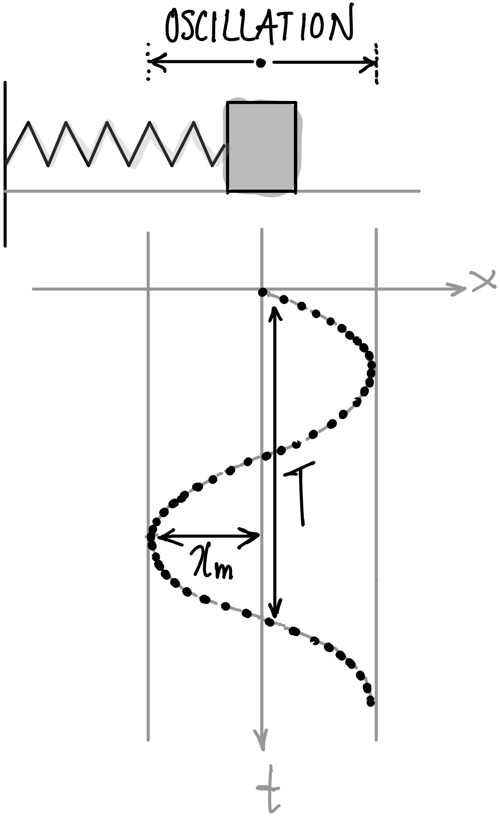
OSCILLATIONS
ET ONDES

PGC-08 / PGC-09

LE MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

x_m : amplitude

$\omega t + \phi$: phase du mouvement

ϕ : phase initiale

ω : frequence angulaire

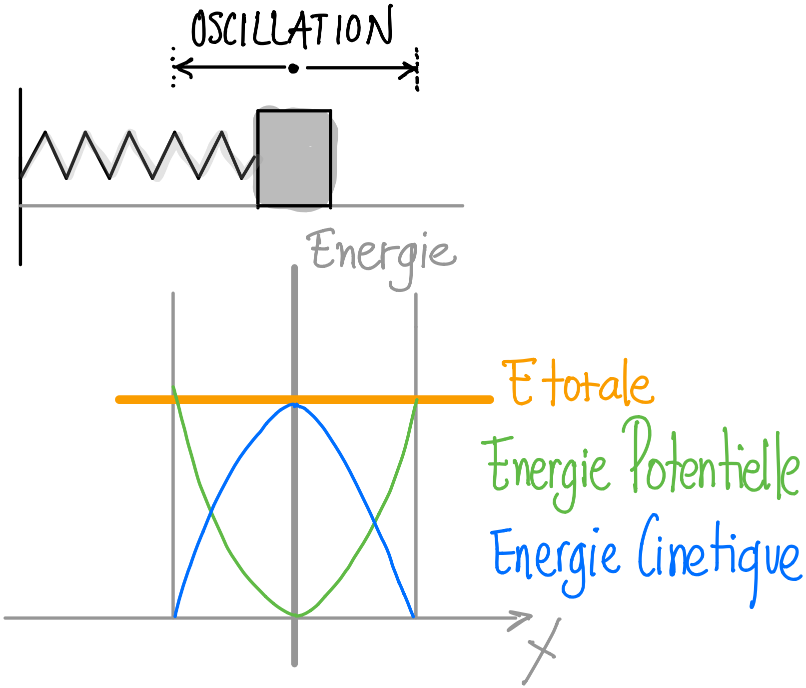
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (rad/s)$$

$$F = -m\omega^2 x = -kx$$

Force de rappel

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

MHS - ÉNERGIE



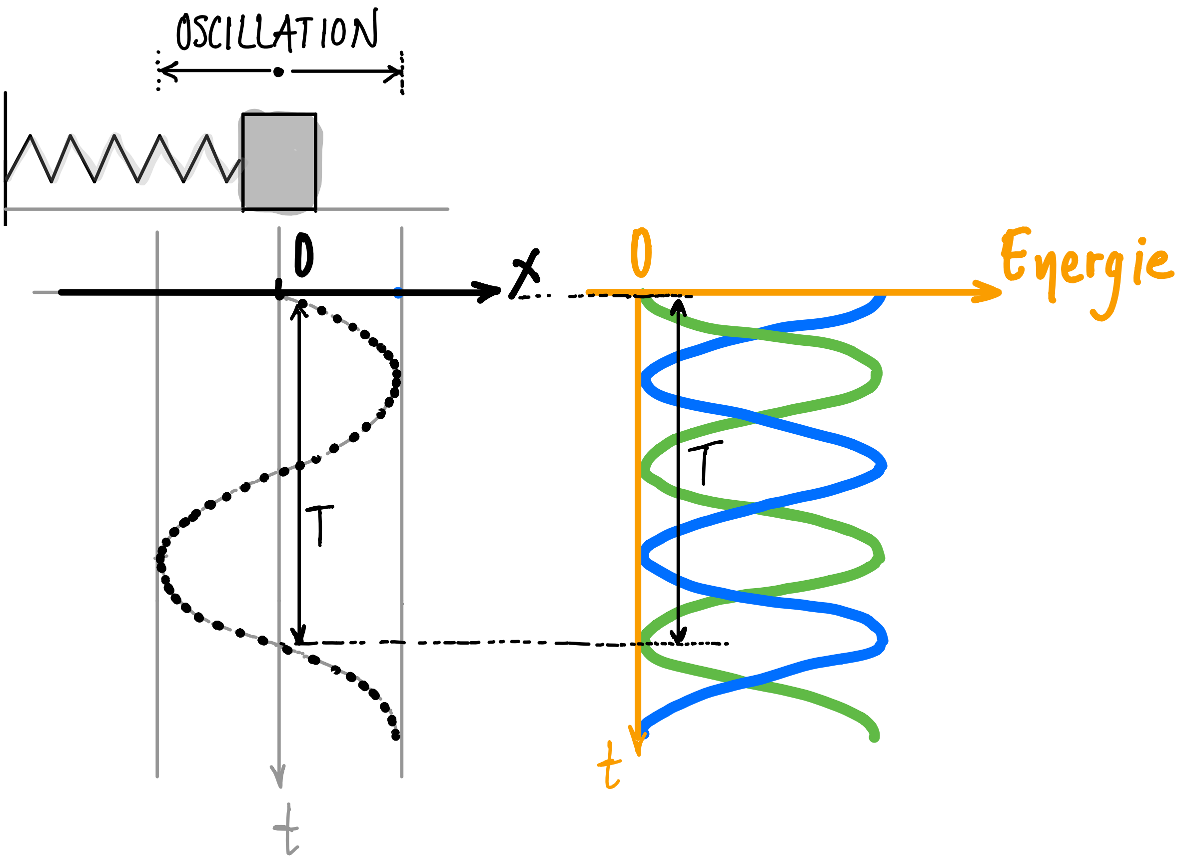
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

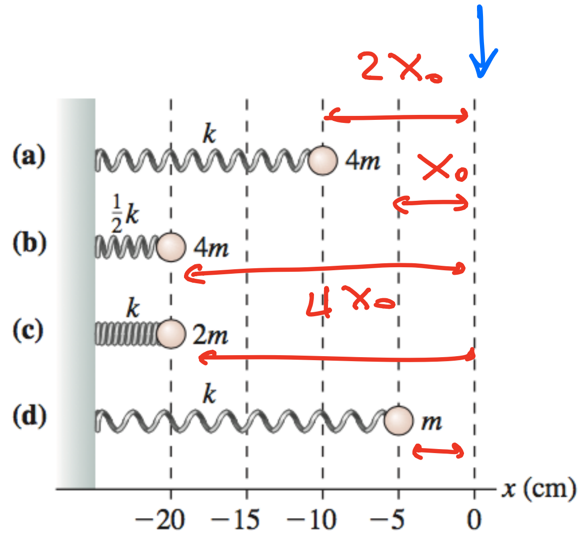
$$E_{TOT} = E_p + E_c = \frac{1}{2} k x_m^2$$

MHS - ÉNERGIE



QUESTION

Les quatres ressorts sur la figure sont comprimés depuis leur position d'équilibre x=0. Quelle relation est vraie pour la vitesse maximale de leur mouvement, après avoir été lâchés?



(a) c > b > a > d

(b) d > a > b = c

(c) b = a > c > d

(d) c > b > a = d

Energie $E_p^{max} = E_c^{max}$

a) $\frac{1}{2} k (2x_0)^2 = \frac{1}{2} (4m) v_a^2$

b) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} k\right) (4x_0)^2 = \frac{1}{2} (4m) v_b^2$

c) $\frac{1}{2} k (4x_0)^2 = \frac{1}{2} (2m) v_c^2$

d) $\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_d^2$

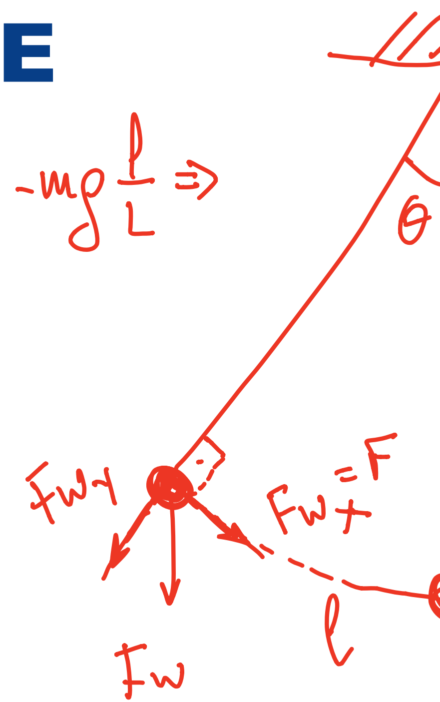
Maison

MHS EXEMPLE – LE PENDULE SIMPLE

$$\left.\begin{array}{l} F = -mg\sin\theta \\ \sin\theta \approx \theta \end{array}\right\} \Rightarrow F = -mg\,\theta \Rightarrow F = -mg\frac{l}{L} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F = -\dfrac{mg}{L}\cdot l \\ (F = -kx) \end{array}\right\} \Rightarrow F = -k\,l$$

force de rappel



$$\theta = \frac{l}{L}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}g/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

QUESTION

Un adulte et un enfant sont sur des balançoires identiques placées à côté l'une de l'autre. Comparé à l'enfant, le mouvement de l'adulte a

(a) une période beaucoup plus grande,

(b) une fréquence beaucoup plus grande,

(c) la même période,

(d) la même amplitude,

(e) aucune de ces réponses.

LE PENDULE PHYSIQUE – POUR INFO

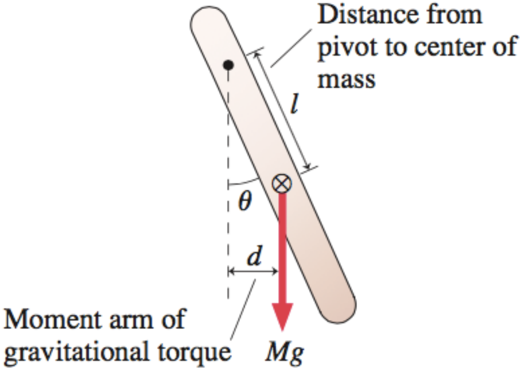
Un pendule physique est un corps solide, libre d'osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal. Le moment de force du poids par rapport à O est :

$$\tau = -(mg)(h\sin\theta)$$

Le signe − indique que le moment de force tend toujours à réduire l'angle θ à 0. La 2ème loi de Newton appliquée au mouvement de rotation $\sum\tau = I\alpha$ donne :

$$-mgh\sin\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

FIGURE 14.22 A physical pendulum.



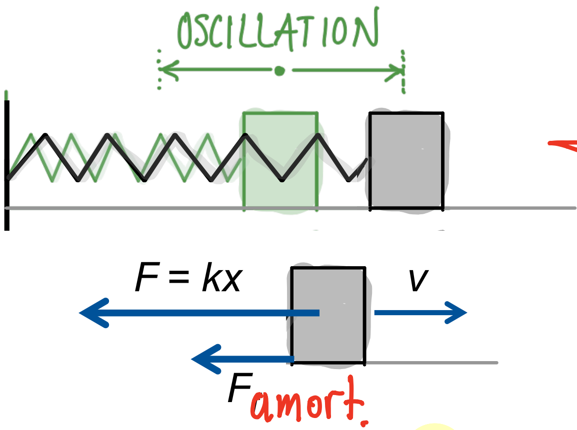
Pour de petits déplacements, $\sin\theta \approx \theta$: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$

C = centre de masse

On retrouve l'équation d'un MHS : $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

	Pendule simple (θ petit) :	Pendule physique (θ petit) :
fréquence angulaire	$\omega = \sqrt{g/L}$	$\omega = \sqrt{mgh/I}$
période	$T = 2\pi\sqrt{L/g}$	$T = 2\pi\sqrt{I/mgh}$

MOUVEMENT OSCILLATOIRE AMORTI



$$\sum F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

$$x(t) = \underbrace{X_m e^{-\frac{b}{2m}t}} \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

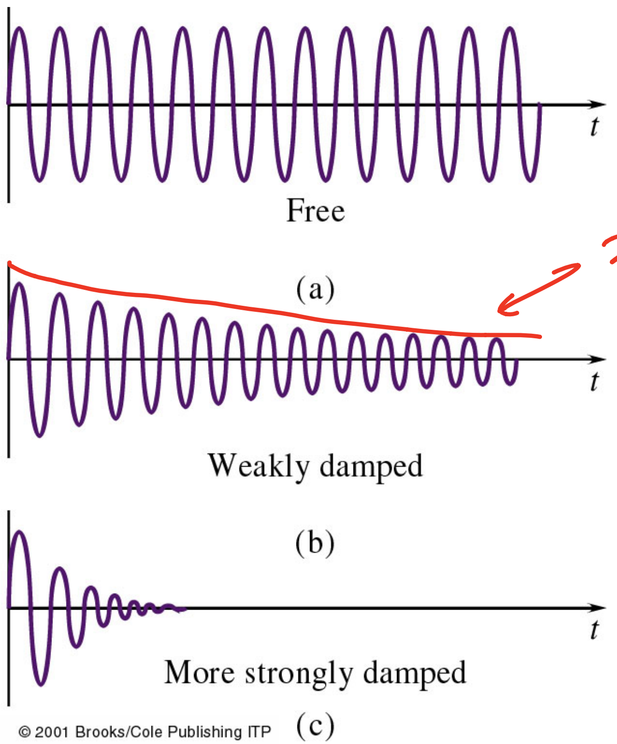
$$\rightarrow x(t) = X_m(t) \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m}} < \omega_0 \;!$$

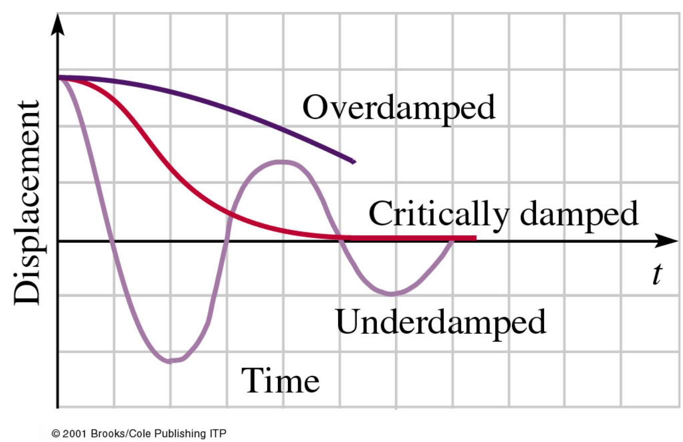
$F_{am} \propto v$, $F_{am} = -b\frac{dx}{dt}$

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

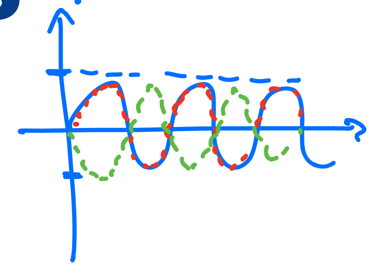
MOUVEMENT OSCILLATOIRE AMORTI



$$x_m'(t) = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}$$



OSCILLATIONS FORCÉES



$$F_{ext} = F_e \cdot \cos \omega_{ext} t \Leftarrow$$

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_e \cos \omega_{ext} t$$

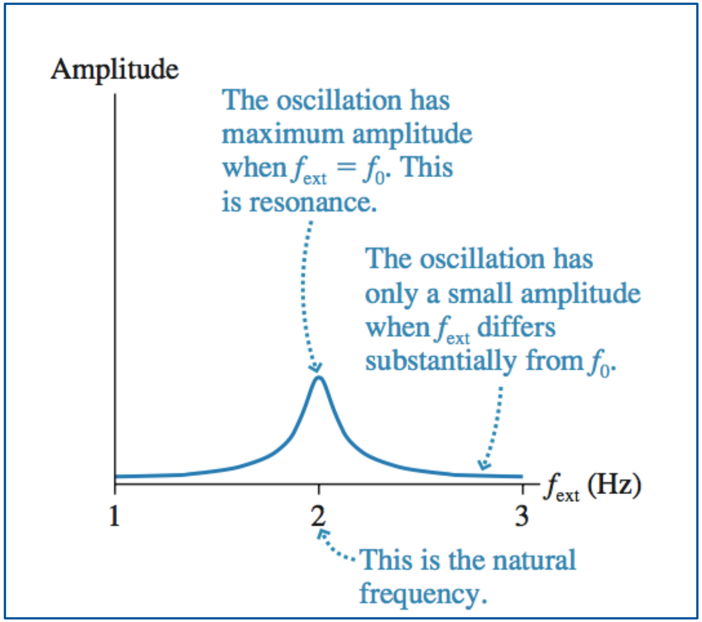
$$x(t) = x_m^{ext}(t) \cdot \cos(\omega_{ext} + \phi')$$

$$x_m^{ext}(t) = f(\omega_{ext}, \omega_0) : \quad \text{Max } \omega_e = \omega_0 \,!$$

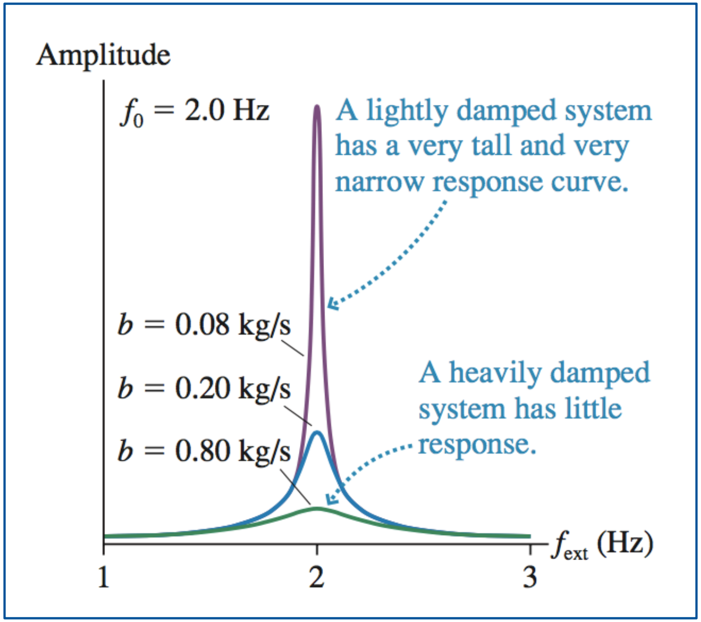
Resonance

RÉSONANCES

Amplitude d'une oscillation forcée.
Fréquence propre 2 Hz.



Plus l'amortissement est faible, plus l'amplitude de la résonance devient considérable.



MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE. (MHS)

$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$ periode du mouvement.

$v(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi)$

$a(t) = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$

$F = ma = -m\omega^2 x = -\underline{k} x$

$\Rightarrow$ Particule de masse m soumise à une Force de rappel proportionelle à son deplacement suit un MHS.
[avec $\underline{k} = m\omega^2$]

Cas special 1 : Ressort $F_r = -kx$ avec k : constante d'elasticité du ressort

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Cas special 2 : Pendule $F = -mg\sin\theta \simeq -mg\theta = -mg\frac{l}{L} = -\underbrace{\frac{mg}{L}}_{k} l$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{mL}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{et} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Cas special 3 : Oscillations dans champs de gravité (ressort) $F = -ky$, similaire au cas 1.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

LES ONDES

LES ONDES (MÉCANIQUES)

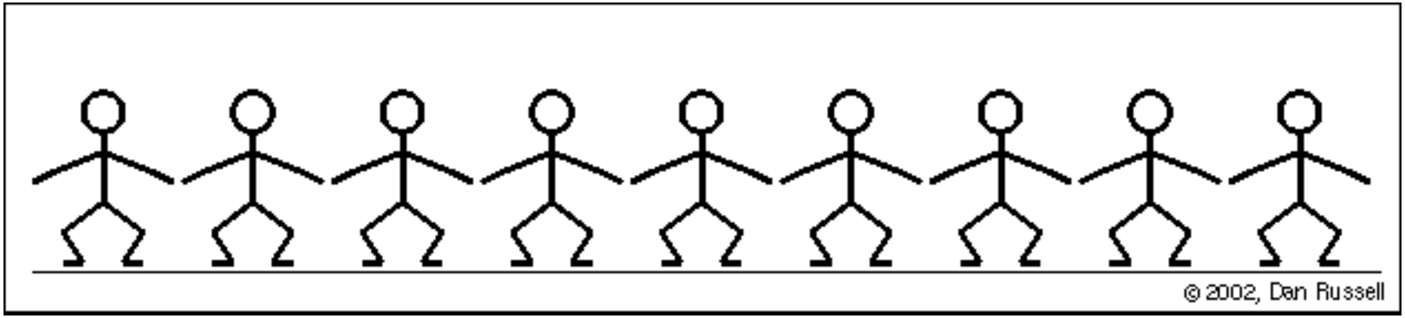
Une onde est une perturbation qui transporte de l’énergie en se propageant de proche en proche dans un milieu.

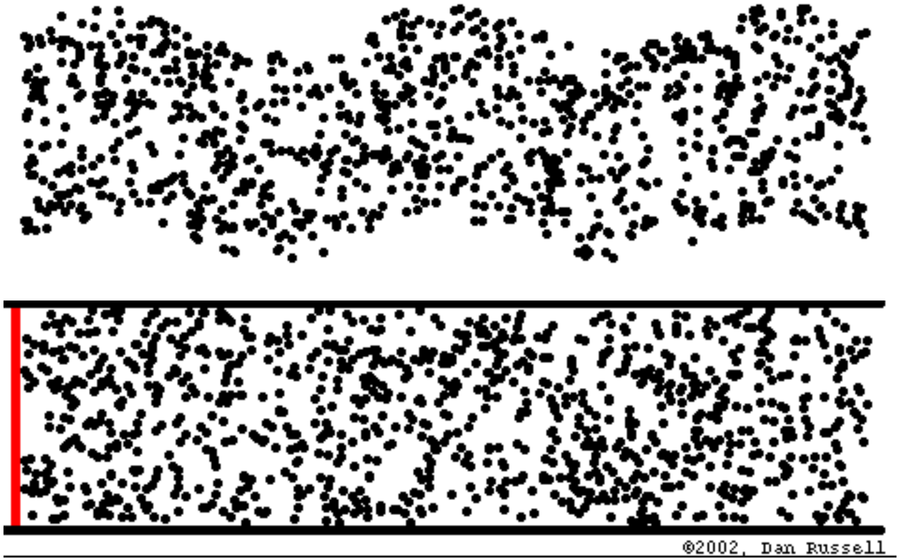
Exemples:

- Ondes de surface
- Ondes sonores
- Ondes électromagnétiques
- Ondes mécaniques; elles sont dues au mouvement des constituants du milieu.

Une onde mécanique progressive est une perturbation de l’équilibre d’un milieu matériel qui se propage d’une région à une autre.

Une onde mécanique transporte de l’énergie et de la quantité de mouvement.

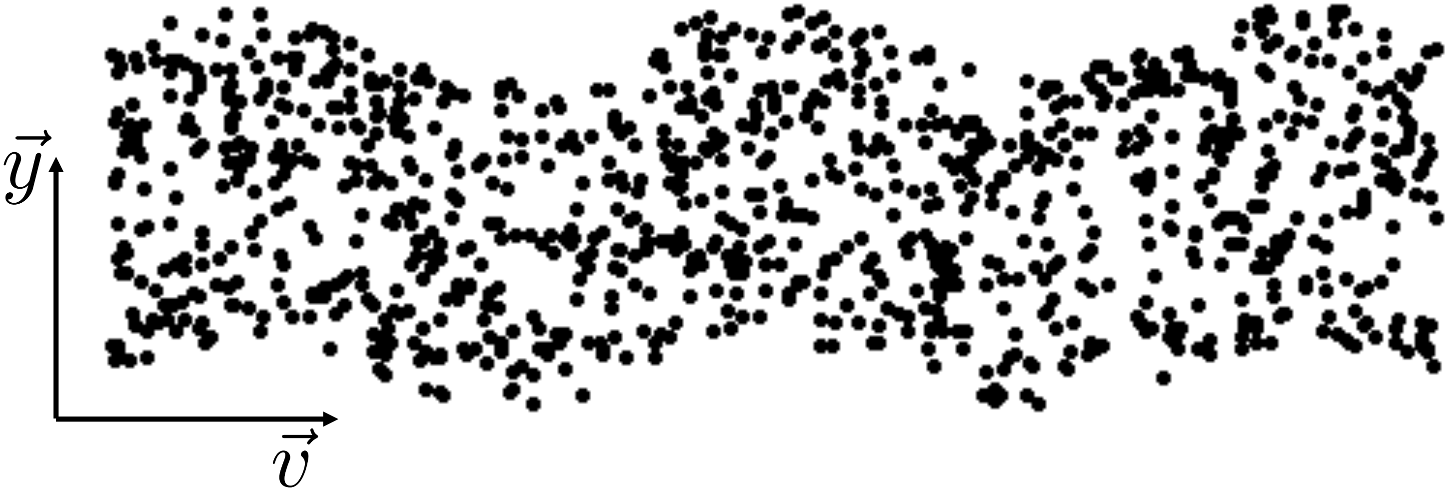




Seule la perturbation se propage mais il n’y a pas transfert de matière !

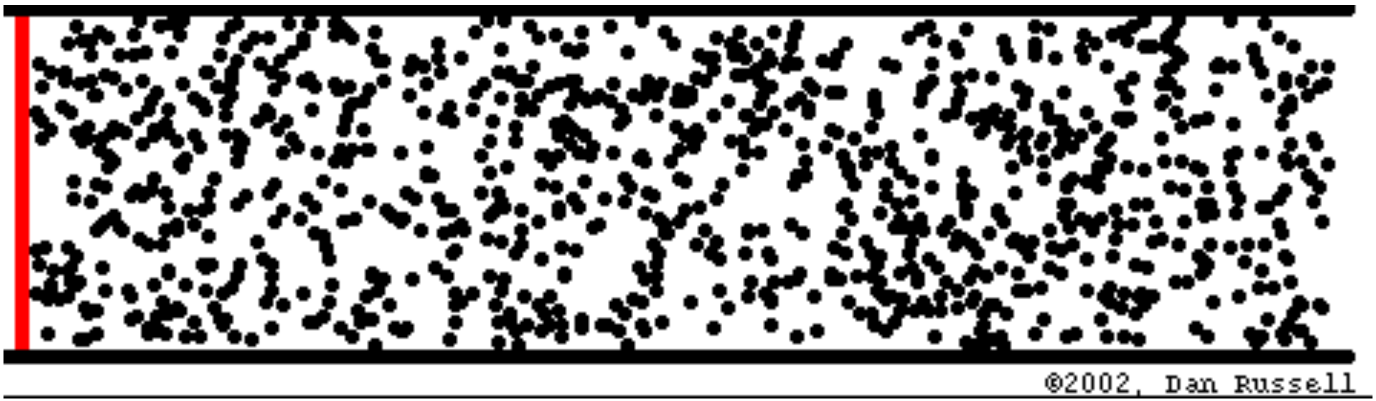
ONDE TRANSVERSALE

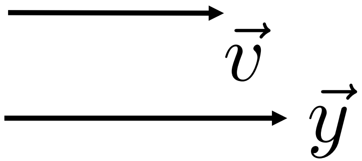
La perturbation $\vec{y}$ est perpendiculaire à la direction $\vec{v}$ de propagation de l'onde :



ONDE LONGITUDINALE

La perturbation $\vec{y}$ est parallèle à la direction $\vec{v}$ de propagation de l'onde :





IMPORTANT

Les ondes longitudinales et transversales sont des ondes progressives car elles voyagent d'un point à un autre (d'un bout d'une corde à l'autre).

La vitesse des particules de matière ≠ vitesse de l'onde !!!

- Seule la déformation se propage entre 2 points, la matière du milieu (support de l'onde) ne fait que osciller autour de sa position d'équilibre selon un mouvement harmonique.

QUESTION

On pose un petit morceau de papier plié au milieu d'une longue corde horizontale tendue et on envoie une impulsion ondulatoire. Le morceau de papier saute soudainement vers le haut lorsque passe l'ébranlement. Ceci montre que l'impulsion transporte:

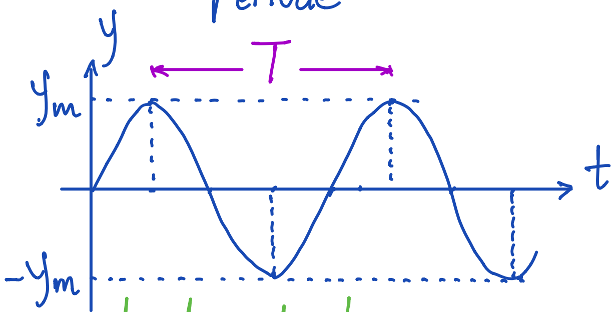
(a) une masse,
(b) un poids,
(c) une densité,
(d) une quantité de mouvement,
(e) aucune de ces réponses.

PROPAGATION DE L’ONDE

Caractéristiques des ondes:

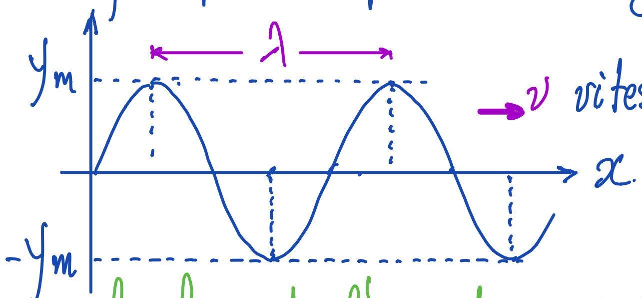
- Période temporelle, T
- Fréquence, f=1/T
- Longueur d’onde (période spatiale), λ
- Vitesse d’onde, v = f λ = λ / T

Période



... le long du temps pour un point fixe x_0

Période spaciale ou longueur d'onde



→ v vitesse d'onde $v = \frac{\lambda}{T}$

... le long de l'axe des x pour un temps fixe t_0

QUESTION

Une onde périodique passe devant un observateur qui enregistre que l'intervalle de temps entre deux crêtes consécutives est 0.5 s. Alors:

(a) la fréquence est 0.5 Hz,

(b) la vitesse est 0.5 *m/s,*

(c) la longueur d'onde est 0.5 m,

(d) la période est 0.5 s,

(e) aucune de ces réponses.

REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE D'UNE ONDE

$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$

$\omega = 2\pi/T$

En t_0 : $y(x) = y_m \sin(kx)$ $\qquad k = 2\pi/\lambda$

En x_0 : $y(t) = y_m \sin(\omega t)$ $\qquad \omega = 2\pi/T$

$x \to x - vt$

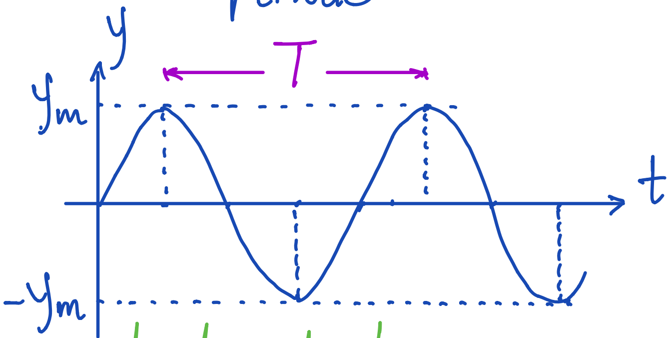
$y(x,t) = y_m \sin[k(x - vt)] = y_m \sin(kx - kvt) = y_m \sin(kx - \omega t)$

$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \underline{\omega = kv}$

$$\frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2 y(x,t)}{dt^2}$$ avec $v = \omega/k$

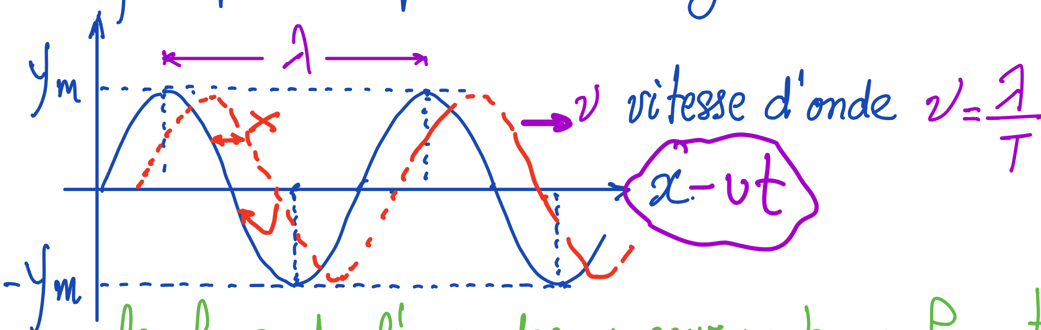
$\Leftrightarrow y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$

Période



... le long du temps pour un point fixe x_0

Période spaciale ou longueur d'onde

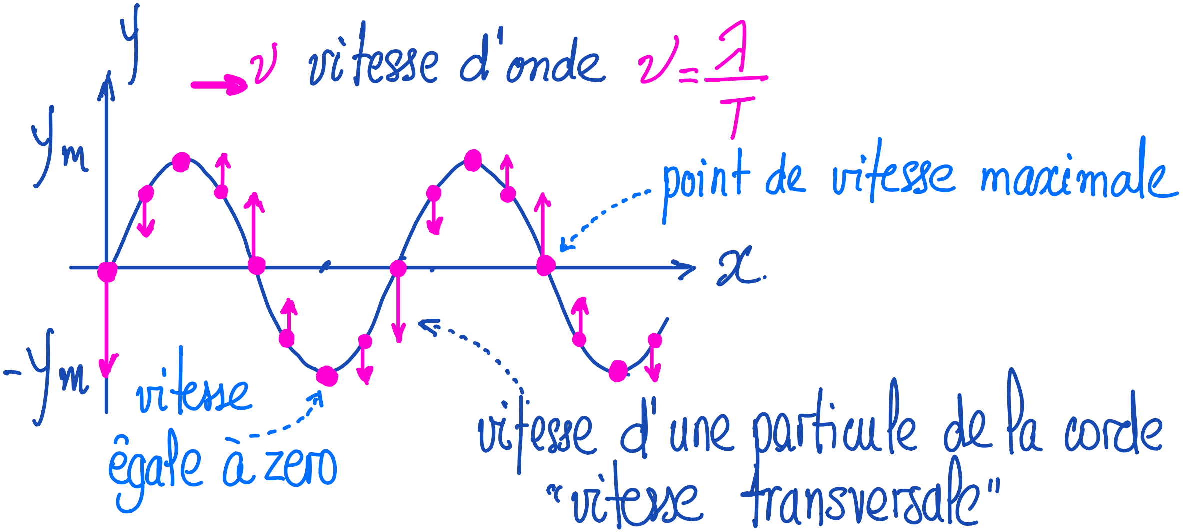


... le long de l'axe des x pour un temps fixe t_0

$x = vt$

$x : x - vt$

VITESSE DU MOYEN

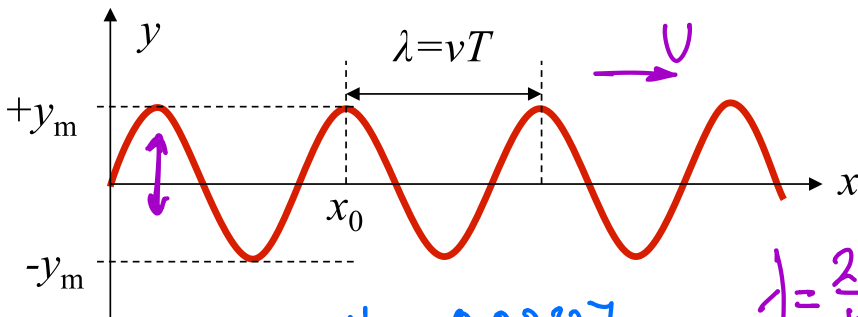


$$u = \frac{dy}{dt} = -\omega\, y_m \cos(kx - \omega t + \phi)$$

EXEMPLE

$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$

Considérons une onde sinusoïdale le long d'une corde : $y(x, t) = 0.00327 \sin(72.1x - 2.72t)$



Déterminez y_m, k, λ, T, f et la vitesse de l'onde.

Calculez la vitesse et l'accélération transversales.

$y_m = 0.00327$ m

$k = 72.1$ rad/m

$\omega = 2.72$ rad/s

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.0871$ m

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.31$ s

$f = \frac{1}{T} = 0.43$ Hz

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = 0.04$ m/s

$u = \frac{dy}{dt} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$

$a = \frac{du}{dt} = -\omega^2 y$