'une des cibles. Ce faisceau sera constitué par des protons diffusés par la cible "M" sous un angle de 8° (voir le plan de la fig 1). Ce faisceau aura une intensité d'environ 1 nA et présentera un taux de polarisation verticale de 30 %.

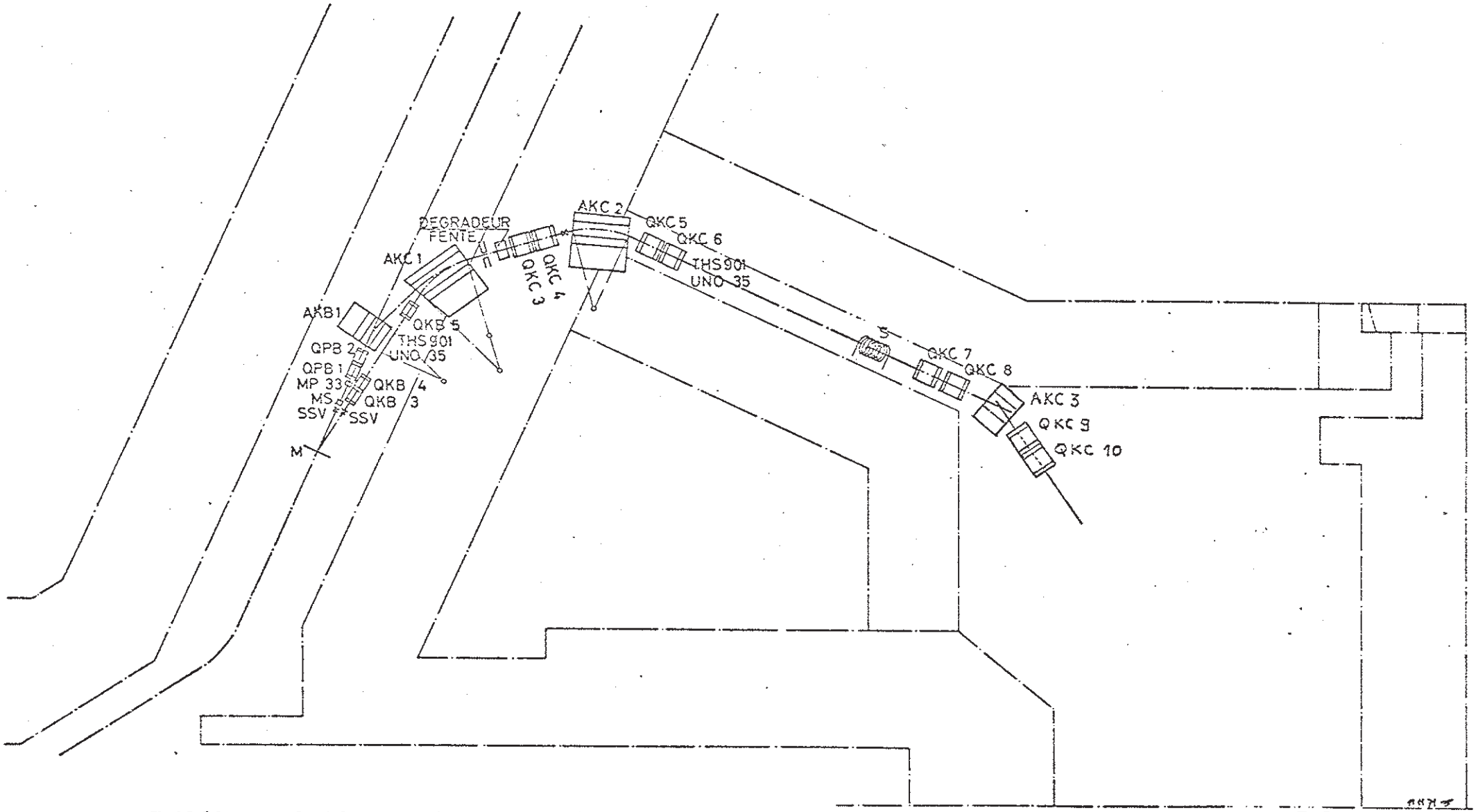
Le faisceau primaire de 100 μA pourra être remplacé à l'entrée de l'accelérateur par un faisceau polarisé de 30 nA. Ce faisceau empruntera une partie du canal du faisceau primaire avant d'être déféchi par l'aimant AKB 1 en direction du canal de protons polarisés. Ce canal de transport sera donc à même de transporter deux faisceaux (voir plan fig 1).

Un solénoïde, placé dans ce canal, pourra faire tourner transversalement la polarisation du faisceau entre 0 et 180°. Par l'introduction d'un dégradeur, on pourra faire varier l'énergie des particules présentes à la cible expérimentale.

Le transport du faisceau primaire est exposé par M. Guignard dans [12], celui des faisceaux secondaire de protons dans [13] .

Les faisceaux secondaires de protons ont déjà été l'objet d'une étude de notre part [5]. Le présent chapitre peut être considéré comme la suite et le complément de ce rapport, ce qui explique les nombreuses références qui y sont faites.

Le paragraphe 1 expose un résumé des valeurs calculées pour les dégradeurs envisagés. Le paragraphe 2 complète l'étude du faisceau sans déflexion finale par l'évaluation des intensités des faisceaux dégradés. Le paragraphe 3, expose les calculs menés à bien pour le transport avec déflexion finale.



FAISCEAUX SECONDAIRES DE PROTONS POLARISES TRANSVERSALEMENT

FIG. 1

3.1 DEGRADEURS

Le lecteur trouvera dans [5] les principes conduisant aux valeurs numériques données dans ce paragraphe.

En plus du ralentissement souhaité, l'introduction d'un dégradeur dans le faisceau donne lieu aux phénomènes suivants :

- diffusion multiple (coulombienne) qui augmente l'émittance du faisceau.
- straggling qui augmente l'étalement du faisceau en $\frac{\Delta p}{p}$.
- pertes dues aux interactions nucléaires entre les particules du faisceau et les noyaux du matériau ralentisseur.

Le tableau de la page suivante montre quelques valeurs caractéristiques pour les matériaux que nous avons envisagés.

Soient :

L	: longueur de matière nécessaire pour le dégradeur.
$(\Delta X)_{rms}$	: déplacement et divergence moyenne d'une trajectoire (diffusion multiple)
$(\Delta X')_{rms}$	:
$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{rms}$	: étalement relatif en impulsion
"pertes nucléaires"	: proportion des particules ayant subi une interaction nucléaire. On considère ces particules comme perdues car elle sont diffusées à grand angle et elles ne peuvent plus être canalisées par le système de transport.

Le tableau montre que le B_4C présente peu de diffusion multiple. Cette matière réalise un bon compromis entre :

- forte densité pour un bon ralentissement. (électrons)
- noyaux légers pour un angle de diffusion petit.

Le calcul des valeurs du tableau a été fait en prenant 590 MeV comme énergie du faisceau initial.

Valeurs caractéristiques des dégradeurs envisagés.

Energie finale (MeV)	Matériau	L (cm)	$(\Delta X)_{rms}$ (mm)	$(\Delta X')_{rms}$ (mrad)	$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{rms}$ (°/oo)	Pertes nucléaires
500	Cu	5,45	0,58	33,3	2,36	40 %
	Al	15,85	1,01	22,0	2,16	45 %
	B_4C	15,92	0,73	16,0	2,1	50 %
400	Cu	11,05	1,70	51,0	4,1	65 %
	Al	32,11	3,30	33,1	3,8	71 %
	B_4C	32,2	2,1	24,0	3,6	75 %
300	Cu	16,03	3,0	64,6	6,12	78 %
	Al	46,48	5,65	42,0	5,8	83 %
	B_4C	46,6	4,05	30,0	5,6	86 %

3.2 TRANSPORT SANS DEFLEXION FINALE

Les caractéristiques de ces faisceaux ont déjà fait l'objet d'un rapport [5] . Nous ne présentons donc que les compléments de cette étude, à savoir l'évaluation de l'intensité relative des faisceaux dégradés. La méthode et les hypothèses de calcul sont indiquées dans [5] page 22. Les valeurs numériques pour la diffusion multiple, le straggling et les pertes nucléaires sont données au paragraphe 2.1 .

Proportion des particules transmises après le dégradeur

Type de dégradeur	Optique selon figure \ Energie	500 MeV	400 MeV	300 MeV
B_4C	7	14,2 %	3,0 %	0,7 %
	8	8,0 %	1,6 %	0,5 %
	9	8,8 %	2,0 %	0,6 %
Al	7	12,0 %	2,0 %	0,4 %
Cu	7	8,7 %	1,7 %	0,5 %

Pour calculer ces valeurs, on a considéré comme ouverture le carré inscrit (5 cm x 5 cm) dans le tube de 7 cm de rayon.

3.3 TRANSPORT AVEC DEFLEXION FINALE

Lors d'une deuxième étape, il est prévu de faire subir une déflexion supplémentaire au faisceau, pour deux raisons :

- faire tourner la polarisation de 90° dans le plan horizontal de manière à obtenir une polarisation longitudinale à partir d'une polarisation transversale.
- possibilité de pouvoir diriger le faisceau dans plusieurs directions dans le hall expérimental. Il sera ainsi possible de conserver plusieurs expériences installées.

Dans ce paragraphe nous exposons les calculs entrepris et les conclusions qu'il est permis d'en tirer.

3.3.1 Disposition des éléments et contraintes

Aimant (AKC3)

Pour tourner la polarisation d'un faisceau de 400 Mev de 90° dans le plan horizontal, le calcul montre ([5] p. 8) qu'il faut une déflexion de 31°. Pour les calculs d'optique, nous avons choisi cet angle de déflexion, ainsi qu'un aimant de longueur 1,20 m.

Quadrupôles

Un doublet de quadrupôles (QKC9-10) est nécessaire pour refocaliser le faisceau après la deflexion finale. La position de QKC7-8 varie quelque peu suivant l'optique choisie. Comme dans [13] et [5] l'ouverture des quadrupôles a été choisie à 7,5 cm.

Fente

Les faisceaux dégradés présentent un étranglement horizontal à environ 4 m en aval de QKC5 (dans le "beam blocker"). Comme à cet endroit la dispersion (en $\frac{\Delta p}{p}$) du faisceau est grande, il peut être intéressant d'y introduire une fente. Ceci permettrait une séléction en impulsion et une meilleure définition du faisceau.

Achromatisme

Pour tous les calculs d'optique présentés ici, nous avons imposé l'achromatisme du faisceau après AKC3. Ce qui revient à dire que la trajectoire centrale pour des particules à $\frac{\Delta p}{p} \neq 0$ se confond avec l'axe du faisceau après AKC3 ($D = D' = 0$; cf [5] p 6-7).

Grâce à celà, la distribution spatiale et angulaire du faisceau est indépendante des impulsions (au 1er ordre en $\frac{\Delta p}{p}$). Cette contrainte est sévère pour l'optique car elle impose les champs dans QKC7-8.

3.3.2 Faisceaux dégradés à 400 MeV

Dans ce cas p = 0,954 GeV/c .

Nous avons commencé par l'étude de l'optique des faisceaux dégradés car ce sont eux qui présentent la plus grande émittance. Nous avons considéré le dégradeur comme une nouvelle source. Le transport de ces faisceaux doit donc être calculé depuis le dégradeur jusqu'à la cible expérimentale.

Comme dans [5], il y a deux polarités possibles pour QKC3-4.

A) Doublet QKC3-4 focalisant puis défocalisant X. (polarité droite)

Cette disposition correspond aux faisceaux présentés dans [5] aux figures 8 et 9. Au dégradeur, le choix des émittances est de :

$$\varepsilon_x = 0{,}8 \text{ cm} \times 16 \text{ mrad}$$
$$\varepsilon_y = 0{,}7 \text{ cm} \times 14 \text{ mrad}$$

Deux dispositions des éléments après le "beam-blocker" ont été étudiées:

Disposition: Solénoïde-QKC7-QKC8 (fig 2 & 3)

Le doublet QKC7-8 à été déplacé en amont pour pouvoir ramener la trajectoire de dispersion dans AKC3 pour l'achromatisme. La figure 2 montre la solution obtenue avec le solénoïde déconnecté. Pour le faisceau de la fig.3 on a choisi un champ de 17,9 kGauss dans la bobine de façon à réaliser une rotation de la polarisation de 90°. On remarque dans ce cas l'apparition d'une composante verticale de la trajectoire de dispersion. Elle est due au couplage que provoque le solénoïde entre les plans X et Y.

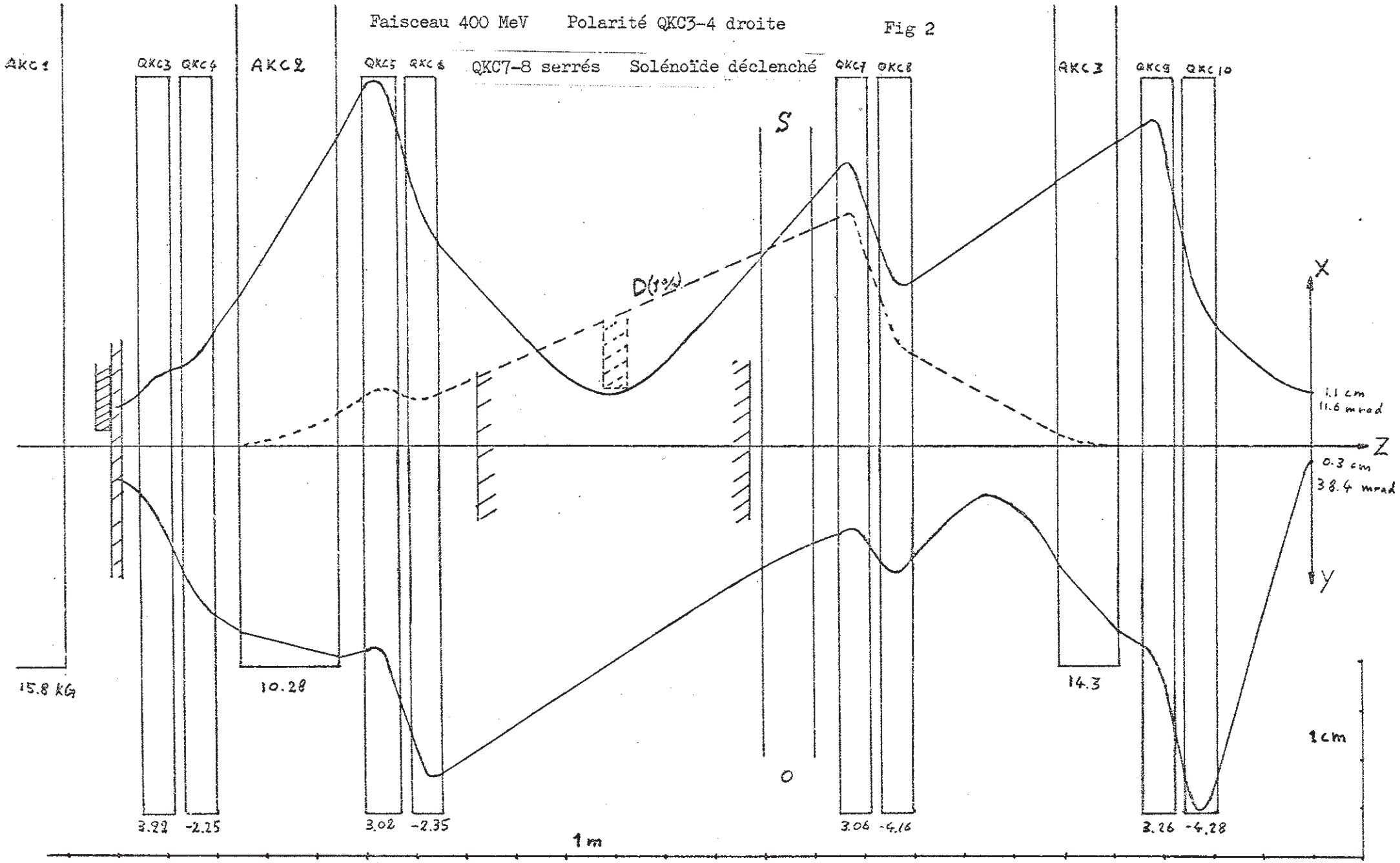
Les caractéristiques à la cible sont :

	sans solénoïde(2)	avec solénoïde (3)
X_{max} (cm)	1,1	2,1
X'_{max} (mrad)	11,6	9,0
Y_{max} (cm)	0,3	0,8
Y'_{max} (mrad)	38,4	22,1

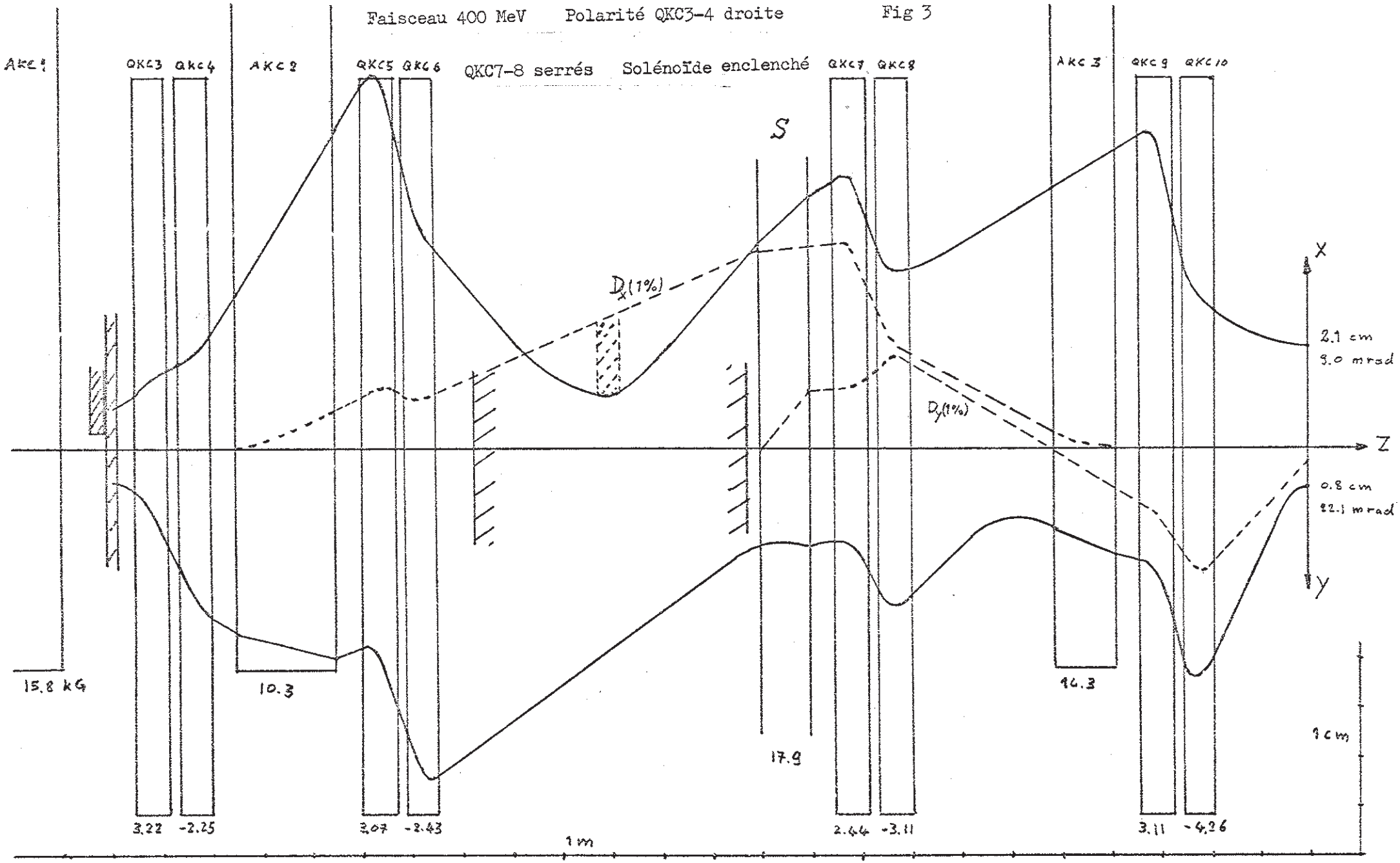
Ces dimensions penvent être modifiées en agissant sur les champs dans les lentilles QKC9-10.

Faisceau 400 MeV Polarité QKC3-4 droite Fig 2

QKC7-8 serrés Solénoïde déclenché



Faisceau 400 MeV Polarité QKC3-4 droite Fig 3



L'intensité relative de ces faisceaux a été évaluée à l'aide de la méthode citée dans [5] p. 21 , ainsi que $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{rms}$ présent à la cible. Compte tenu des pertes nucléaires et du straggling, on trouve, pour un dégradeur en B_4C :

	sans fente	avec fente
I_{rel}	2,00 %	1,44 %
$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{rms}$	3,2 ‰	2,3 ‰

Comme nous pouvions l'attendre, la fente améliore la résolution en impulsion.

<u>Disposition : QKC7-Solénoïde-QKC8</u> (fig 4 & 5)

Les quadrupôles QKC7 et QKC8 ont été écartés et placés de par et d'autre du solénoïde. QKC7 se trouve contre le Beam Blocker. Les solutions obtenues sont montrées aux figures 4 et 5, le solénoïde étant respectivement déconnecté et connecté.

Les caractéristiques à la cible sont :

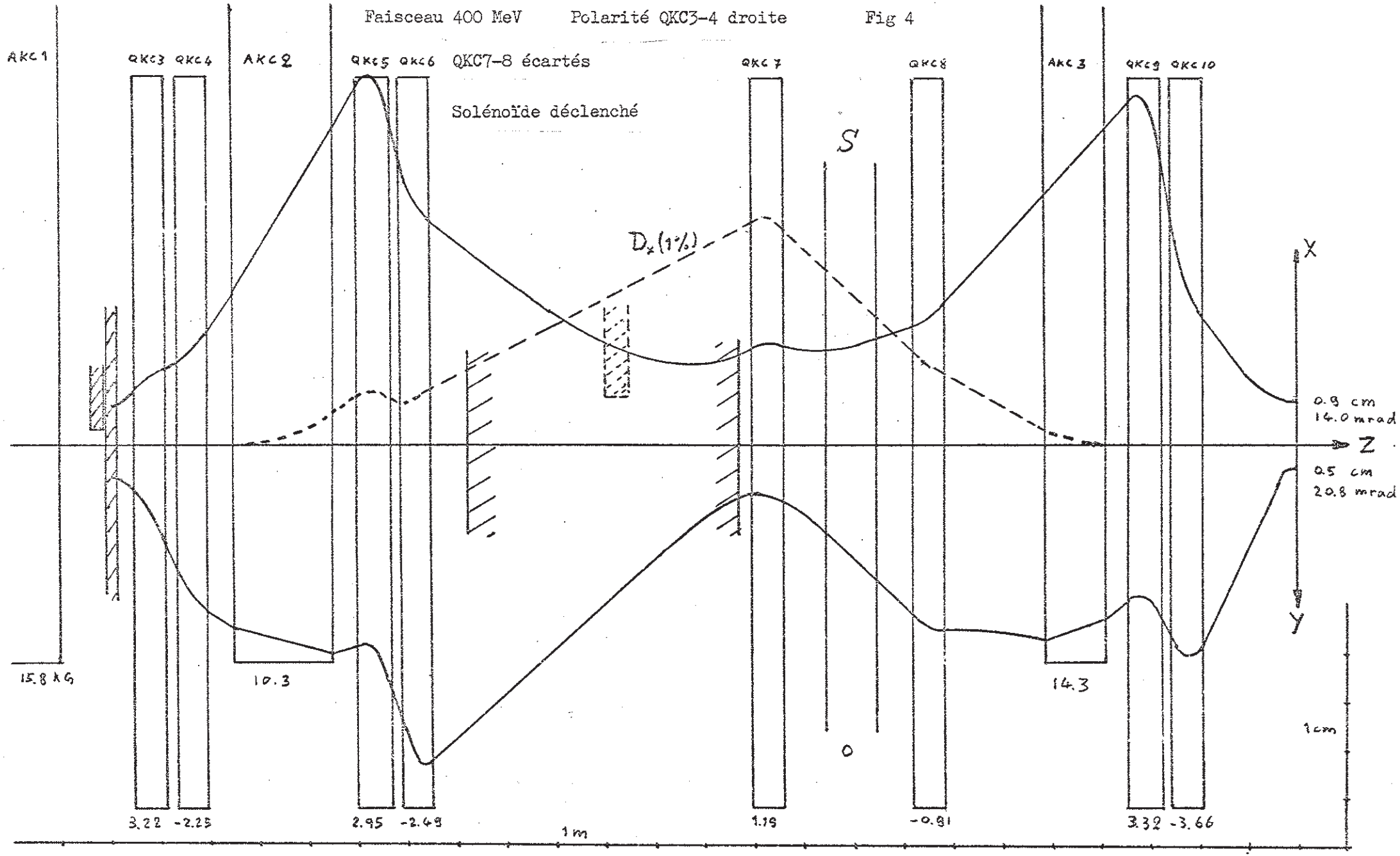
	sans solénoïde	avec solénoïde
X_{max} (cm)	0,9	1,2
X'_{max} (mrad)	14,0	13,1
Y_{max} (cm)	0,5	0,8
Y'_{max} (mrad)	20,8	18,9

Pour un dégradeur en B_4C, le calcul conduit à :

	sans fente	avec fente
I_{rel}	2,75 %	1,54 %
$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{rms}$	3,4 ‰	2,6 ‰

Les remarques faites à l'occasion du cas précédent s'appliquent ici également.

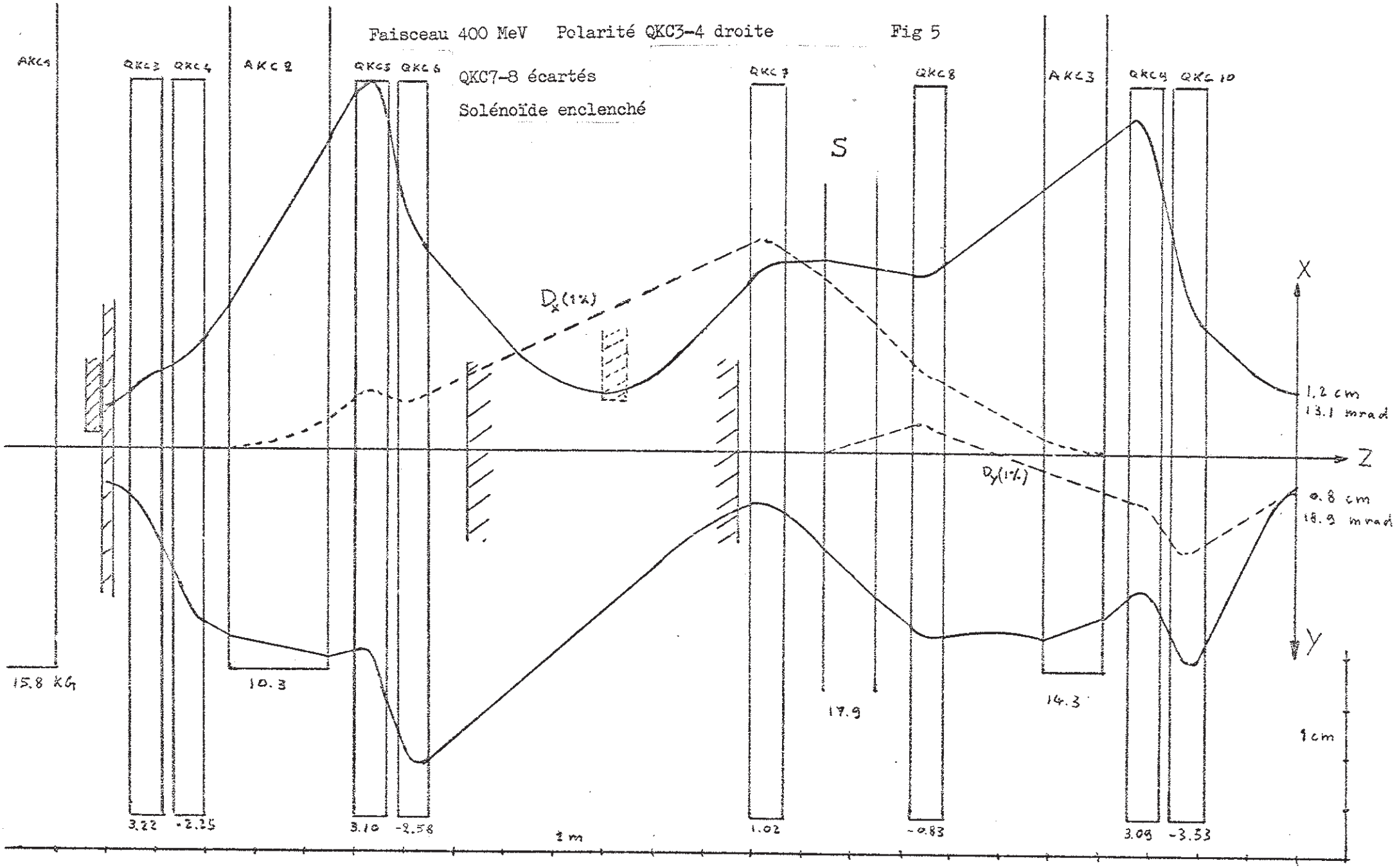
Faisceau 400 MeV Polarité QKC3-4 droite Fig 4



Faisceau 400 MeV Polarité QKC3-4 droite Fig 5

QKC7-8 écartés

Solénoïde enclenché



B) Doublet QKC3-4 défocalisant puis focalisant X (polarité inversée)

Cette disposition correspond au faisceau de la fig 7 présenté dans [5] . Dans ce cas, la trajectoire de dispersion est plus éloignée de l'axe. Ceci est dû au fait que la focalisation en X due à QKC5-6 est plus faible que précédemment. Pour obtenir l'achromatisme sans que le faisceau ne s'éloigne trop des limites qui lui sont imparties, il a été nécessaire de déplacer encore QKC7 en amont. De plus, comme l'émittance de ce faisceau est grande, il a fallu la réduire par l'introduction d'une fente.

Le calcul a été fait sans solénoïde. Les figures 6 et 7 montrent les solutions obtenues pour deux émittances de départ. Leurs caractéristiques sont :

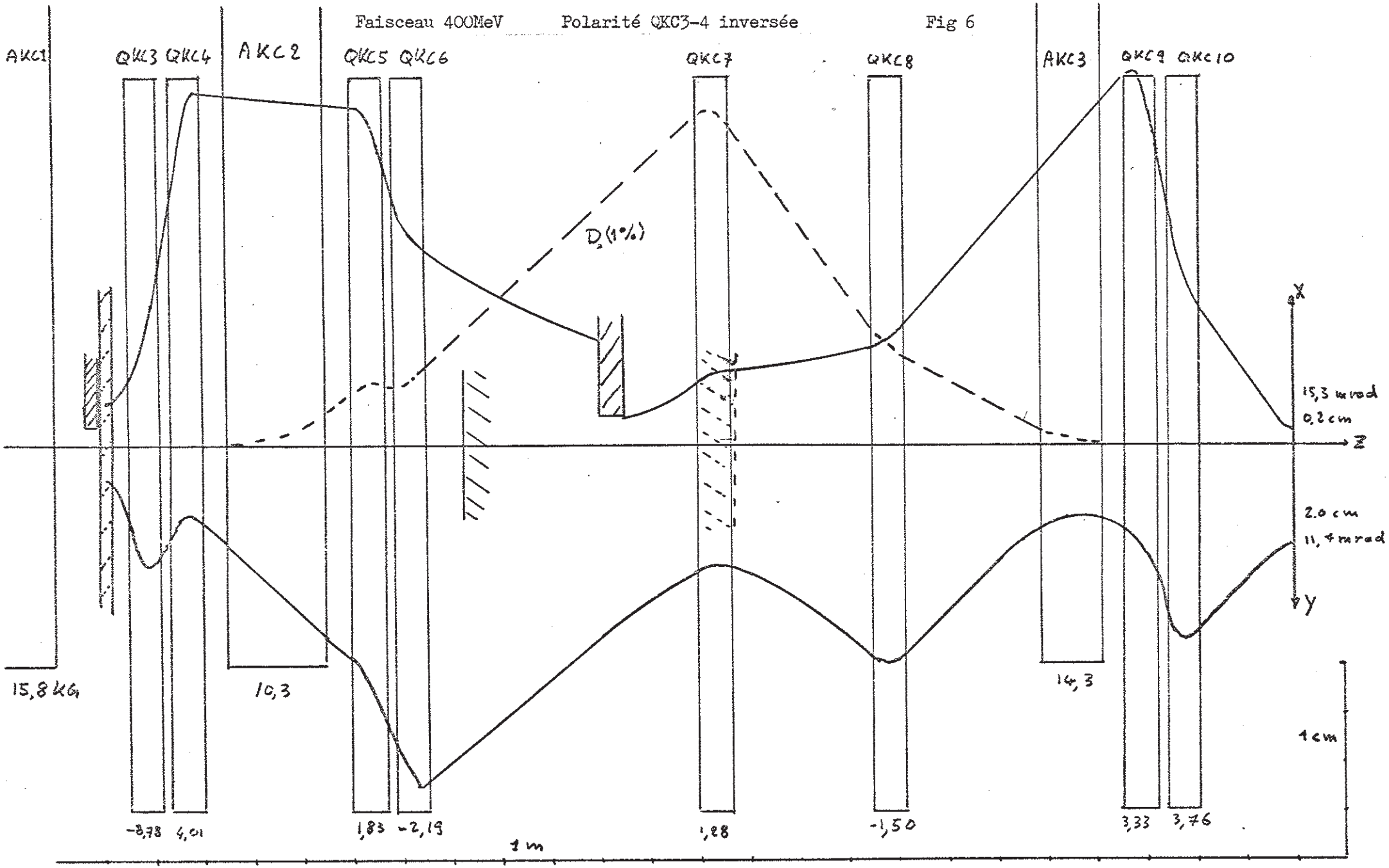
		fig 6	fig 7
Au dégradeur	ε_x (cm mrad)	0,8 x 20	0,8 x 20
	ε_y (cm mrad)	0,53x 35	0,7 x 13
A la cible	X_{max} (cm)	0,2	0,25
	X'_{max} (mrad)	15,3	14,9
	Y_{max} (cm)	2,0	0,5
	Y'_{max} (mrad)	11,7	19,8

En ayant pris une fente de 1 cm et un dégradeur en B_4C, nous trouvons:

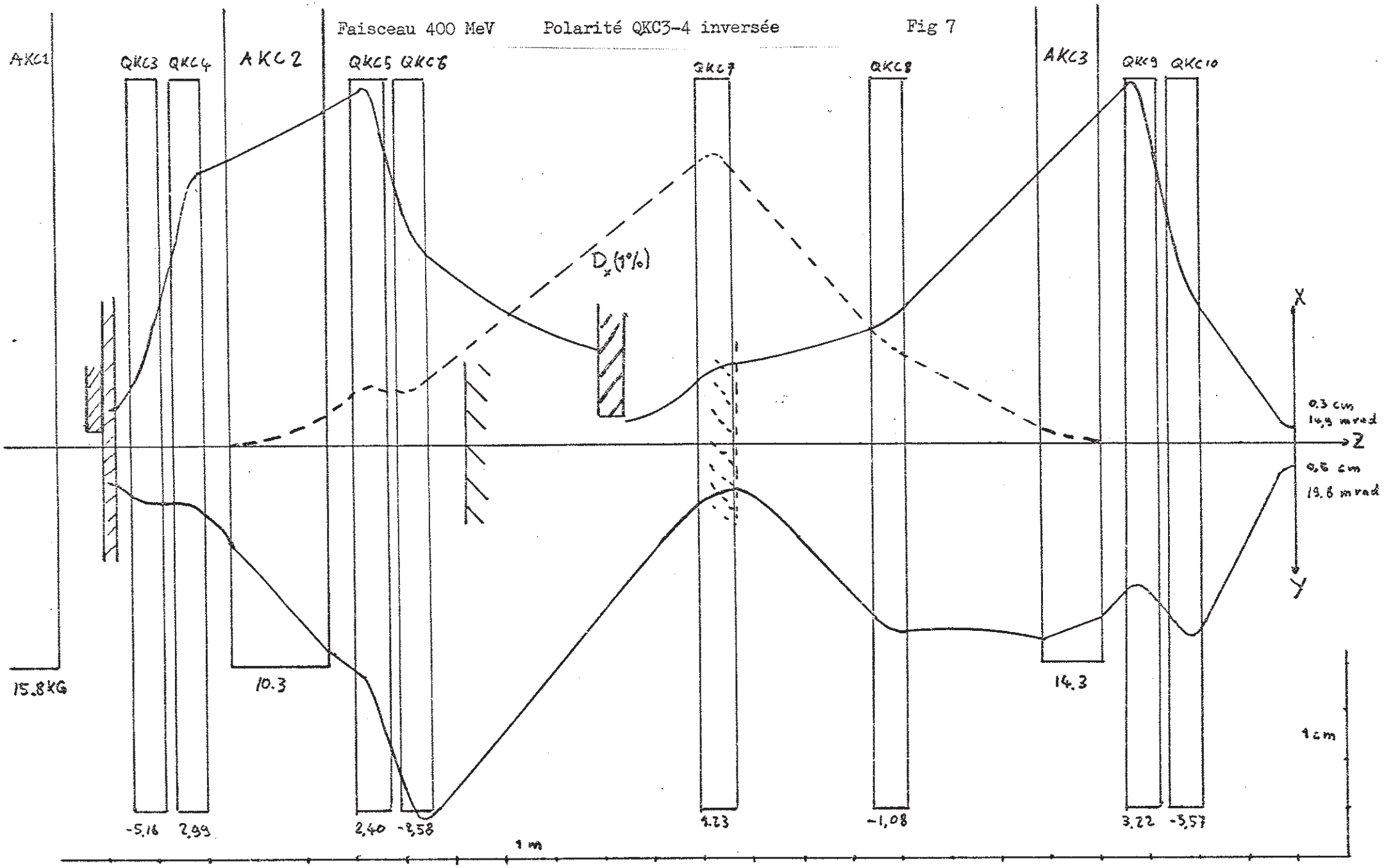
	fig 6	fig 7
I_{rel}	1,77 %	1,34 %
$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{rms}$	2,0 ‰	2,1 ‰

On voit que la résolution en $\frac{\Delta p}{p}$ est meilleure car la trajectoire de dispersion est plus éloignée de l'axe du faisceau à la fente.

Faisceau 400MeV Polarité QKC3-4 inversée Fig 6



Faisceau 400 MeV Polarité QKC3-4 inversée Fig 7



3.3.3 Faisceaux non dégradés

Dans ce cas, p = 1.207 GeV/c (590 MeV).

Nous devons considérer le transport de deux faisceaux: (voir fig 1)

A) Faisceau diffusé (0.8 nA) issu de la cible M, elle-même placée dans le faisceau primaire de 100 μA.

B) Faisceau direct polarisé provenant de l'accélérateur (30 nA) et défléchi par AKB 1.

Ces faisceaux forment un "waist" en M, qui peut donc être considérée comme une nouvelle source. Leur transport sans déflexion finale (AKC 3) est exposé dans [13] et [5].

Pour un transport achromatique avec déflexion finale, il n'est pas nécessaire de modifier l'optique jusqu'à la fente-dégradeur. En revanche, il faut modifier les champs dans QKC3-4 de façon à obtenir une trajectoire de dispersion négative dans AKC2. Ceci est nécessaire pour réaliser l'achromatisme à l'aide de QKC7-8 et de AKC3 (voir fig 8-9).

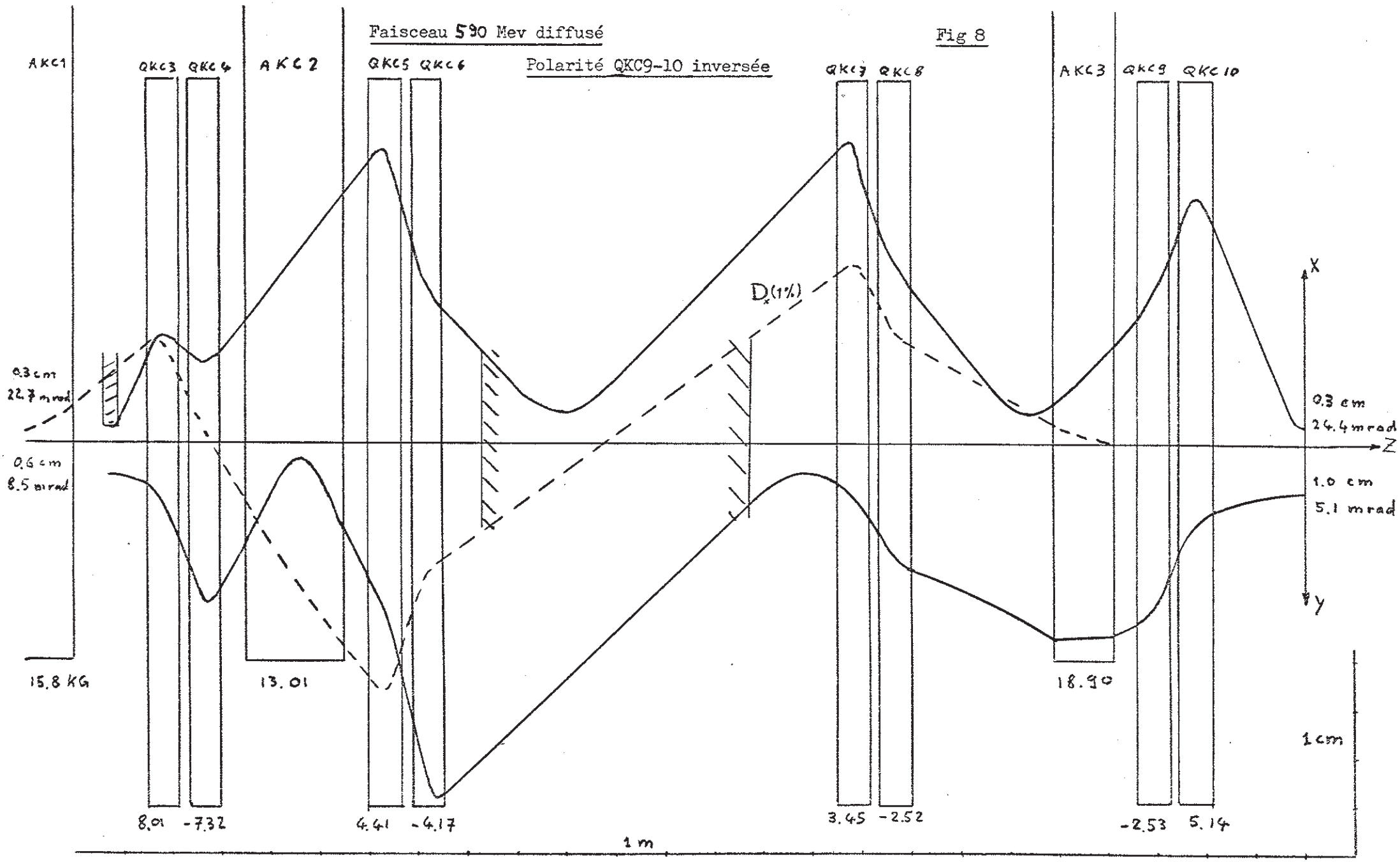
On présente ci-après les solutions achromatiques obtenues, sans toutefois prétendre qu'elles soient les meilleures possibles. Les figures montrent le profil du faisceau entre la fente et la cible expérimentale. Pour le tronçon précédent, on peut se référer à [13] et [5].

A) Faisceau diffusé. (fig 8)

Les caractéristiques de la solution obtenue sont exposées dans le tableau suivant:

	Cible M	Fente	Cible expérimentale
X_{max} (cm)	0.3	0.29	0.27
X'_{max} (mrad)	22.0	22.7	24.4
Y_{max} (cm)	0.3	0.6	1.0
Y'_{max} (mrad)	17.0	8.5	5.1

Compte tenu des dimensions du faisceau à la sortie d'AKC3, il a fallu choisir la polarité "défoc.-foc." pour le doublet QKC9-10 afin de pouvoir convenablement refocaliser le faisceau.


Faisceau 590 Mev diffusé
Polarité QKC9-10 inversée
Fig 8
AKC1
QKC3
QKC4
AKC2
QKC5
QKC6
QKC7
QKC8
AKC3
QKC9
QKC10
D_x(1%)
X
Z
y
0.3 cm
22.7 mrad
0.6 cm
8.5 mrad
0.3 cm
24.4 mrad
1.0 cm
5.1 mrad
15.8 KG
13.01
18.90
1 cm
8.01
-7.32
4.41
-4.17
3.45
-2.52
-2.53
5.14
1 m

B) Faisceau direct. (fig 9-10)

On a envisagé les deux polarités possibles pour le doublet QKC9-10:

- "défoc.-foc." en X à la fig 9.
- "foc.-défoc." en X à la fig 10.

En plus de l'achromatisme, on a imposé, à la cible, les contraintes:

- $X_{max} \leq 1$ cm
- $Y_{max} \leq 1$ cm
- "waist" dans le plan X

Les caractéristiques des solutions sont résumées dans le tableau suivant:

	M	Fente	Cible expérimentale	
			Fig 9	Fig 10
X_{max} (cm)	0.3	0.29	0.13	0.63
X'_{max} (mrad)	10.0	10.3	23.6	4.7
Y_{max} (cm)	0.3	0.87	1.0	1.0
Y'_{max} (mrad)	10.0	4.2	8.8	19.7

3.3.4 Remarques

Les calculs présentés ici montrent qu'il est possible de réaliser un transport achromatique des divers faisceaux dans de bonnes conditions.

Les principes de réglage des faisceaux dégradés et de ceux avec déflexion finale, doivent encore être définis. Le réglage des faisceaux 600 MeV sans déflexion finale est exposé par M. Guignard dans [13].

Les solutions obtenues ne prétendent pas être les seules possibles; en effet, d'autres choix dans les signes ou les valeurs des champs pourraient probablement conduire à des solutions acceptables.

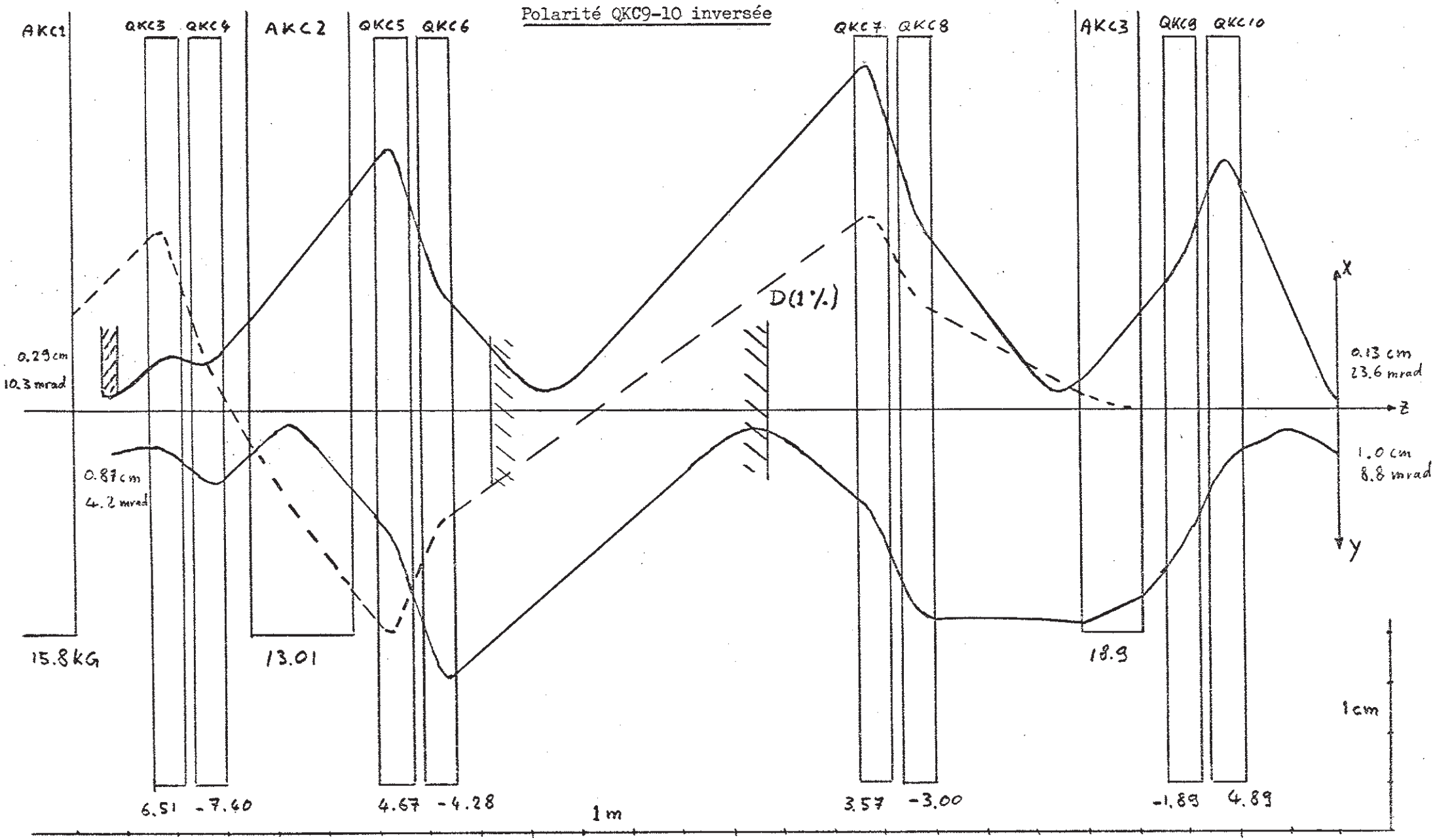
Lors de la conception de l'optique des faisceaux, on s'est heurté à des difficultés plus importantes que prévu pour deux raisons principales:

- Forte corrélation entre les contraintes (dimensions du faisceau, achromatisme) et les variables (valeurs des champs) ce qui ne facilite pas une vision intuitive du phénomène. De plus, l'efficacité de l'ajustement automatique des variables par les programmes de calcul est limitée aux régions proches d'une solution.

Faisceau 590 MeV direct

Fig 9

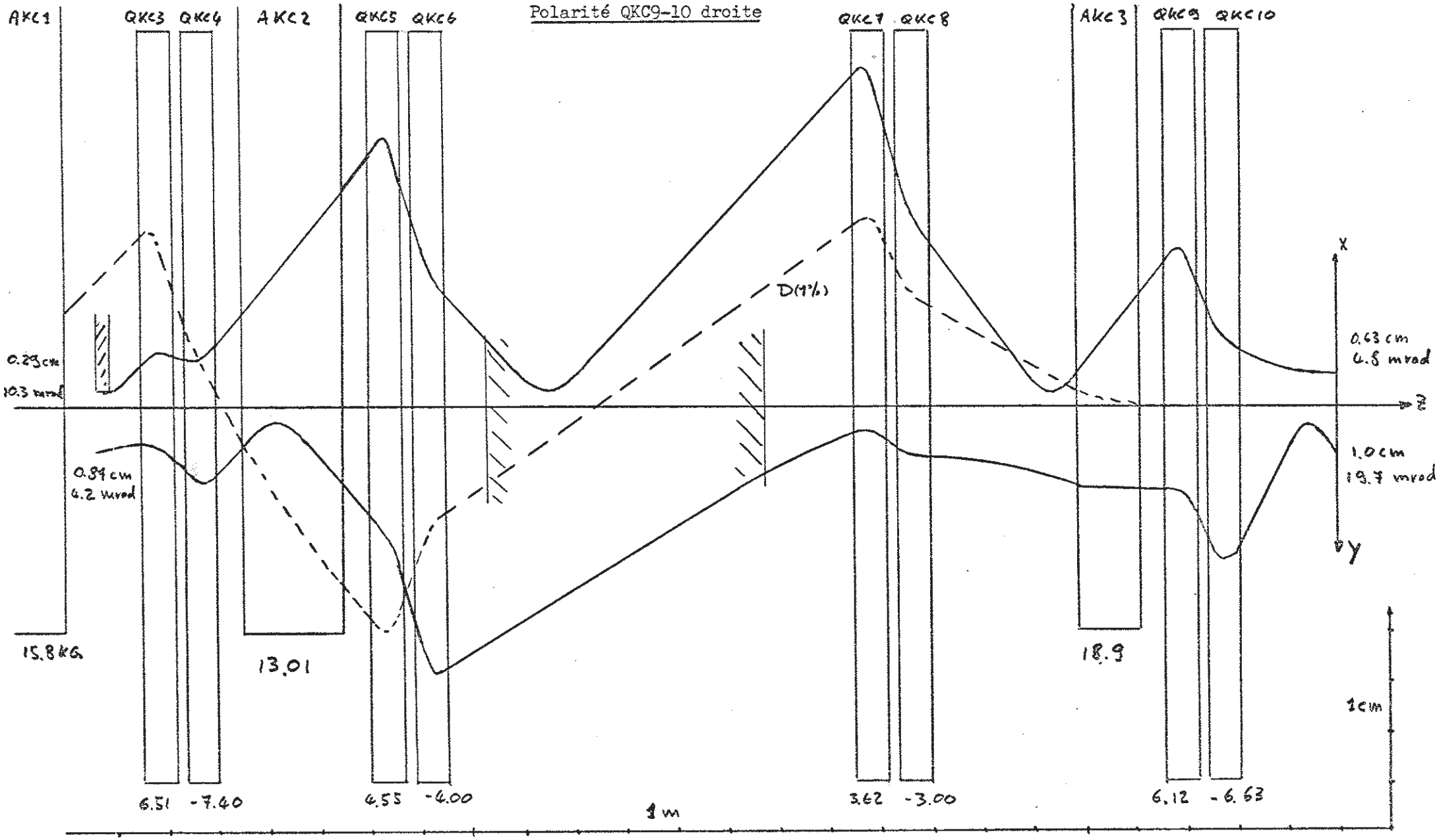
Polarité QKC9-10 inversée



Faisceau 590 MeV direct

Fig 10

Polarité QKC9-10 droite



- Délai important entre une idée et sa sanction par le calcul. Ce délai est dû à la codification, au temps de passage du job et à l'interprétation et à la visualisation du résultat.

Un système de calcul d'optique interactif et pourvu de moyens de visualisation apporterait sans doute une aide appréciable. Un tel système est actuellement mis au point au CERN (BETON).

REFERENCES

1) K.G. Steffen : "High Energy Beam Optics" J.Wiley (1965)

2) A.P. Banford : "The Transport Of Charged Particles Beams" (1966)

3) K.L. Brown & S.K. Howry : SLAC report No 91 (1970)

4) K.L. Brown : SLAC report No 75 (1969)

5) D.Rapin, R.Hess, J.-C.Niklès & D.W.Werren : "Faisceaux secondaires de protons ..." Univ. Genève (1971)

6) R. Frosch & E. Steiner : SIN TM-09-20 (1971)

7) D.N.Edwards & B.Rose : NIM 7 135 (1960)

8) G. Besnier : CERN 70-11 (DMSC)

9) M.Froissart & R.Stora : NIM 7 297 (1960)

10) Ph. Rosselet : "Propriétés e.-m. des particules" ens. 3e cycle phys. Suisse romande H 70-71

11) R.R.Stevens Jr & G.G.Ohlsen : Proc. of the 3d Inter. Symposium, Madison 1970 Polarization phenomena in nuclear reactions Ed: Barschall & Haeberli

12) G. Guignard : "Faisceau de protons primaires alimentant les cibles externes" SIN TM-09-17 (1971)

13) G. Guignard : "Faisceaux secondaires de protons polarisés" SIN TM-09-22 (1971)

Appendice A

RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DU SPIN DANS LE SOLENOIDE

Nous devons résoudre :

$$\begin{pmatrix} S_1'(z) \\ S_2'(z) \\ S_3'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & a\sin(kz) - b\cos(kz) \\ -c & 0 & a\cos(kz) + b\sin(kz) \\ -a\sin(kz) + b\cos(kz) & -[a\cos(kz) + b\sin(kz)] & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1(z) \\ S_2(z) \\ S_3(z) \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

Avec : $k = \dfrac{eB}{p}$

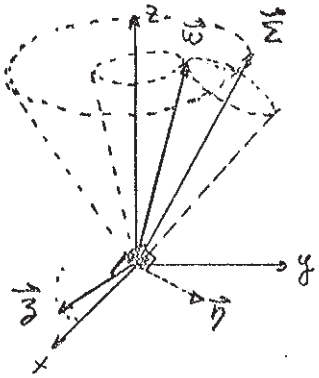
$a = -\mu_a(\gamma-1)X_0' \cdot k$

$b = -\mu_a(\gamma-1)Y_0' \, k$

$c = k(1+\mu_a)$

C'est un mouvement de rotation autour d'un axe instantané qui précéssionne autour de l'axe Z. Il est du type : $\vec{S}'(z) = \vec{S}(z) \times \vec{\omega}(z)$.

La cinématique du corps solide nous apprend que l'axe instantané de rotation $\vec{\omega}$ décrit dans le référentiel fixe le cône base et dans le référentiel lié au solide le cône roulette. L'axe du cône roulette et l'axe $\vec{\omega}$ tournent autour de Z à la même fréquence k. Soit $\vec{\Sigma}$ l'axe de cône roulette, c'est une solution particulière de l'équation (A.1):



$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} a\cos(kz) + b\sin(kz) \\ -a\sin(kz) + b\cos(kz) \\ c - k \end{pmatrix}$$

Le vecteur solution aura une composante selon $\vec{\Sigma}$ et une autre composante $\vec{T}$ perpendiculaire à $\vec{\Sigma}$. Elle lui tournera autour avec une fréquence $\omega \neq k$.

Changeons de notations:

$$a\cos(kz) + b\sin(kz) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(kz+\varphi)$$

$$-a\sin(kz) + b\cos(kz) = -\sqrt{a^2+b^2}\sin(kz+\varphi)$$

avec : $tg\,\varphi = -\dfrac{b}{a}$

D'où :
$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2}\cos(kz+\varphi) \\ -\sqrt{a^2+b^2}\sin kz+\varphi \\ c-k \end{pmatrix}$$

(A.1) devient :
$$\vec{S}(z) = \begin{pmatrix} 0 & c & \sqrt{\ }\sin(kz+\varphi) \\ -c & 0 & \sqrt{\ }\cos(kz+\varphi) \\ -\sqrt{\ }\sin(kz+\varphi) & -\sqrt{\ }\cos(kz+\varphi) & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{S}(z) \quad (A.2)$$

Soient: $\vec{\xi}$ vecteur unité $\perp$ à $\vec{\Sigma}$ dans le plan XY

$\vec{\eta}$ vecteur unité $\perp$ à $\vec{\Sigma}$ et à $\vec{\xi}$.

Ces vecteurs sont solidaires de $\vec{\Sigma}$ et tournent avec lui. Ils s'expriment comme:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \sin(kz+\varphi) \\ \cos(kz+\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}} \begin{pmatrix} \cos(kz+\varphi) \\ -\sin(kz+\varphi) \\ -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c-k} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{T}$ qui tourne autour de $\vec{\Sigma}$ à la fréquence ω, peut s'exprimer à l'aide de $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$: $\vec{T} = \left(d\cos(\omega z) + e\sin(\omega z)\right)\vec{\xi} + \left(-d\sin(\omega z) + e\cos(\omega z)\right)\vec{\eta}$

En composantes:
$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sin(kz+\varphi)\left(d\cos\omega z + e\sin(\omega z)\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}}\cos(kz+\varphi)\left(-d\sin(\omega z) + e\cos(\omega z)\right) \\ \cos(kz+\varphi)\left(d\cos(\omega z) + e\sin(\omega z)\right) - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}}\sin(kz+\varphi)\left(-d\sin(\omega z) + e\cos(\omega z)\right) \\ -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(c-k)^2+a^2+b^2}}\left(-d\sin(\omega z) + e\cos(\omega z)\right) \end{pmatrix}$$

On peut montrer que $\vec{T}$ satisfait l'équation différentielle (A.2). <u>La solution générale</u> s'écrira:

$$\boxed{\vec{S}(z) = \vec{T}_{d,e}(z) + f\cdot\vec{\Sigma}(z)} \quad (A.3)$$

($\vec{T}$ dépend des conditions initiales d et e)
et $\omega = -\sqrt{(c-k)^2+a^2+b^2}$

Il faut maintenant exprimer $\vec{S}$ avec d'autres <u>conditions initiales</u> (S_{01};S_{02};S_{03}) et non plus d, e & f .

Si z=0, on a $\vec{S} = \vec{S}_0$ c'est à dire : $\vec{T}_{d,e}(0) + f\vec{\Sigma}(0) = \vec{S}_0$

En composantes:

$$(A.4) \begin{cases} d\sin\varphi + e\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}}\cos\varphi + f\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi = S_{01} \\ d\cos\varphi - e\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}}\sin\varphi - f\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi = S_{02} \\ -e\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(c-k)^2+a^2+b^2}} + f(c-k) = S_{03} \end{cases}$$

On résoud maintenant le système (A.4) et l'on remplace $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par leurs valeurs (voir bas de la page A 1). On trouve alors:

$$d = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} S_{01} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} S_{02}$$

$$e = \frac{a(c-k) S_{01} + b(c-k) S_{02} - (a^2+b^2) S_{03}}{\sqrt{a^2+b^2+(c-k)^2}}$$

$$f = \frac{a S_{01} + b S_{02} + (c-k) S_{03}}{a^2+b^2+(c-k)^2}$$

On remplace alors d , e & f par leurs valeurs ci-dessus dans la solution générale (A.3). On regroupe les termes en mettant en évidence les S_{oi} . Après un calcul relativement long, on obtient une expression du type:

$$\boxed{\vec{S}(z) = A(z) \cdot \vec{S}_0}$$

<u>A(z) est la matrice de transfert cherchée.</u>

Les éléments de la matrice A sont donnés ci-après. avec $\omega = -(c-k)\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}$

$$= -\sqrt{(c-k)^2 + a^2+b^2}$$

$$A_{11}(z) = \sin kz \cos\omega z \frac{-ab}{\omega^2} + \sin kz \sin\omega z \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}} + \cos kz \cos\omega z \frac{b^2+(c-k)^2}{\omega^2}$$

$$+ \sin kz \frac{ab}{\omega^2} + \cos kz \frac{a^2}{\omega^2}$$

$$A_{12}(z) = \sin kz \cos\omega z \frac{a^2+(c-k)^2}{\omega^2} + \cos kz \sin\omega z \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}} + \cos kz \cos\omega z \frac{-ab}{\omega^2}$$

$$+ \sin kz \frac{b^2}{\omega^2} + \cos kz \frac{ab}{\omega^2}$$

$$A_{13}(z) = \frac{(a \sin kz - b \cos kz) \sin\omega z}{\omega} + \frac{c-k}{\omega^2}(a\cos kz + b\sin kz)(1-\cos\omega z)$$

$$A_{21}(z) = \cos kz \cos\omega z \frac{-ab}{\omega^2} + \cos kz \sin\omega z \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}} + \sin kz \cos\omega z \frac{-(c-k)^2-b^2}{\omega^2}$$

$$+ \sin kz \frac{-a^2}{\omega^2} + \cos kz \frac{ab}{\omega^2}$$

$$A_{22}(z) = \cos kz \cos\omega z \frac{(c-k)^2+a^2}{\omega^2} + \sin kz \cos\omega z \frac{ab}{\omega^2} + \sin kz \cdot \sin\omega z \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{(c-k)^2}}}$$

$$+ \sin kz \frac{-ab}{\omega^2} + \cos kz \frac{b^2}{\omega^2}$$

$$A_{23}(z) = \frac{(a\cos kz + b\sin kz)\sin\omega z}{\omega} + \frac{c-k}{\omega^2}(-a\sin kz + b\cos kz)(1-\cos\omega z)$$

$$A_{31}(z) = \frac{b}{\omega}\sin\omega z - \frac{a(c-k)}{\omega^2}(\cos\omega z - 1)$$

$$A_{32}(z) = -\frac{a}{\omega}\sin\omega z - \frac{b(c-k)}{\omega^2}(\cos\omega z - 1)$$

$$A_{33}(z) = \frac{(a^2+b^2)\cos\omega z + (c-k)^2}{\omega^2}$$

Approximation du 1er ordre en a et b

Si a et b sont petits (les produits $(\gamma-1)X'$ et $(\gamma-1)Y'$ sont petits), on peut négliger les termes en a^2, b^2 et ab dans la matrice A. Elle devient:

$$\begin{pmatrix} \sin kz \sin\omega z + \cos kz \cos\omega z & \sin kz \cos\omega z - \cos kz \sin\omega z & (a\sin kz - b\cos kz)\dfrac{\sin\omega z}{\omega} + (a\cos kz + b\sin kz)\dfrac{(1-\cos\omega z)}{\omega} \\ \cos kz \sin\omega z - \sin kz \cos\omega z & \sin kz \sin kz + \cos kz \cos\omega z & (a\cos kz + b\sin kz)\dfrac{\sin\omega z}{\omega} + (a\sin kz - b\cos kz)\dfrac{1-\cos\omega z}{\omega} \\ \dfrac{b}{\omega}\sin\omega z + \dfrac{a}{\omega}(\cos\omega z - 1) & -\dfrac{a}{\omega}\sin\omega z + \dfrac{b}{\omega}(\cos\omega z - 1) & 1 \end{pmatrix}$$

Avec: $\omega \simeq -(c-k) = -k\cdot\mu_a$

En se rappelant que:

$$\sin kz \cdot \sin\omega z + \cos kz \cdot \cos\omega z = \cos(k-\omega)z$$

$$\sin kz \cos\omega z - \cos kz \sin\omega z = \sin(k-\omega)z$$

$$k-\omega = k+c-k = c = k(1+\mu_a)$$

$$\left.\begin{aligned} X'(z) &= X'_0 \cos kz + Y'_0 \sin kz \\ Y'(z) &= -X'_0 \sin kz + Y'_0 \cos kz \end{aligned}\right\} \text{optique}$$

$$a = -\mu_a(\gamma-1)X'_0 \cdot k$$

$$b = -\mu_a(\gamma-1)Y'_0 \cdot k$$

$$c = (1+\mu_a)\,k$$

On obtient finalement :

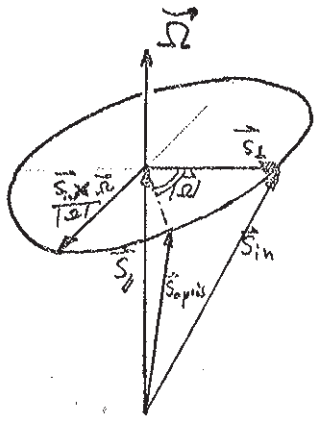
$$\begin{pmatrix} \cos((1+\mu_a)kz) & \sin((1+\mu_a)kz) & (\gamma-1)\sin(\mu_a kz)\,Y'(z) - (\gamma-1)X'(z)(1-\cos(\mu_a kz)) \\ -\sin((1+\mu_a)kz) & \cos((1+\mu_a)kz) & -(\gamma-1)X'(z)\sin(\mu_a kz) - (\gamma-1)Y'(z)(1-\cos(\mu_a kz)) \\ -(\gamma-1)Y'_0\sin(\mu_a kz) - (\gamma-1)X'_0(1-\cos(\mu_a kz)) & (\gamma-1)X'_0\sin(\mu_a kz) - (\gamma-1)Y'_0(1-\cos(\mu_a kz)) & 1 \end{pmatrix}$$

Appendice B

CALCUL DE LA MATRICE DE TRANSFERT DU SPIN DANS UN AIMANT DE SECTEUR

Nous devons trouver la matrice d'une rotation d'angle $|\vec{\Omega}|$ autour d'un axe de direction : $\vec{\Omega} = (0 ; \omega_2 ; \omega_3)$

avec : $|\omega_3| << |\omega_2|$



La figure ci-contre montre que :

$$\vec{S}_{après} = \vec{S}_{//} + \vec{S}_\perp \cos|\vec{\Omega}| + \frac{\vec{S}_{in}\times\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}\sin|\vec{\Omega}|$$

avec : $\vec{S}_{//} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{\Omega}}{\Omega^2}\vec{\Omega}$ et $\vec{S}_\perp = \vec{S}_{in} - \vec{S}_{//}$

$\vec{S}_{in} = (S_1 ; S_2 ; S_3)$

Calcul de $|\vec{\Omega}|$

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} \simeq |\omega_2|$$

Calcul de $\vec{S}_{//}$, $\vec{S}_\perp$ et $\vec{S}\times\vec{\Omega}$

$$\vec{S}_{//} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{\Omega}}{\Omega^2}\vec{\Omega} = \frac{S_2\omega_2 + S_3\omega_3}{\omega_2^2}(0, \omega_2, \omega_3) = \left(0 ; S_2 + \frac{\omega_3}{\omega_2}S_3 ; \frac{\omega_3}{\omega_2}S_2 + \cancelto{0}{\frac{\omega_3^2}{\omega_2^2}}S_3\right)$$

$$\vec{S}_\perp = \vec{S} - \vec{S}_{//} = \left(S_1 ; -\frac{\omega_3}{\omega_2}S_3 ; -S_2\frac{\omega_3}{\omega_2} + S_3\right)$$

$$\vec{S}\times\vec{\Omega} = (S_2\omega_3 - S_3\omega_2 ; -S_1\omega_3 ; S_1\omega_2)$$

Calcul de $\vec{S}_{après}$

$$\vec{S}_{après} = \vec{S}_{//} + \vec{S}_\perp \cos\omega_2 + \frac{\vec{S}_{in}\times\vec{\Omega}}{|\omega_2|}\sin|\omega_2|$$

$$= \Big(0 + S_1\cos\omega_2 + S_2\frac{\omega_3}{\omega_2}\sin\omega_2 - S_3\sin\omega_2 ; S_2 + \frac{\omega_3}{\omega_2}S_3(1-\cos\omega_2) - S_1\frac{\omega_3}{\omega_2}\sin\omega_2 ;$$

$$S_2\frac{\omega_3}{\omega_2}(1-\cos\omega_2) + S_3\cos\omega_2 + S_1\sin\omega_2\Big)$$

On obtient finalement :

$$\vec{S}_{après} = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 & \frac{\omega_3}{\omega_2}\sin\omega_2 & -\sin\omega_2 \\ -\frac{\omega_3}{\omega_2}\sin\omega_2 & 1 & \frac{\omega_3}{\omega_2}(1-\cos\omega_2) \\ \sin\omega_2 & \frac{\omega_3}{\omega_2}(1-\cos\omega_2) & \cos\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

Appendice C

PROGRAMMES UTILISES

Les pages qui suivent décrivent les programmes d'ordinateurs utilisés, développés ou créés à l'occasion de ce travail. Pour les programmes TRAMP, TRANSPORT et IPSOFACTO, on s'est borné à un résumé succinct, référence étant faite aux descriptions complètes écrites par les auteurs de ces programmes.

Les programmes POLAR et POLQUAD qui calculent la dépolarisation d'un faisceau en intégrant l'équation (2.1), ne sont pas décrits ici. Leur emploi est limité au cas d'un solénoïde ou d'un doublet de quadrupôles.

Programme T R A M P

Résumé :

Ce programme, développé par MM. Gardner et Whiteside, permet de calculer des trajectoires et enveloppes d'un faisceau (Tracking) et d'ajuster certains paramètres afin de remplir certaines conditions optiques (Matching). Les commandes se font par cartes données.

Après avoir lu les éléments du système, le programme est en état de "Matching". Il peut alors, sous commande, ajuster certains paramètres.

Une carte (M=501) permet alors de passer en état de "Tracking". On choisit alors les éléments après lesquels on désire connaître les valeurs des trajectoires et/ou enveloppes. Les valeurs actuelles des éléments sont alors imprimées.

Sous l'action de cartes de commande le programme donne:

- pour les trajectoires: valeurs de X et X' (Y,Y') à la fin des éléments choisis.
- pour les enveloppes: valeurs de Xmax (Ymax), du demi-axe de l'ellipse de phase et de son inclinaison; à la fin des éléments choisis.

Après cela une carte du type T=15 peut remettre le programme en état de "Matching", ou indiquera la fin du traitement d'un faisceau si T=20.

Pour les détails et pour un exemple d'utilisation on peut consulter la description complète. (CERN W100)

Programme P L O T R A M P

Principe et utilisation

Ce programme traite TRAMP comme sous-routine et utilise ses résultats pour établir (sur imprimante) le dessin du système optique, des trajectoires et des enveloppes dans les plans verticaux et horizontaux. Les données nécessaires à TRAMP et l'impression des résultats n'ont pas été modifiés sensiblement.

Sur le dessin, les trajectoires sont représentées par (.) et les enveloppes par (*). Entre les limites des éléments autres que du type "Drift Length", les trajectoires et les enveloppes sont représentées par des courbes du 3e degré. Dans les "Drift Length",les trajectoires sont des droites et les enveloppes sont des hyperboles.

L'axe Z est gradué en [m] et les axes X et Y le sont en [cm]. Les valeurs des champs,les longueurs des éléments sont indiquées sur le dessin.

Options: Soit IPLOT = 0 : pas de dessin.
1 : plans X et Y (H et V) sur le même dessin.
2 : plans X et Y sur dessins séparés.

Echelles : Soient SCALEX : nb. de positions par cm (X et Y)
SCALE(1) : " " " " m (longueur)
SCALE(2) : " " " " G/cm (quad. foc)
SCALE(3) : " " " " G/cm (quad défoc)
SCALE(4) : " " " " kG (bend)
SCALE(5) : " " " " kV/cm (VS)

Données : Elles ont la forme suivante :

1er cas
- IPLOT,SCALEX,(SCALE(I),I=1,5) (I10,6F10.3)
- TITRE (avec caractère de contrôle) (10A8)
- . . .
. . . . } données habituelles de TRAMP
. . . .
- 20

autres cas
- IPLOT,SCALEX,(SCALE(I),I=1,5)
. . . . etc.
. . . .
- 20

- end of file

Remarques :
- Un nouveau dessin commence chaque fois que TRAMP passe de l'état "Matching" à l'état "Tracking".
- Au début de la phase de "Tracking"(après M=501), il faut sélectionner l'impression après tous les éléments (J=0). Sinon le dessin est supprimé.
- Les points dépassant les limites du dessin sont simplement omis.
- Si la longueur d'un élément dépasse 60 lignes d'imprimante, cet élément est remplacé par un message. Les graduations de l'axe Z ne sont pas affectées.

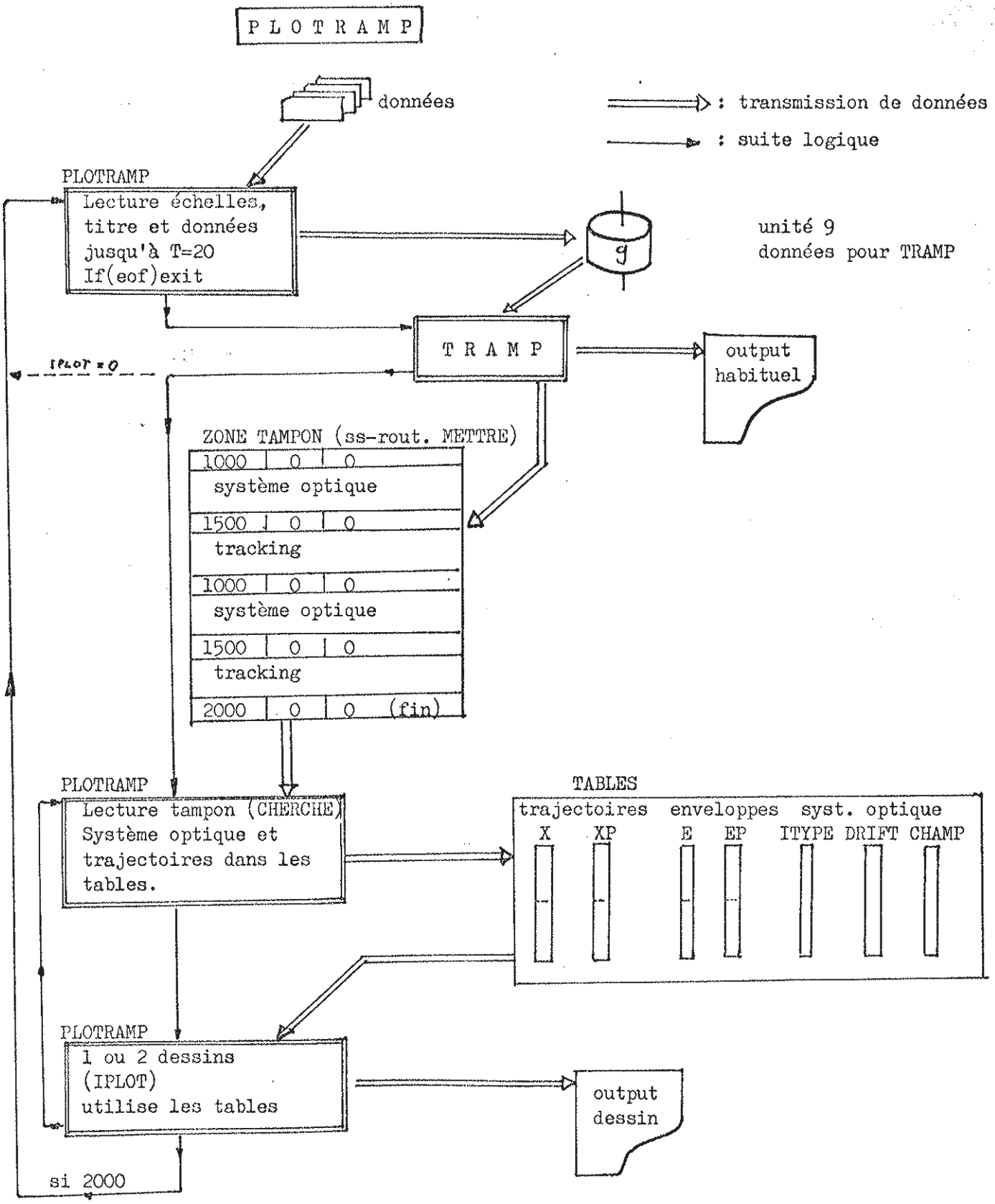
Fonctionnement

La transmission des données de TRAMP à PLOTRAMP est faite à l'aide d'une zone tampon gérée par une sous-routine METTRE. Cette sous-routine comporte les"entry points" METTRE, CHERCHE et REINIT.

A chaque impression de TRAMP relative au système optique,aux trajectoires ou aux enveloppes, il correspond un appel à METTRE. A cet effet, TRAMP a été modifié pour le calcul de la pente des enveloppes.

Lorsque TRAMP a terminé, PLOTRAMP parcourt la zone tampon et met à jour des tables dans lesquelles se trouvent le système optique et les caractéristiques des trajectoires et des enveloppes. Finalement,le dessin est imprimé.

L'organigramme de la page suivante montre la suite des opérations et le parcours des données.



N.B: X,XP,E et EP sont séparés en deux ½tables si IPLOT = 2

```
          1    10.       20.       0.1       0.1       0.        0.                (Echelles)
1 FOCALISATION A L AIDE D UN DOUBLET DE QUADRUPOLES   1 GEV/C    TRAJECTOIRES        (titre)
  1.0      6
1.        2.55     2.55
  2.       0.5      300.     1.
  1.       0.7      0.7                                  système optique.
  3.       0.5      300.     2.
  1.       2.55     2.55
  1.       0.2      0.2
  1   5
  1                                                      matching
  1
501                                                      tracking
000
  1   4.       0.
  2   4.       0.
  1   0.       1.
  2   0.       1.
 20
```

Exemple d'utilisation

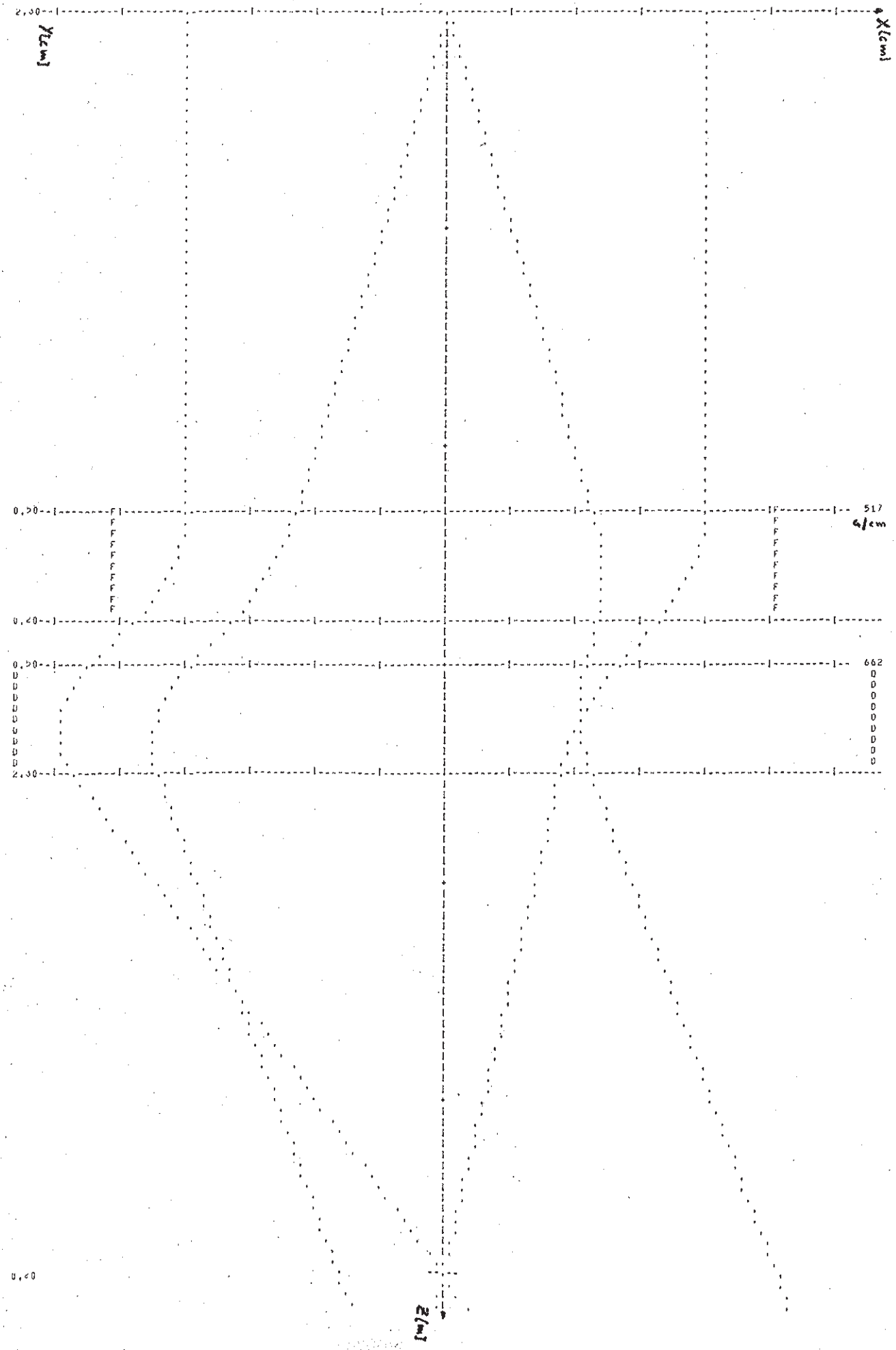
Données

FOCALISATION A L AIDE D UN DOUBLET DE QUADRUPOLES 1 GEV/C TRAJECTO

```
 1.0000 GEV/C  6 ELEMENTS
    1.00000      2.55000      2.55000     -0.00000
    2.00000      0.50000    300.00000      1.00000
    1.00000      0.70000      0.70000     -0.00000
    3.00000      0.50000    300.00000      2.00000
    1.00000      2.55000      2.55000     -0.00000
    1.00000      0.20000      0.20000     -0.00000
 1 10   5  1  1
ERROR   3.1340-020


 1 L      2.5500          2.5500
 2 FH     0.5000        516.7120
 3 L      0.7000          0.7000
 4 DH     0.5000        662.4534
 5 L      2.5500          2.5500
 6 L      0.2000          0.2000


   1.0000GEV/C
  1    0.0000    0.0000
  2    0.0000    0.0000
  3    0.0000    0.0000
  4    0.0000    0.0000
  5    0.0000    0.0000
  6    0.0000    0.0000


T= 1    4.0000   -0.0000
  1    4.0000    0.0000
  2    3.2502   -2.9019
  3    2.6698   -2.9019
  4    1.7864   -0.7767
  5    0.0000   -0.7767
  6   -0.1553   -0.7767


T= 2    4.0000   -0.0000
  1    4.0000    0.0000
  2    4.7998    3.3019
  3    5.4602    3.3019
  4    5.6776   -2.4685
  5   -0.0000   -2.4685
  6   -0.4937   -2.4685


T= 1    0.0000    1.0000
  1    2.3000    1.0000
  2    2.3372   -0.8560
  3    2.1660   -0.8560
  4    2.2620    1.2557
  5    5.1500    1.2557
  6    5.4012    1.2557


T= 2    0.0000    1.0000
  1    2.3000    1.0000
  2    3.2928    3.0985
  3    3.9125    3.0985
  4    4.4050   -1.2107
  5    1.6204   -1.2107
  6    1.3783   -1.2107
```

FOCALISATION A L AIDE D UN DOUBLET DE QUADRUPOLES 1 GEV/C TRAJECTOIRES

10 POS./CM 20 POS./ M 0.100 POS. / (GAUSS/CM) -0.000 POS. / KGAUSS -0.000 POS. / (KV/CM)



Programme T R A N S P O R T

Voir : SLAC-report No 91 (1970) K.L. Brown & S.K. Howry

Ce programme est utilisé pour la conception de systèmes de transport. Il peut varier des paramètres pour satisfaire des contraintes imposées au faisceau par l'utilisateur (au 1er ordre). Sur commande, le programme évalue les effets du 2e ordre.

La version utilisée nous a été fournie par M. Sherwood du CERN. Elle est antérieure à 1970 et ne permet pas les formats libres ou les "labels".

Pour obtenir plusieurs runs subséquents pour un seul système optique, on répète les <u>codes</u> de tous les éléments présents.(codes négatifs pour désactiver l'élément).

<u>Données</u> :

1er run
- TITRE (12A6)
- DATAPL,FO,F1 (carte indicateur) (3I2)
- éléments optiques ou contraintes (8F10.3)
- SENTINEL (col 2 à 9)

Avec DATAPL: 0 nouveau cas
1 ancien cas
2 ray-tracing
FO : nb d'itérations max. lors d'un fit.
F1 : nb max d'aggravations lors d'un fit.
Si FO=F1=0, le programme fixe: FO=10 et F1=2

(- TITRE) Se répète seulement si fit demandé dans la version mise sur bande 1496 en 1971

2e run
- TITRE
- DATAPL,FO,F1
- codes des éléments
- SENTINEL

(- TITRE)

etc.

Programme I P S O F A C T O

Voir: N.M. King & P.W. Simpson RHEL/R 103 (1965) (CERN W101)

Ce programme calcule, entre autres, les sommets des polygones d'acceptance d'un système de transport pour diverses valeurs de $\frac{\Delta p}{p}$. Il reçoit comme données les caractéristiques des éléments optiques et les limites de leurs ouvertures. Comme ce programme travaille au 1er ordre et traite séparément les plans X et Y, on doit considérer des ouvertures rectangulaires.

Notre version à été modifiée pour permettre la perforation des coordonnées des sommets des polygones. La structure des données n'a pas été modifiée. On séléctionne la perforation à l'aide de la première carte de données.(voir également la page 6 de la description). La première carte contient:

M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	IPUNCH

(6I5,I10)

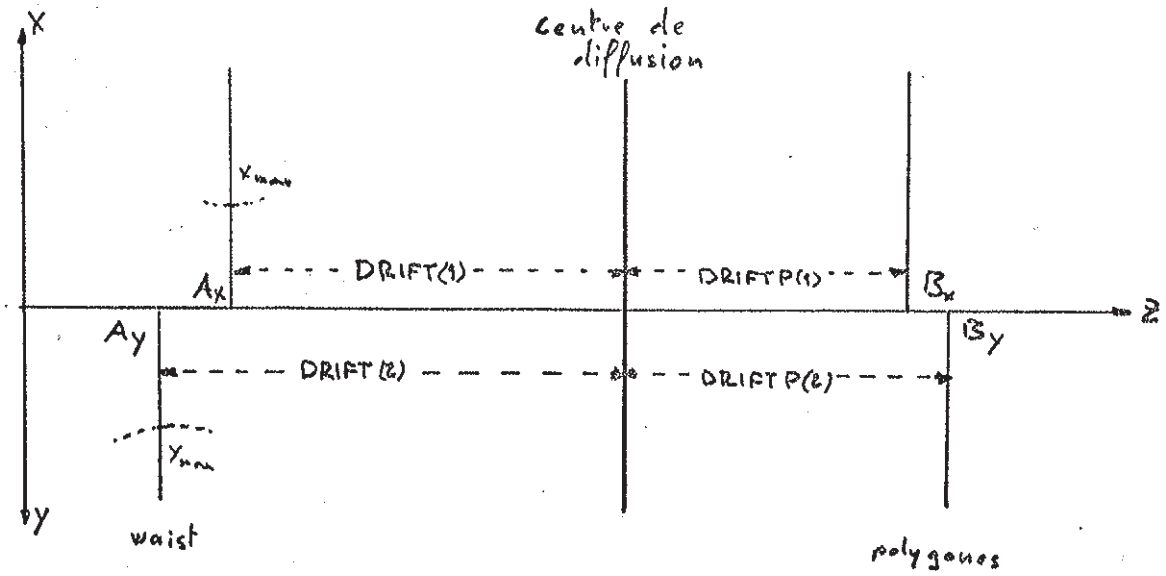
Si IPUNCH $\neq$ 0 , le programme perfore pour chaque impulsion choisie :

<u>plan H</u>	- nombre de sommets du polygone	(I10)
	- coordonnées X et X' des sommets des polygones	(2F10.5)
<u>plan V</u>	- idem pour le plan V	

Ces valeurs peuvent ensuite servir de données pour le programme METHODE 2.

Programme METHODE 2

Ce programme calcule la proportion de particules acceptées par un système de transport après diffusion multiple dans un dégradeur, c'est à dire la proportion de particules présentes dans une certaine région d'espace de phase. (polygones)



Le calcul est fait par une méthode de Monte-Carlo:

- On génère une distribution uniforme dans un ellipsoïde à 4 dim. représentant l'enveloppe du faisceau aux points A_x et A_y.
  Dimensions du faisceau : $\left.\begin{matrix} XM(I),I=1,4 \\ (X,X',Y,Y') \end{matrix}\right\}$ (cm,mrad,cm,mrad)
- On calcule les coord. de la particule au centre de diffusion. (endroit où disparaît la corrélation entre ΔX et $\Delta X'$)
  Distances : DRIFT(1) pour x et DRIFT(2) pour y
- On ajoute des déplacements aléatoires à ces coord. pour simuler la diffusion multiple.
  Paramètres : SIGX(I),I=1,4 (σ_x, $\sigma_{x'}$, σ_y, $\sigma_{y'}$)
- On calcule les coord. de la particule à l'endroit où sont définis les polygones d'acceptance (calculés à l'aide d'IPSOFACTO), c'est à dire aux points B_x et B_y. Distances: DRIFTP(1 et 2)
- On compte enfin les particules dont les coördonnées appartiennent aux polygones d'acceptance.

DONNEES:

Caractéristiques du faisceau et du dégradeur.

- TITRE	(avec caractère de contrôle d'impression)	10A8
- XM , DRIFT , DRIFTP		8F10.4
- SIGX		4F10.4
- NPARTIC	(nombre d'événements désirés)	I10

Polygones d'acceptance

Plan X: - NVERTEX	(nombre de sommets)	I10
- X(I) , X'(I)	(coord. des sommets)	2F10.3
-		
-	(I = 1 , NVERTEX)	
-		

Plan Y: idem

Ces deux types de blocs de données apparaissent dans un ordre différent suivant la version du programme.