

Physique Générale C
Semestre d'automne (11P090)
Notes du cours basées sur le livre
Physique
de Eugene Hecht, éditions De Boeck

Notes produites par Anna Sfyrla (2017-2023)

Version 7.1: 2023-2024

Enseignants du cours:

Prof. Anna Sfyrla

Prof. Xin Wu

Assistants:

Adrien Blanchet

Mario Alves Cardoso

Antoine Ethève

Bastien Lacave

Théo Moretti

Bibliographie

- [1] Eugene Hecht, Physique, éditions De Boeck.
- [2] Eugene Hecht, College Physics, Schaum's outlines.
- [3] Randall D. Knight, Physics for Scientists and Engineers, Pearson.
- [4] Yakov Perelman, Oh, la Physique!, Dunod.

Table des matières

Rappel mathématique	1
1 La cinématique	10
1.1 Déplacement	10
1.2 Vitesse	11
1.2.1 Vitesse scalaire	12
1.2.2 Vecteur vitesse	13
1.3 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)	14
1.4 MRU relatif	15
1.5 Accélération	19
1.5.1 Accélération moyenne	19
1.5.2 Accélération instantanée	20
1.6 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)	21
1.7 Applications de MRUA	22
1.7.1 La chute libre	23
1.7.2 Le mouvement purement vertical	24
1.7.3 Le mouvement en deux dimensions	26
2 Les forces	28
2.1 Qu'est-ce qu'une force?	29
2.2 Les trois lois de Newton	30
2.2.1 La première loi de Newton: la loi d'inertie	30
2.2.2 La quantité de mouvement	31
2.2.3 La deuxième loi de Newton: la relation entre la force et les changements de mouvement	32
2.2.4 La troisième loi de Newton: action et réaction	33
2.2.5 Conservation de la quantité de mouvement	34
2.3 Diagramme du corps isolé	34
2.4 Le poids	35
2.4.1 Poids et cordes	36
2.4.2 Force de Réaction	36
2.5 Mouvements couplés	39
2.6 Frottement et mouvement	40
2.6.1 Le frottement statique	41
2.6.2 Le frottement cinétique	42
2.6.3 Le frottement avec roulement	43
2.7 Équilibre des corps en translation	45

2.7.1	Systèmes de forces parallèles et colinéaires	45
2.7.2	Systèmes de forces concourantes	47
3	La rotation	49
3.1	Mouvement curviligne	49
3.1.1	Accélération centripète	49
3.1.2	Force centripète	51
3.1.3	Applications	52
3.2	Mouvement de rotation	54
3.2.1	Cinématique de la rotation	54
3.2.2	Roulement sans glissement	60
4	Équilibre et dynamique des corps en rotation	61
4.1	Équilibre des corps en rotation	61
4.1.1	Moment de forces	62
4.1.2	Deuxième condition d'équilibre	64
4.2	Équilibre des solides	65
4.2.1	Centre de gravité	65
4.2.2	Stabilité et équilibre	67
4.3	La dynamique de la rotation	68
4.3.1	Inertie de rotation	69
4.4	Roulement sur un plan incliné	71
4.4.1	Moment cinétique	72
4.4.2	Conservation du moment cinétique	73
5	L'énergie	76
5.1	Le travail	76
5.2	Puissance	82
5.3	Énergie cinétique	83
5.4	Énergie potentielle	85
5.5	Énergie interne	87
5.6	Conservation de l'énergie	87
5.7	Énergie mécanique	87
5.8	Application: Les collisions	90
5.8.1	Conservation de la quantité de mouvement	90
5.8.2	Collision élastique en une dimension	91
5.8.3	Collision complètement inélastique en une dimension	93
5.8.4	Collision élastique en deux dimensions	93
5.9	Extra: un collisionneur des particules	95
6	La gravité selon Newton	96
6.1	La loi de la gravitation universelle	96
6.2	La force cosmique	100
7	La matière & Les fluides	105
7.1	Les atomes	105
7.2	États de la matière	110
7.3	Hydrostatique	112

7.3.1	Pression hydrostatique	112
7.3.2	Variation de la pression avec la profondeur	113
7.3.3	Pression atmosphérique	115
7.3.4	Principe de Pascal	117
7.3.5	Les machines hydrauliques	118
7.3.6	Poussée d'Archimède	119
7.3.7	Tension superficielle	120
7.4	Hydrodynamique	120
7.4.1	Écoulement d'un fluide	121
7.4.2	Équation de continuité	122
7.4.3	Équation de Bernoulli	123
7.4.4	Tourbillons	127
7.4.5	Les fluides réels: la viscosité	127
8	Élasticité et oscillations	129
8.1	La loi de Hooke	129
8.2	Deformation et contrainte; le module de Young	132
8.3	Les oscillations	133
8.3.1	Mouvement sinusoïdal	133
8.4	Exemples des Mouvements Harmoniques Simples	137
8.5	Amortissement, oscillations forcées, résonance	141
9	Ondes mécaniques et le son	144
9.1	Caractéristiques des ondes	145
9.2	Ondes sinusoïdales	145
9.3	Vitesse d'onde	147
9.4	Énergie d'onde	150
9.5	Réflexion, absorption et transmission	151
9.6	Le son	154
9.6.1	Les ondes sonores	154
9.7	Superposition des ondes	157
9.8	Les ondes stationnaires	159
9.9	Niveau d'intensité	163
9.10	Effet Doppler	164
10	Propriétés thermiques de la matière, énergie thermique et chaleur	167
10.1	Température	168
10.2	Dilatation thermique des solides	169
10.3	Lois des gaz parfaits	172
10.4	Gaz réels	174
10.5	Diagramme des phases	175
10.6	Théorie cinétique	176
10.7	Énergie thermique	181
10.8	Changement de phase	187
10.9	Transfert d'énergie thermique	191

11 Thermodynamique	193
11.1 Premier principe de la thermodynamique	193
11.2 Transformations	195
11.2.1 Transformations isothermes	198
11.2.2 Transformations isochore et isobare	199
11.2.3 Transformation adiabatique d'un gaz parfait	201
11.2.4 Résumé des transformations	202
11.3 Cycles: machines thermiques et réfrigérateurs	203
11.4 Deuxième principe de la thermodynamique	210
11.4.1 L'entropie	211
11.4.2 Ordre et désordre	214

Rappel mathématique

Chiffres significatifs

Les valeurs numériques de chaque mesure sont toujours une approximation. Considérons la longueur d'un objet qui vaut 15.7 cm. Par convention, cela veut dire que la mesure a été effectuée avec un instrument permettant d'apprécier le millimètre et que la valeur exacte se trouve entre 15.65 cm et 15.75 cm. Si la mesure de ce même objet est effectuée avec un instrument permettant d'apprécier le dixième de millimètre, on aurait pu écrire 15.70 cm. Le nombre de chiffres significatifs dépend donc de l'outil de mesure utilisé.

Le résultat d'un calcul prend le nombre de chiffres significatifs de la donnée de départ qui en a le moins. Par exemple, si on calcule le poids W sur la Terre d'un objet de masse $m = 10$ kg où $g = 9.81$ m/s² (on verra plus tard que le poids est égal au produit $W = m \cdot g$), la réponse doit être exprimée avec 2 chiffres significatifs (la masse m est exprimée avec 2 chiffres significatifs et g avec 3 chiffres significatifs), soit $W = 98$ N.

Les règles sont:

- les 0 placés à gauche du nombre ne comptent pas; par exemple, 0.06 est exprimé avec 1 chiffre significatif;
- les 0 placés à droite du nombre comptent; par exemple, 2'800 est exprimé avec 4 chiffres significatifs;
- la position de la virgule n'intervient pas; 1.28 et 12.8 sont exprimés avec 3 chiffres significatifs.

La notation scientifique ($\times 10^n$) est souvent utilisée. Au lieu de 0.000304, on écrira plutôt 3.04×10^{-4} . En plus d'être facilement lisible, cette notation permet de voir rapidement le nombre de chiffres significatifs (3 dans cet exemple).

Arrondissement des nombres

Pour arrondir un nombre, on élimine les chiffres superflus, puis, si le nombre formé par ces chiffres est:

- supérieur au égal à 5, 50, 500, etc., on ajoute une unité au dernier chiffre conservé;
- inférieur à 5, 50, 500, etc., on ne change pas le dernier chiffre conservé.

La notation delta: la variation d'une quantité

La lettre majuscule grecque Δ , placée devant le symbole d'une quantité physique, représente une *variation de cette quantité*. Ainsi, Δl (lire "delta el") est la variation de la distance l , c'est à dire, la distance parcourue entre une position finale l_f et une position initiale l_i : $\Delta l = l_f - l_i$.

Conversion d'unités

Pour convertir une mesure d'une unité à une autre, il suffit de multiplier par la relation des unités. Par exemple:

$$50 \text{ km} = 50 \text{ km} \cdot \frac{1'000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 50'000 \text{ m}.$$

Pour des conversions plus compliquées, par exemple celles de la vitesse, qui est exprimée en [distance]/[temps], nous utilisons une double multiplication par l'unité, une fois pour la distance au numérateur, une fois pour le temps au dénominateur. Par exemple:

$$50 \text{ km/h} = \frac{50 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{50 \text{ km}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1'000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \frac{50'000 \text{ m}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 13.9 \text{ m/s}$$

Puissances et notations scientifiques

Souvent, les variables physiques sont soit très grandes soit très petites. La vitesse de la lumière est $\sim 300'000'000 \text{ m/s}$ et les dimensions typiques des constituants de la matière (les atomes) sont de l'ordre de $0.000'000'000'1 \text{ m}$. Pour éviter de travailler avec ce type de nombres très peu pratiques, on introduit une notation en puissances de 10:

$$\begin{array}{ll} 10^0 = 1 & \\ 10^1 = 10 & 10^{-1} = 0.1 \\ 10^2 = 100 & 10^{-2} = 0.01 \\ 10^3 = 1000 & 10^{-3} = 0.001 \\ 10^4 = 10000 & 10^{-4} = 0.0001 \\ 10^5 = 100000 & 10^{-5} = 0.00001 \end{array}$$

...
avec les règles suivantes:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \text{ et } \frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m}$$

Alors on peut écrire la vitesse de lumière comme $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ et la dimension typique de l'atome comme $1 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Préfixes du système d'unités international (SI)

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^1	deka	d	10^{-1}	deci	d

Équations quadratiques et identités remarquables

Factorisation:

$$ax + ay - az = a(x + y - z)$$

Identités:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

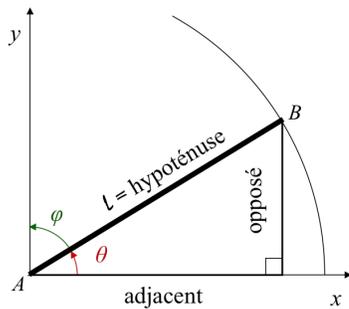
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Equation quadratique:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\text{avec } b^2 - 4ac > 0$$

Trigonometrie



Les projections sur les axes x et y d'un segment AB connaissant sa longueur l et son angle θ sont:

- opposé = hypoténuse $\cdot \sin \theta$
- adjacent = hypoténuse $\cdot \cos \theta$

et aussi:

$$\bullet \tan \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Pour des angles pour lesquelles $\theta + \phi = \pi/2 (= 90^\circ)$:

$$\sin \theta = \cos \phi; \quad \cos \theta = \sin \phi; \quad \tan \theta = \frac{1}{\tan \phi}$$

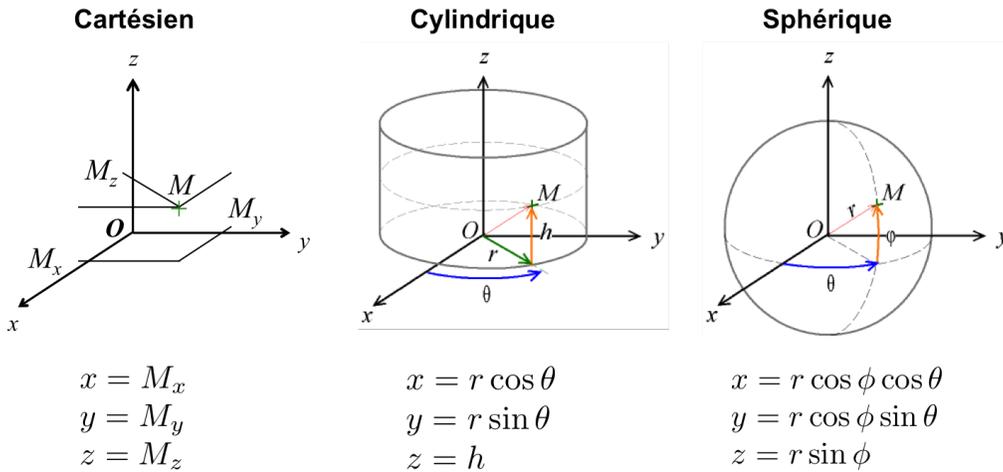
Quelques relations utiles:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Référentiels

On identifie la position d'un corps dans l'espace au moyen de coordonnées dans un système de référence. On choisit un référentiel spécifique en fonction de la symétrie du problème.



Référentiel et vecteur

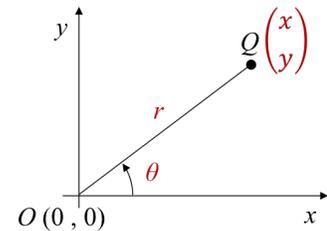
Un point Q dans l'espace 2-d peut-être identifié de deux manières:

- par ses coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- par ses coordonnées polaires: distance r et angle θ par rapport à un point et un axe de références.

Le point Q de coordonnées (x_Q, y_Q) définit le vecteur \vec{Q} dont les composantes dans le référentiel (x, y) sont:

$$x_Q = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y_Q = r \sin \theta$$

La longueur (ou norme) du vecteur est $r = |\vec{Q}| = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$.



Référentiel cartésien

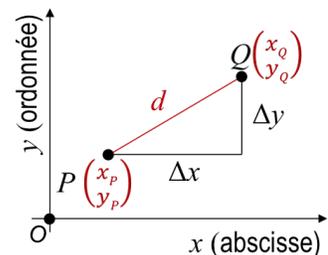
Dans un référentiel cartésien en deux dimensions chaque point P est identifié par une paire de coordonnées (x_P, y_P) ou plutôt $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$.

La distance d entre deux points P et Q de coordonnées (x_P, y_P) et (x_Q, y_Q) est donnée par:

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{|\vec{PQ}|^2}$$

Utilisant notation vectorielle, le vecteur \vec{PQ} devient:

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$$



Equations linéaires

Une équation linéaire est une équation du type:

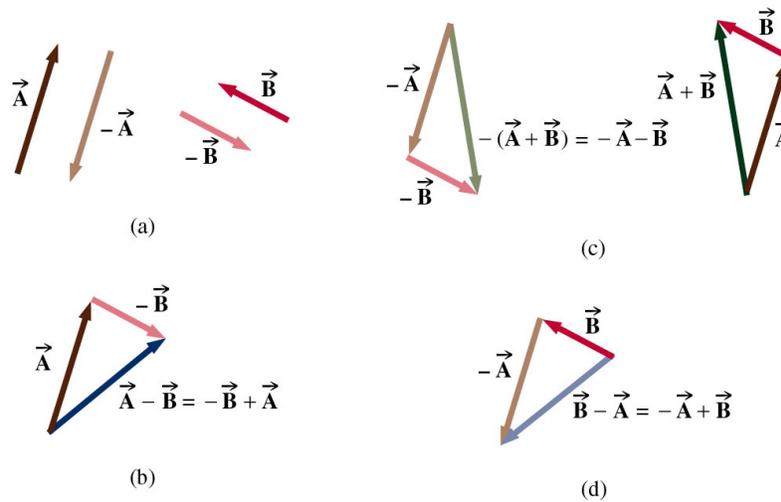
$$y(x) = ax + b$$

Dans une équation linéaire $y(x)$, un graphique de y en fonction de x représente une ligne droite où a est la pente de la droite et b est l'ordonnée de l'intersection avec l'axe y . Deux points arbitraires de la droite permettent de définir la pente a comme:

$$\text{pente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Opérations vectorielles

La notation vectorielle trouve de nombreuses applications en physique. L'utilisation des vecteurs repose sur un certain nombre de règles mathématiques.



Notez qu'il est plus simple d'additionner ou de soustraire des vecteurs en notation cartésienne en ajoutant simplement leurs composantes.

Si $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$:

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \begin{pmatrix} \alpha a_x - \beta b_x \\ \alpha a_y - \beta b_y \end{pmatrix}$$

Produits des vecteurs

- **Le produit scalaire**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = A \cdot B \cdot \cos \alpha$$

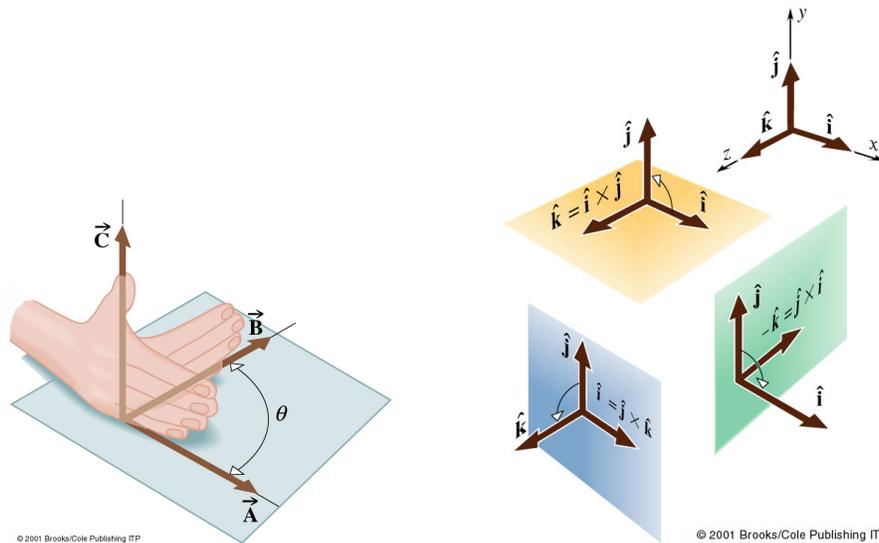
où α est l'angle entre les deux vecteurs. Cette quantité scalaire correspond au produit de la norme d'un vecteur par la norme de la projection de l'autre. Elle est maximale pour des vecteurs parallèles. Elle vaut zéro pour $\alpha = 90^\circ$.

- **Le produit vectoriel**

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin \alpha$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs. La norme correspond à la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs. Elle est maximale pour $\alpha = 90^\circ$ et elle vaut zéro pour des vecteurs parallèles. Sa direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs du produit vectoriel. Son sens est déterminé par la règle de la main droite.



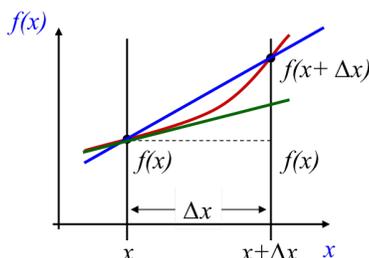
Dérivée

L'étude des changements (la dynamique) de notre Univers est une thématique importante de la physique. Le calcul différentiel est l'outil mathématique qui permet ces études.

On définit le taux de variation d'une fonction $f(x)$ par rapport à x par:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Ce quotient n'est autre que la pente de la droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.



Plus on réduit l'intervalle Δx plus cette droite se rapproche de la tangente à la courbe (indiqué en vert sur le dessin à coté). On définit la dérivée au point x de la fonction $f(x)$ par:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La dérivée mesure le taux de variation instantané de $f(x)$ par rapport à x .

Exemple

Soit $x(t)$ une fonction qui décrit la position x d'un corps sur une trajectoire rectiligne en une dimension au cours du temps t . Le taux de variation de la position est une mesure de la vitesse:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

Si la position du corps ne varie pas, $x(t) = cte$. Donc $dx/dt = 0$, c'est à dire que sa vitesse est nulle. L'accélération a mesure le taux de variation de la vitesse v de ce corps:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

L'accélération est la dérivée première de la vitesse par rapport au temps, ou la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

Exemple

L'utilisation combinée des dérivées première et seconde permet de trouver des points particuliers d'une fonction $f(x)$:

- Maximum de $f(x)$: $\frac{df}{dx} = 0$ et $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$
- Minimum de $f(x)$: $\frac{df}{dx} = 0$ et $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$

Ces équations permettent, par exemple, de trouver le point culminant de la trajectoire balistique d'un projectile dans le champ gravitationnel, comme une balle de tennis ou un bouchon de champagne.

Intégrale

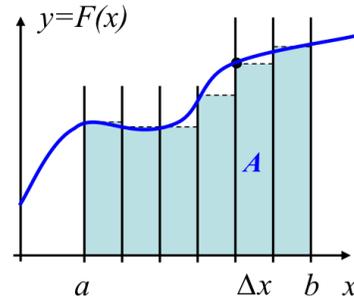
L'intégrale permet de calculer l'effet intégré d'une force sur la quantité de mouvement.

L'intégrale peut être vue comme l'opération inverse de la dérivée. Si $F(x)$ est la première dérivée de $f(x)$ par rapport à x :

$$F(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ alors } f(x) = \int F(x)dx + \text{constante}$$

L'intégrale $\int F(x)dx$ représente la surface A du rectangle défini par $F(x)$ et Δx . Donc $\sum_a^b F(x)\Delta x$ est la surface approximative entre la courbe $F(x)$ et l'axe des x . Dans la limite où Δx tend vers 0, on obtient la valeur exacte de la surface sous la courbe. C'est par définition l'intégrale de la fonction $F(x)$:

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b F(x)\Delta x$$



En physique, les intégrales trouvent de nombreuses applications.

Exemple

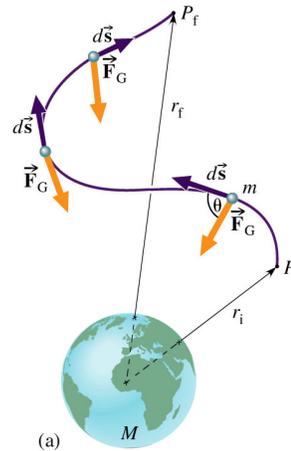
Calculer le travail effectué par une force \vec{F} dont le point d'application se déplace le long d'un chemin C dans l'espace. Le travail est défini comme le produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement \vec{s} :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cos \theta \quad s = F_{\parallel} s$$

Pour un parcours arbitraire, l'angle entre la force et le déplacement change en tout point et on doit sommer les contributions sur des petits segments Δs sur lesquels F est constant:

$$W = \sum \Delta W = \sum F_{\parallel} \Delta s$$

$$W = \int_C F_{\parallel}(s) ds$$



À savoir

Fonction $f(t)$	Dérivée df/dt	Primitive $F = \int f(t)dt + c$
$f_1 + f_2$	$df_1/dt + df_2/dt$	$F_1 + F_2$
$a f_1 + b f_2$	$a df_1/dt + b df_2/dt$	$a F_1 + b F_2$
$f_1 \cdot f_2$	$f_1 \cdot df_2/dt + f_2 \cdot df_1/dt$	
$f(g(t))$	$dg/dt \cdot df(g)/dg$	
$a, a = \text{const.}$	0	$at + c$
$at, a = \text{const.}$	a	$at^2/2 + c$
$at + b, a, b = \text{const.}$	a	$at^2/2 + bt + c$
$at^2, a = \text{const.}$	$2at$	$at^3/3 + c$
Ae^{at+b}	$Aae^{at+b} = a f(t)$	$(A/a) e^{at+b} = f(t)/a$
x^n	$n x^{n-1}$	$x^{n+1}/(n+1) + c$

Chapitre 1

La cinématique

Toute matière, sauf sous conditions extrêmes, est constamment en mouvement. La terre tourne sur elle-même et elle se déplace autour du soleil qui se déplace lui-même dans la galaxie; les galaxies s'éloignent les unes des autres; les atomes à l'intérieur des solides se déplacent et se heurtent violemment.

La branche de la physique qui décrit le mouvement s'appelle *cinématique*. Elle définit les observables fondamentales, la vitesse et l'accélération, et développe les relations entre elles sans s'occuper de la cause du mouvement. La cause du mouvement ainsi que les lois qui le gouverne sont donnés par la *dynamique* et on en parlera plus tard.

Contenu

1.1	Déplacement	10
1.2	Vitesse	11
1.2.1	Vitesse scalaire	12
1.2.2	Vecteur vitesse	13
1.3	Mouvement rectiligne uniforme (MRU)	14
1.4	MRU relatif	15
1.5	Accélération	19
1.5.1	Accélération moyenne	19
1.5.2	Accélération instantanée	20
1.6	Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)	21
1.7	Applications de MRUA	22
1.7.1	La chute libre	23
1.7.2	Le mouvement purement vertical	24
1.7.3	Le mouvement en deux dimensions	26

1.1 Déplacement

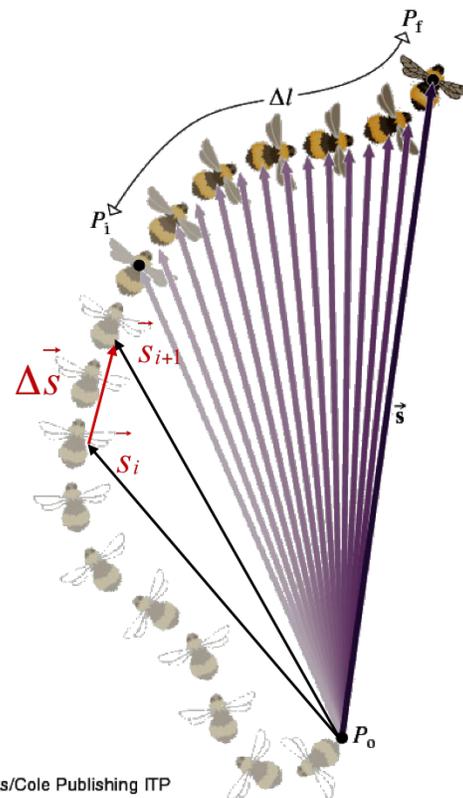
Pour décrire un mouvement rectiligne, une seule dimension suffit. Pour décrire un mouvement contraint dans un plan, deux dimensions sont nécessaires. Un mouvement quelconque est une courbe dans l'espace à trois dimensions.

On décrit les déplacements en utilisant des vecteurs. Le déplacement est caractérisé par:

- sa **distance** (son module) d'un point de référence;
- sa **direction** (son angle) depuis un point de référence.

Graphiquement, le vecteur déplacement est une flèche, notée \vec{s} . La longueur de la flèche représente la **norme** ou le **module** du vecteur, noté $|\vec{s}|$, ou simplement s . Le vecteur déplacement en fonction du temps, $\vec{s}(t)$ permet de retracer un parcours. Dans un temps Δt , le vecteur \vec{s} aura changé de $\Delta\vec{s} = \vec{s}_{i+1} - \vec{s}_i$, comme montré sur la figure 1.1.

Figure 1.1: Le déplacement final à partir de son lieu d'origine P_0 est le vecteur allant de ce point jusqu'à sa position finale, P_f . *Attention: le déplacement, \vec{s} , n'a rien à voir avec sa distance parcourue, l !* Le déplacement $\Delta\vec{s}$ en temps Δt est aussi noté sur l'image.



1.2 Vitesse

Plus vite se déplace un corps, plus grande est la distance qu'il parcourt pendant le même intervalle de temps. Si nous disposons de règles graduées pour mesurer les *distances* et d'horloges pour déterminer le *temps*, il nous suffit de lier ces deux quantités fondamentales pour quantifier la vitesse et mesurer la "rapidité". Si nous considérons la distance parcourue indépendamment de la direction du mouvement, cette quantité correspond à la *vitesse scalaire* ou *module de la vitesse*. Si nous considérons la direction du déplacement, il s'agit du *vecteur vitesse*.

1.2.1 Vitesse scalaire

Vitesse scalaire moyenne

La vitesse scalaire moyenne est définie comme la distance parcourue divisée par le temps mis pour la parcourir, soit:

$$\text{vitesse scalaire moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}} = \frac{l_{\text{final}} - l_{\text{initial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{initial}}} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

une définition exprimée symboliquement par

$$v_m = \frac{l}{t} \quad (1.1)$$

où v_m est la vitesse scalaire moyenne, l est la longueur du chemin parcouru et t est le temps mis pour le parcourir. L'unité de vitesse est toujours une distance divisée par un temps (kilomètres par heure, mètres par seconde, etc), par exemple:

$$[\text{vitesse}] = \frac{[l]}{[t]} = \text{m/s}$$

Par exemple, une voiture qui parcourt une distance totale de 30 km en 2.0 h a une vitesse scalaire moyenne de 15 km/h. Évidemment, elle a pu s'arrêter quelques minutes puis rouler un peu plus vite et avoir parcouru néanmoins les 30 km en 2.0 h. C'est pour cela que cette quantité est appelée vitesse *moyenne*.

La vitesse scalaire moyenne est indépendante de la forme du parcours, seule la distance totale importe. Elle est aussi indépendante des détails du mouvement: si la vitesse varie pendant le parcours, la moyenne ne varie pas forcément.

Exemple 1.2.1. La Lune décrit une orbite approximativement circulaire de rayon moyen $R = 3.84 \times 10^8$ m autour de la Terre. Elle met 27.3 jours pour effectuer une révolution. Déterminez sa vitesse moyenne en m/s .

Solution. Données: $R = 3.84 \times 10^8$ m et le temps de révolution $t = 27.3$ j. À déterminer: v_m . En une révolution, la Lune parcourt une distance $l = 2\pi R = (2\pi \cdot 3.84 \times 10^8) \text{ m} = 2.41 \times 10^9 \text{ m}$. Le temps mis pour parcourir l est $t = 27.3 \text{ j} = 27.3 \text{ j} \cdot 24 \text{ h/j} \cdot 60 \text{ min/h} \cdot 60 \text{ s/min} = 27.3 \text{ j} \cdot 86400 \text{ s/j} = 2.4 \times 10^6 \text{ s}$. Alors la vitesse moyenne est $v_m = \frac{l}{t} = \frac{2\pi R}{t} = 1.02 \times 10^3 \text{ m/s}$. ◀

Vitesse scalaire constante

En conduisant une voiture, nous comprenons intuitivement ce qu'est une *vitesse scalaire constante* ou *uniforme*. Une vitesse est constante si la distance l parcourue pour tout intervalle de temps Δt donné est constante:

$$v_{\text{constante}} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Si le taux de variation de la distance avec le temps est constante (autrement dit, une vitesse constante), le graphique de la distance en fonction du temps est une ligne droite. La pente de la droite, i.e. le rapport de la variation de la distance à la variation du temps entre deux événements, est égale à la vitesse (figure 1.2).

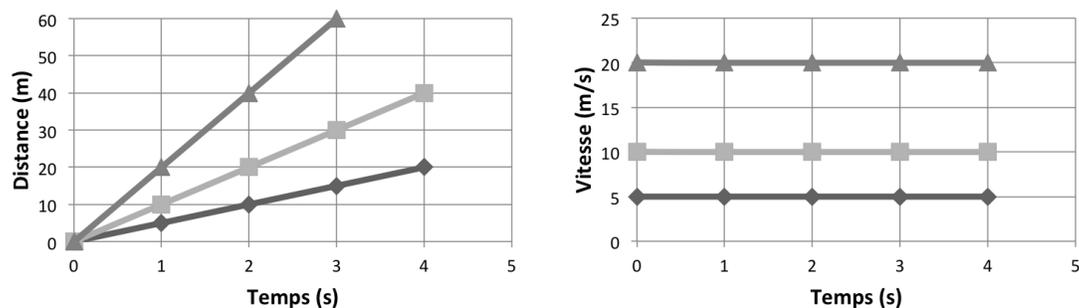


Figure 1.2: Dans le cas d'un objet en mouvement uniforme, le graphique de la distance en fonction du temps est une droite et sa pente est la vitesse scalaire. Plus la vitesse est grande, plus la pente est forte. Le graphique de la vitesse en fonction du temps est une ligne droite parallèle à l'axe du temps. L'aire sous la courbe entre deux instants quelconques est la hauteur (vitesse) multipliée par la longueur (temps) et représente la distance parcourue.

Vitesse scalaire instantanée

Lorsque vous voyagez dans une voiture ou un avion et vous vous posez la question “à quelle vitesse est-ce que je me déplace MAINTENANT?”, il s'agit de la *vitesse instantanée*, exactement à ce moment-là. C'est ce que vous lisez sur l'indicateur de vitesse lorsque vous conduisez une voiture. Mais de quoi s'agit-il exactement?

La vitesse scalaire lorsque l'intervalle de temps Δt devient infiniment petit est appelée vitesse scalaire instantanée, v . La notion fondamentale ici est que Δl devient aussi infiniment petit, mais le rapport $\Delta l/\Delta t$ s'approche d'une limite finie. Mathématiquement on écrit:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta l}{\Delta t} \right]$$

Notons que la limite est déterminée lorsque Δt tend vers zéro, plutôt que lorsque $\Delta t = 0$. Cette subtilité a été la raison pour la quelle Newton a inventé le calcul infinitésimal, en introduisant la **dérivée**.

La définition de la vitesse instantanée correspond donc à la définition fondamentale de la dérivée de $l(t)$ par rapport à t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta l}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{l(t + \Delta t) - l(t)}{\Delta t} \right] \equiv \frac{dl}{dt} \quad (1.2)$$

1.2.2 Vecteur vitesse

Vecteur vitesse moyenne

Nous définissons le **vecteur vitesse moyenne** comme le quotient du vecteur déplacement par le temps de parcours:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_f - \vec{s}_i}{t_f - t_i} \quad (1.3)$$

Comme t est un scalaire positif, multiplier \vec{s} par $1/t$ n'affecte pas sa direction; \vec{v}_m est donc parallèle à $\Delta \vec{s}$.

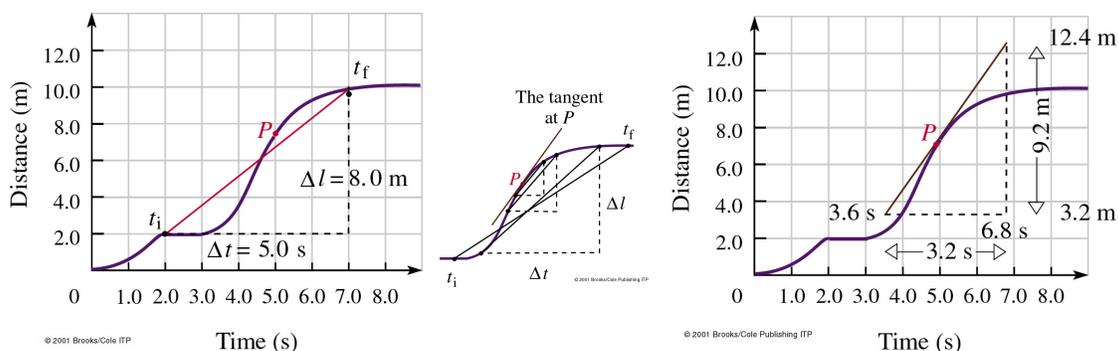


Figure 1.3: En réduisant t , l'intervalle de distance Δl est réduit et la ligne droite entre t_i et t_f s'approche de la tangente à la courbe P . Dans ce cas, t_i et t_f s'approchent tous les deux de $t = 5.0$ s. Géométriquement, la vitesse est la pente de la tangente à la trajectoire au point P . Cette pente a une valeur spécifique en chaque point.

Imaginons une voiture de course qui fait un trajet et qui revient au point de départ. Le déplacement moyen sera nul si le point d'arrivée et de départ est le même. Le vecteur vitesse moyenne sera donc nul, quelle que soit sa vitesse scalaire. Le vecteur vitesse moyenne est une notion d'utilité très limitée; mais elle est utile pour définir le vecteur vitesse instantanée.

Vecteur vitesse instantanée

Nous définissons le vecteur vitesse instantanée en un point quelconque comme la limite, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, du rapport du vecteur déplacement de l'objet à partir de ce point de départ sur l'intervalle de temps, soit

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \right] \equiv \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (1.4)$$

Ainsi le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur déplacement par rapport au temps. En d'autres termes, le vecteur vitesse est le taux de variation du déplacement dans le temps.

Deux choses importantes à noter:

- lorsque la position finale se rapproche de la position initiale (voir figure 1.1), le module de $\Delta \vec{s}$, Δs , diminue de Δl . Pour des valeurs extrêmement petites de Δt , les quantités Δs et Δl deviennent égales: le module du vecteur vitesse instantanée \vec{v} , est donc égal à la vitesse scalaire instantanée, v .
- lorsque le module du vecteur $\Delta \vec{s}$ diminue avec Δt , le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire en tout point de celle-ci et il est dirigé dans le sens du mouvement.

Résumons: le module du vecteur vitesse est la vitesse scalaire et sa direction est toujours tangente à la trajectoire dans l'espace.

1.3 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Le mouvement rectiligne peut être décrit par un déplacement scalaire Δx le long d'une droite, d'une position initiale x_i à une position finale x_f . Les vecteurs déplacement et

vitesse sont colinéaires et peuvent être traités algébriquement. Le déplacement est $\Delta x(t) = x(t) - x_i$ et son signe donne le sens du déplacement. La vitesse instantanée est $v = \frac{dx}{dt}$ et pointe dans la direction du déplacement. La vitesse moyenne est $v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ avec le même signe que $\Delta x = x_f - x_i$.

1.4 MRU relatif

Considérons une tortue qui se déplace à la vitesse \vec{v}_{TR} le long d'une règle qui elle-même se déplace à la vitesse \vec{v}_{RE} par rapport à la Terre. Un observateur immobile verra la tortue se déplacer de P_o à P_f qui correspond au déplacement de la tortue par rapport à la Terre de

$$\vec{s}_{TE} = \vec{s}_{TR} + \vec{s}_{RE} \quad (1.5)$$

Prendre les dérivées des trois termes de cette équation permet de trouver les vitesses:

$$\vec{v}_{TE} = \vec{v}_{TR} + \vec{v}_{RE} \quad (1.6)$$

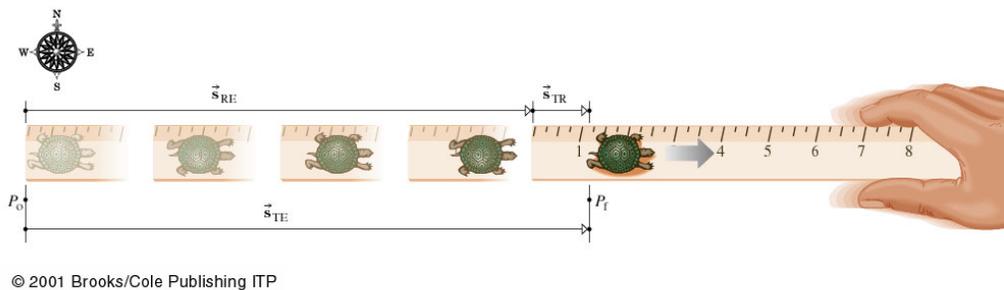


Figure 1.4: Le déplacement d'une tortue le long d'une règle en mouvement. La tortue se déplace vers la droite par rapport à la règle, tandis que la règle se déplace vers la droite par rapport à la Terre. La Terre et la règle forment deux systèmes de références particuliers. On peut décrire le mouvement de la tortue dans chacun de ces référentiels.

Si par exemple la vitesse de la tortue par rapport à la règle est $\vec{v}_{TR} = 0.01$ m/s vers l'est et la vitesse de la règle par rapport à la Terre est $\vec{v}_{RE} = 0.5$ m/s vers l'est, alors $\vec{v}_{TE} = 0.51$ m/s vers l'est aussi.

Supposons maintenant que la tortue se tourne et commence à se déplacer vers l'ouest à une vitesse de 0.01 m/s par rapport à la règle. Dans ce cas, \vec{v}_{TR} et \vec{v}_{RE} sont antiparallèles et la vitesse résultante est la différence entre les vitesses. Soustrayant la petite vitesse de la grande, nous trouvons $\vec{v}_{TE} = 0.49$ m/s vers l'est.

Exemple 1.4.1. Dans un train (symbole t) qui se déplace par rapport à la Terre (symbole T) vers l'est à une vitesse $v_{tT} = 10.00$ km/h, un grand chien (symbole c) se déplace lentement vers la tête du train à une vitesse $v_{ct} = 5.00$ km/h. Un insecte (symbole i) vole

vers l'ouest à une vitesse $v_{ic} = 0.01$ km/h par rapport au chien. Quelle est la vitesse de l'insecte par rapport à la Terre (symbole T , v_{iT})?

Solution. En généralisant l'équation 1.6 à la somme de trois vitesses, la vitesse de l'insecte par rapport à la Terre sera:

$$\vec{v}_{iT} = \vec{v}_{ic} + \vec{v}_{ct} + \vec{v}_{tT}$$

(i.e. égale à la somme de la vitesse de l'insecte par rapport au chien, plus du chien par rapport au train, plus du train par rapport à la Terre). L'insecte se dirige vers l'ouest et le train ainsi que le chien vers l'est. Comme les vecteurs parallèles et antiparallèles peuvent être manipulés comme des valeurs algébriques, en considérant les signes justes, i.e. on ajoute les vitesses parallèles et on soustrait les vitesses antiparallèles. La vitesse sera alors $\vec{v}_{iT} = -0.01$ km/h + 5.00 km/h + 10.00 km/h vers l'est, ce qui donne $\vec{v}_{iT} = 14.99$ km/h vers l'est. ◀

La situation peut sembler plus compliquée quand le mouvement du système de référence et celle de l'objet ne se déroulent pas en une dimension mais deux. Considérons, par exemple, deux joueurs de football qui courent dans le terrain, comme démontré dans la figure 1.5. Dans le premier cas, nous n'avons même pas besoin de considérer des vecteurs pour trouver la vitesse relative entre les deux joueurs. Dans le deuxième cas, le théorème de Pythagore appliqué au triangle de côtés v_A et $-v_B$ nous donne une hypoténuse v_{AB} qui correspond à la vitesse du joueur A par rapport au joueur B. Le troisième cas est une situation généralisée. En utilisant la décomposition des vecteurs aux axes x et y , le problème se simplifie. Pour ce troisième cas, nous avons en détail: La décomposition du vecteur de vitesse v_A :

$$v_{Ax} = v_A \cos \theta \quad \text{et} \quad v_{Ay} = v_A \sin \theta$$

et celui du v_B :

$$v_{Bx} = v_B \cos \phi \quad \text{et} \quad v_{By} = v_B \sin \phi$$

La vitesse de A par rapport au B sera donnée par la relation $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TB}$ (équation 1.6), où le symbole T indique la Terre ou en général un système de référence immobile. En renversant l'ordre des indices, on reverse le sens du vecteur, donc $\vec{v}_{TB} = -\vec{v}_{BT}$, alors $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AT} - \vec{v}_{BT}$, que nous pouvons écrire simplement comme $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. En deux dimensions, nous avons:

$$v_{ABx} = v_{Ax} - v_{Bx} \quad \text{et} \quad v_{ABy} = v_{Ay} - v_{By} \quad (1.7)$$

Pour construire le vecteur v_{AB} nous utilisons le théorème de Pythagore et nous obtenons:

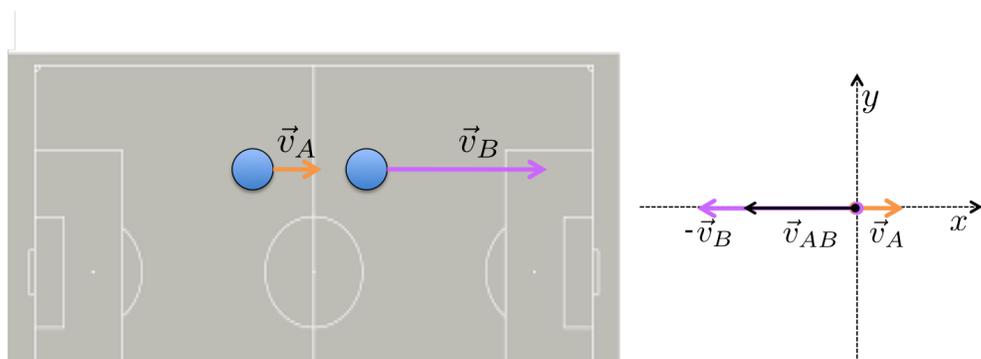
$$v_{AB} = \sqrt{v_{ABx}^2 + v_{ABy}^2} \quad \text{et sa direction} \quad \omega = \tan^{-1} \frac{|v_{ABy}|}{|v_{ABx}|} \quad (1.8)$$

Pour simplifier le formalisme mathématique, nous pouvons écrire tout ça en forme de vecteurs:

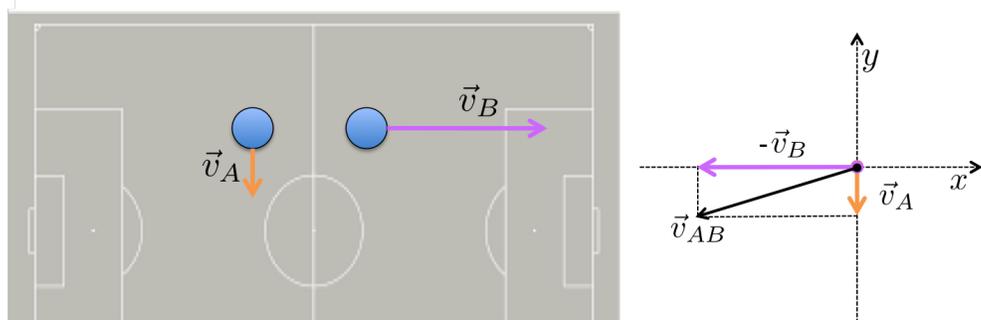
$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \cos \theta \\ v_A \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_B \cos \phi \\ v_B \sin \phi \end{pmatrix}$$

et donc v_{AB} devient, similaire à l'équation 1.7:

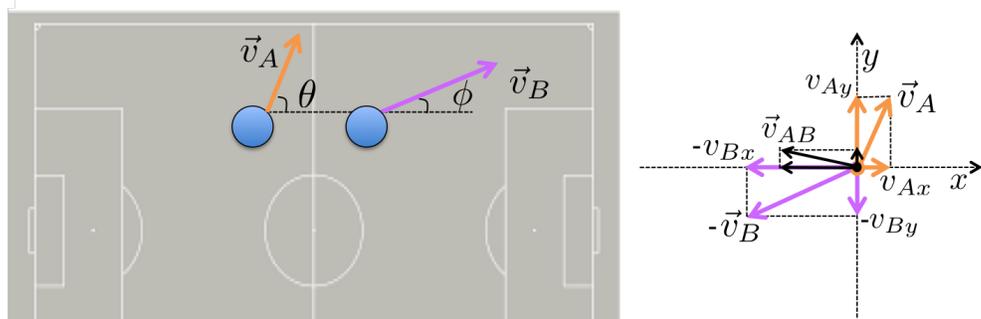
$$v_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ax} - v_{Bx} \\ v_{Ay} - v_{By} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$



$$v_{AB} = v_{AT} + v_{TB} = v_{AT} - v_{BT} = v_A - v_B$$



$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TB} = \vec{v}_{AT} - \vec{v}_{BT} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$



$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TB} = \vec{v}_{AT} - \vec{v}_{BT} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

Figure 1.5: Mouvement relatif de deux joueurs de football, dans trois cas. Les détails sur comment estimer la vitesse relative sont donnés dans le texte.

1.5 Accélération

L'accélération est le taux de variation de la vitesse en fonction du temps. Cette variation peut concerner le module de la vitesse, sa direction, ou les deux. Sans accélération, la vitesse reste constante aussi bien en direction qu'en module. Si l'accélération et la vitesse sont colinéaires, la vitesse ne change pas de direction. Si l'accélération a une composante normale à la vitesse, la vitesse change de direction.

1.5.1 Accélération moyenne

L'accélération moyenne (a_m) d'un corps est définie comme le quotient de la variation de la vitesse par le temps écoulé, ainsi:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (1.10)$$

Notez l'analogie à la définition de la vitesse moyenne, equation 1.3.

La vitesse et l'accélération sont donc toutes les deux des grandeurs vectorielles. Il y a une accélération lorsqu'il y a une variation dans la direction de la vitesse ou lorsqu'il y a une variation de son module. Lorsqu'un corps se déplace le long d'une trajectoire courbée, la direction du vecteur vitesse change nécessairement; son accélération n'est donc pas dans la direction du mouvement. Par contre, dans le cas plus simple d'un mouvement sur une ligne droite, que nous considérons le plus souvent dans ce chapitre, la vitesse et l'accélération sont toutes deux dans la direction du mouvement.

Dans le cas du **mouvement rectiligne**, le déplacement, la vitesse et l'accélération sont colinéaires. L'accélération est positive si la vitesse augmente dans la direction du déplacement ($\vec{v}_f > \vec{v}_i$). L'accélération est négative si la vitesse diminue dans cette direction ($\vec{v}_f < \vec{v}_i$).

L'unité d'accélération est une vitesse divisée par un temps, par exemple:

$$[\text{accélération}] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2$$

Exemple 1.5.1. Un robot jaune se déplace à la vitesse 1.0 m/s le long d'une rampe rectiligne dans un vaisseau spatial. Quelle est son accélération moyenne si sa vitesse passe à 2.50 m/s en 0.50 s?

Solution. Données: $v_i = 1.0$ m/s, $v_f = 2.50$ m/s, et $\Delta t = 0.50$ s. A déterminer: a_m . D'après la définition:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2.5 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s}}{0.5 \text{ s}}$$

soit $a_m = 3.0$ m/s².

Pour une accélération moyenne constante dans le cas du mouvement rectiligne, la vitesse en fonction du temps peut être représentée graphiquement comme une droite ($v = a \cdot t$), et sa pente est égale à l'accélération (figure 1.6).

Le vecteur accélération moyenne, \vec{a}_m , n'est pas très utile en soi, tout comme la vitesse moyenne \vec{v}_m , mais il permet de définir l'accélération instantanée.

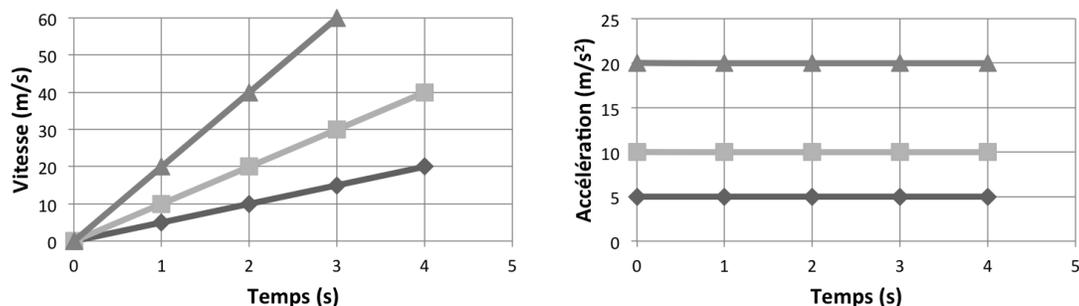


Figure 1.6: Dans le cas d'un objet en mouvement rectiligne uniformément accéléré, le graphique de la vitesse en fonction du temps est une droite et sa pente représente l'accélération. Plus l'accélération est grande, plus la pente est forte. Le graphique de l'accélération en fonction du temps est une ligne droite parallèle à l'axe du temps. L'aire sous la courbe entre deux instants quelconques est la hauteur (accélération) multipliée par la longueur (temps) et représente la vitesse atteinte.

1.5.2 Accélération instantanée

Dans le cas d'un mouvement accéléré, qui naturellement varie avec le temps, nous devons considérer ce qui arrive à chaque moment. Ce que nous voulons, c'est de connaître l'accélération moyenne à tout moment sur un intervalle de temps très court. La valeur limite de l'accélération moyenne lorsque l'intervalle de temps s'approche à zéro est l'accélération instantanée qui s'exprime par:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right] = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.11)$$

L'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. Comme le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur déplacement (equation 1.4), il en résulte que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{s}}{dt} \right] = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} \quad (1.12)$$

L'accélération est donc la dérivée seconde du déplacement par rapport au temps.

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, mais l'accélération \vec{a} est dans la direction de $\Delta \vec{v}$ et non celle de \vec{v} . Cela veut dire que \vec{a} peut avoir à la fois une composante tangentielle et une composante perpendiculaire à la trajectoire. Il y a une accélération dans la direction de la trajectoire (composante tangentielle) si le module de la vitesse de l'objet augmente ou diminue; il y a une accélération perpendiculaire à la trajectoire si la direction de la vitesse du mobile change, c'est-à-dire si la trajectoire est courbée. Nous allons étudier le mouvement curviligne au chapitre 6.

Le cas le plus simple est celui d'un objet qui se déplace sur une trajectoire rectiligne. Dans ce cas, l'accélération n'a pas de composante perpendiculaire, elle est complètement tangentielle.

Exemple 1.5.2. Un train roulant sur une voie ferrée rectiligne, a un déplacement donné par $x(t) = A+Bt^2$, où A et B sont deux constantes avec des unités appropriées. Déterminer

les expressions de la vitesse (scalaire) et de l'accélération (scalaire) en fonction du temps.

Solution. Données: $x(t)$. À déterminer: $v(t)$ et $a(t)$.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2Bt$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2B$$

1.6 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Nous considérons les situations dans lesquelles a peut être prise constante, donc égale à l'accélération moyenne a_m . Donc dans un interval de temps Δt :

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

Puisque le mouvement est rectiligne, nous pouvons traiter la vitesse et l'accélération comme des quantités scalaires (algébriques) en faisant attention aux signes que nous attribuons. Nous pouvons aussi simplifier la notation en considérant que $t_i = 0$ et donc le temps peut être simplement représenté par t . La vitesse initiale correspond à l'instant $t = 0$, donc on peut changer v_i en v_0 . Nous pouvons aussi changer la vitesse finale en $v(t)$. Par conséquent, l'accélération devient:

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t} \quad (1.13)$$

d'où nous pouvons isoler la vitesse en temps t :

$$v(t) = v_0 + at \quad (1.14)$$

Sachant que (equation 1.11)

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \int_0^t a dt$$

pour $a = \text{constante}$ nous pourrions arriver au même résultat en intégrant:

$$v(t) = \int_0^t a dt = a t|_0^t + c = at + c, \text{ avec } c \text{ constante}$$

et comme $v(t=0) = v_0 \Rightarrow c = v_0$, qui nous donne l'équation 1.14.

La vitesse moyenne, représentant la vitesse qui produirait le même déplacement pendant le même intervalle de temps que le mouvement uniformément accéléré en question, est donnée par:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (1.15)$$

Nous pouvons déduire la distance parcourue en considérant l'intégral de la vitesse (equation 1.14) en fonction du temps:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = (v_0 t + \frac{1}{2} a t^2) \Big|_0^t + d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + d, \text{ avec } d \text{ constante}$$

Si x_0 est la position initiale, i.e. $x(t=0) = x_0 \Rightarrow d = x_0$, donc:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.16)$$

Le premier terme est la position initiale, pour $t = 0$. Le second terme est la distance que parcourerait le mobile s'il se déplaçait avec sa vitesse initiale et sans accélération ($a = 0$). Le troisième terme est la modification de la vitesse à partir de sa valeur initiale v_0 due à l'accélération. Si l'accélération est négative, ce troisième terme est aussi négatif et le mouvement se ralentit.

Graphiquement nous voyons tout ça à la figure 1.7. L'aire sous la droite de la vitesse représente la distance parcourue:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0) t = \frac{1}{2}(v_0 + v) t \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2}[v_0 + (v_0 + at)] t = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

En combinant les equations 1.14 et 1.16 nous calculons la relation entre la vitesse et le déplacement:

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a[x(t) - x_0] \quad (1.17)$$

C'est l'équation à utiliser pour résoudre tout problème de mouvement uniformément accéléré où le temps n'apparaît pas explicitement.

Résumé – MRUA Pour un mobile qui se trouve à l'instant $t = 0$ en position x_0 avec une vitesse v_0 , et à l'instant t en position x avec une vitesse v , nous avons les équations suivantes:

$$v(t) = v_0 + a t \quad (1.18)$$

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (1.19)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.20)$$

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a[x(t) - x_0] \quad (1.21)$$

1.7 Applications de MRUA

Nous examinerons dans cette section quelques exemples de MRUA. Pour tous ces exemples les équations 1.14-1.17 sont appliquées avec des conditions initiales spécifiques.

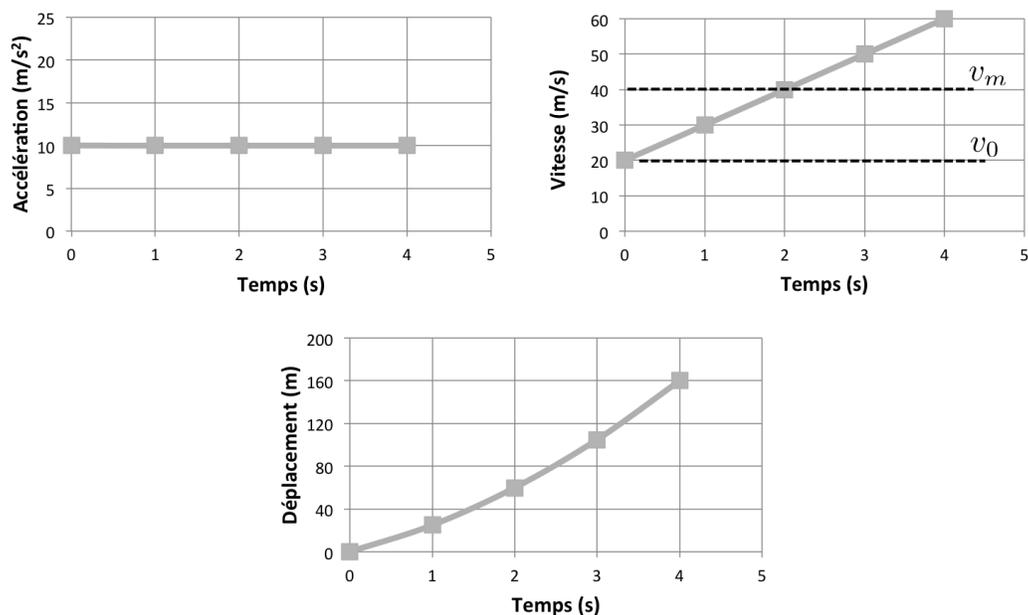


Figure 1.7: Graphiques d'accélération, vitesse et déplacement pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré. L'aire sous la droite du diagramme de l'accélération en fonction du temps représente la vitesse acquise. L'aire sous la droite inclinée du diagramme de la vitesse en fonction du temps représente la distance parcourue. La distance est aussi égale à l'aire sous la droite horizontale v_m . Autrement dit, $v_m t = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t$, ce qui correspond bien à $v_m t = \frac{1}{2}(v + v_0)t$ et donc l'équation 1.15. Le diagramme du déplacement en fonction du temps montre le cas spécial de $x_0 = 0$.

1.7.1 La chute libre

La situation la plus courante où l'accélération est constante est la chute libre. Si on lâche un corps pesant au voisinage de la surface de la Terre, il tombe en obéissant exactement aux équations de MRUA. L'accélération dans ce cas est celle de la pesanteur (accélération gravitationnelle), mesurée dans la direction descendante. Elle est représentée par le symbole g , est égale à une valeur moyenne de 9.80665 m/s^2 à la surface de la Terre et diminue progressivement avec l'altitude.

En absence du frottement de l'air, tous les corps tombent avec la même accélération uniforme quel que soit leur poids. L'accélération gravitationnelle est indépendante de la masse bien qu'elle résulte de la force gravitationnelle due à la masse des objets.

Les conditions initiales spécifiques à la chute libre sont: au temps $t_0 = 0$, un objet se trouve à une position $x_0 = 0$, à une hauteur h (avec $h \ll R_0$, où R_0 le rayon de la Terre), lâché avec une vitesse initiale $v_0 = 0$. L'objet tombe ensuite avec une accélération $a = g$ ($g = 9.81$) m/s^2 en ligne droite. Les équations du MRUA nous donnent alors:

$$v(t) = gt ; \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2 ; \quad v^2(t) = 2gx(t) \quad (1.22)$$

Exemple 1.7.1. On lâche un objet à une hauteur h . Combien de temps va-t-il mettre pour arriver au sol? L'accélération gravitationnelle est g .

Solution. Le temps sera donné par le temps nécessaire pour traverser la distance h , soit (équation 1.16) $x(t) = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

1.7.2 Le mouvement purement vertical

En chute libre, l'accélération est toujours parfaitement verticale et dirigée vers le bas. Si un objet est lancé verticalement vers le haut (e.g. comme dans la figure 1.8), il restera sur une trajectoire verticale rectiligne.

Figure 1.8: Une balle lancée verticalement vers le haut avec une certaine vitesse, ici 39 m/s, revient à son point de départ à la même vitesse (si on néglige la résistance de l'air). En montant, il subit une accélération négative, $a = -g$. Sa vitesse diminue jusqu'à l'arrêt (momentané) au sommet de sa trajectoire. La descente est la même que pour un objet lâché avec vitesse nulle du sommet de la trajectoire : il subit une accélération positive $a = +g$ à partir de $v_0 = 0$.

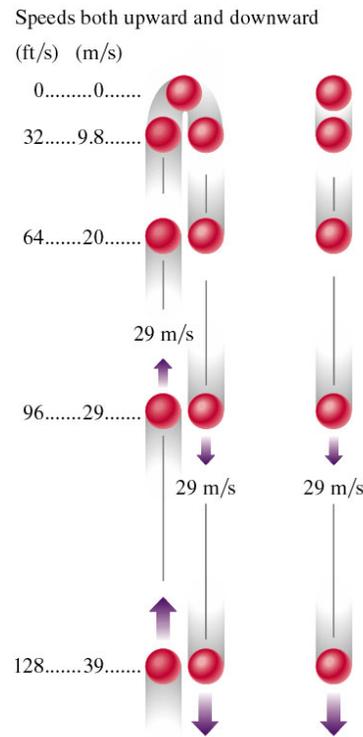
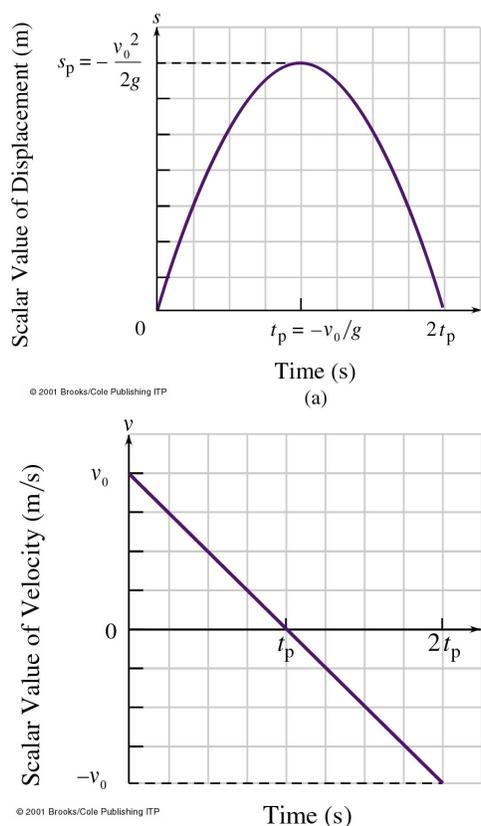


Figure 1.9: Le mouvement d'une balle lancée verticalement vers le haut. (a) La courbe représentant le déplacement en fonction de t est une parabole. (b) La courbe de la vitesse en fonction de t est une droite qui passe sous l'axe des abscisses pendant la descente.



Exemple 1.7.2. Une balle est tirée d'un revolver, verticalement vers le haut à une vitesse initiale 200.0 m/s. On négligera la résistance de l'air. (a) Quelle est la hauteur maximale, h , atteinte par cette balle? (b) Quelle sera sa vitesse, v , lorsqu'elle redescend à la même altitude que l'arme et (c) Quelle est la durée, t_{max} du trajet?

Solution. Données: MRUA avec $v_0 = 200$ m/s.

(a) Au sommet: $v = 0$, donc équation 1.17 pour $a = -g$: $v_0^2 = -2gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} = 2.04 \times 10^3$ m.

(b) On connaît par (a) la hauteur h de la quelle la balle tombe. Pour la partie de la descente la vitesse sera donnée par l'équation 1.17 pour $v_0 = 0$: $v^2 = 2gx(t)$, donc pour $x(t) = h = \frac{v_0^2}{2g}$: $v^2 = v_0^2$, soit, la balle revient rigoureusement à la hauteur du fusil à la même vitesse 200.0 m/s.

(c) Le temps de montée, t_m , peut être calculé en utilisant les équations du MRUA, e.g. équation 1.14: $v = v_0 - gt \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$, pour $a = -g$ et pour $v = 0$ au sommet. Pour la descente on aura de la même façon: $v_0 = gt \Rightarrow t_d = \frac{v_0}{g}$. Le temps total sera donc $t_{max} = t_m + t_d = 2\frac{v_0}{g} = 40.8$ s.

Dans l'atmosphère, la présence de l'air génère un frottement qui peut modifier ce comportement. Par exemple, il existe une vitesse limite due au frottement.

1.7.3 Le mouvement en deux dimensions

Supposons que nous lançons obliquement un objet vers le haut. Le mouvement est le même que s'il y avait deux mouvements indépendants et simultanés: un mouvement horizontal rectiligne et uniforme et une chute verticale uniformément accélérée sous l'effet de la gravité. L'interaction gravitationnelle est la cause de l'accélération verticale, et n'agit pas dans la direction horizontale. L'accélération horizontale (si l'on néglige la résistance de l'air) est donc nulle. Nous étudierons ici la description de ce mouvement.

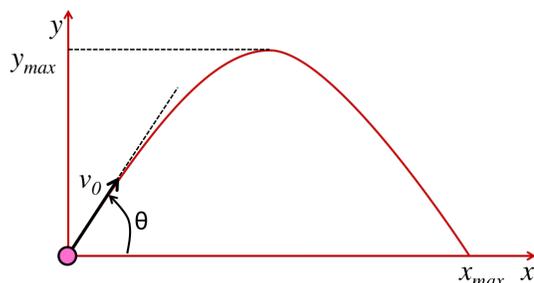


Figure 1.10: Représentation générale du mouvement à deux dimensions. E.g. lancement d'une balle de golf.

Nous pouvons décomposer le mouvement en deux dimensions: une dimension le long de l'axe horizontal x , et une le long de l'axe vertical y . Dans la direction x nous avons un MRU et dans la direction y nous avons un MRUA.

Le point de départ sera noté $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ avec $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Au moment $t = 0$ on donne à la balle une vitesse initiale de module v_0 dans une direction qui fait un angle θ avec l'axe x et telle que les deux composantes horizontale et verticale de la vitesse sont positives.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Dans la direction x nous avons un MRU et dans la direction y un MRUA. Les équations du déplacement en fonction du temps dans les deux directions sont:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t \end{pmatrix}$$

et les équations de la vitesse en fonction du temps:

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta - g t \end{pmatrix}$$

Le mouvement vertical est déjà étudié dans la section 1.7.2. On peut extraire la hauteur y_{max} et le temps total du mouvement, t_{max} comme dans l'exemple 1.7.2:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad \text{et} \quad t_{max} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (1.23)$$

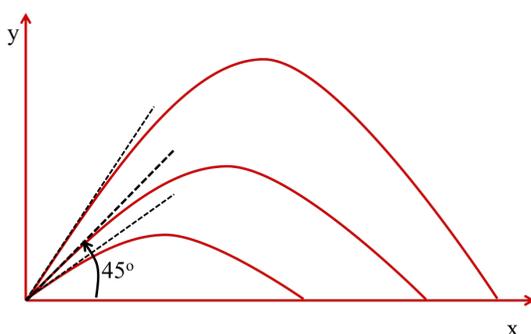
La distance x_{max} est la distance parcourue dans la direction x pendant un temps t_{max} :

$$x_{max} = v_0 \cos \theta t_{max} = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \Rightarrow$$

$$x_{max} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta \quad (1.24)$$

La quantité $\cos \theta \sin \theta$ est maximum pour $\theta = 45^\circ$. À cet angle la portée du tir pour une vitesse donnée est maximale.

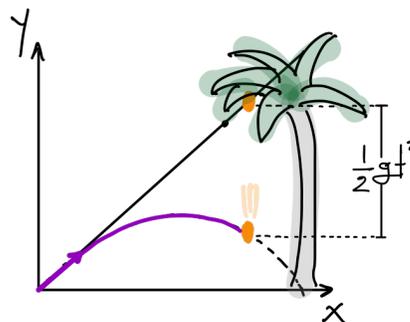
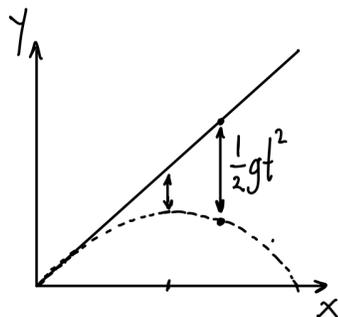
Question pour réfléchir.



Le dessin est-il correct? Trois obus tirés du même point sous des angles différents par rapport à l'horizontale: 30° , 45° et 60° . Leurs trajectoires sont représentées sur le dessin. Est-il correct?

Raisonnement du mouvement balistique La figure ci-dessous montre une manière de penser à la trajectoire d'un obus. Sans gravité (qui crée l'accélération le long de l'axe y) l'obus aurait une trajectoire linéaire. À cause de l'accélération gravitationnelle, l'objet dans un temps t est "tombé" d'une distance $\frac{1}{2}gt^2$ (MRUA avec accélération g). Cette séparation de la ligne droite augmente comme $\frac{1}{2}gt^2$, ce qui donne la trajectoire la forme parabolique.

Nous pouvons utiliser cette idée pour réfléchir sur le problème "classique" suivant: *Un chasseur tire vers une noix de coco qui se trouve sur l'arbre, et lance sa flèche à la direction définie par la ligne droite entre lui-même et la noix. À cet instant exact, la noix de coco tombe de l'arbre. Est-ce que la flèche la trouvera-t-elle?*



Chapitre 2

Les forces

Quand toutes les forces externes exercées sur un système agissent de façon à ce que la quantité de mouvement reste constante, le système est en équilibre. L'étude de ces systèmes est le domaine de la *statique*. Par contre, la discipline traitant le comportement des systèmes hors de l'équilibre est la *dynamique*. Un corps soumis à une force est accéléré dans la direction de cette force.

Nous introduisons dans ce chapitre un concept important pour la physique, celui de la force. Le concept de force permet de décrire quantitativement l'interaction entre deux corps, ou entre un corps et son environnement. La dynamique étudie le lien entre le mouvement et la force qui induit ou modifie ce mouvement. Les trois lois de Newton permettent d'étudier la dynamique qui régit l'action des forces sur le mouvement.

Contenu

2.1	Qu'est-ce qu'une force?	29
2.2	Les trois lois de Newton	30
2.2.1	La première loi de Newton: la loi d'inertie	30
2.2.2	La quantité de mouvement	31
2.2.3	La deuxième loi de Newton: la relation entre la force et les changements de mouvement	32
2.2.4	La troisième loi de Newton: action et réaction	33
2.2.5	Conservation de la quantité de mouvement	34
2.3	Diagramme du corps isolé	34
2.4	Le poids	35
2.4.1	Poids et cordes	36
2.4.2	Force de Réaction	36
2.5	Mouvements couplés	39
2.6	Frottement et mouvement	40
2.6.1	Le frottement statique	41
2.6.2	Le frottement cinétique	42
2.6.3	Le frottement avec roulement	43
2.7	Équilibre des corps en translation	45
2.7.1	Systèmes de forces parallèles et colinéaires	45
2.7.2	Systèmes de forces concourantes	47

2.1 Qu'est-ce qu'une force?

Il est très difficile de définir une force par un autre moyen que ses résultats. La force est l'agent du changement, celui qui modifie le vecteur vitesse d'un corps (l'amplitude ou la direction), ou essaie de le faire. Dans l'Univers, tel qu'il existe aujourd'hui, il y a quatre forces fondamentales distinctes: gravitationnelle, électromagnétique, forte et faible. Les forces macroscopiques peuvent être mesurées par un dynamomètre et l'unité utilisée est le *newton* (N). La définition de cette unité sera donnée plus tard dans ce chapitre, dans la section 2.2.3. La force étant un vecteur, l'effet net de plusieurs forces est le même que celui d'une seule force qui correspond à la somme vectorielle des forces appliquées.

Un équilibre **statique** est obtenu quand la somme vectorielle de toutes les forces sur un corps immobile est zéro; il n'y a aucun mouvement dans ce cas (figure 2.1). Quand la somme vectorielle de toutes les forces n'est pas zéro, la situation est **dynamique**. Il y a une accélération dans la direction de la force résultante.

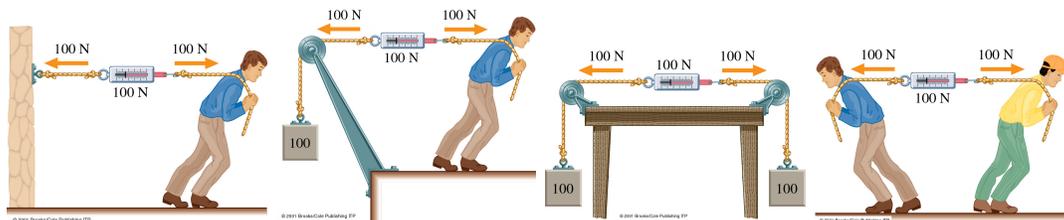
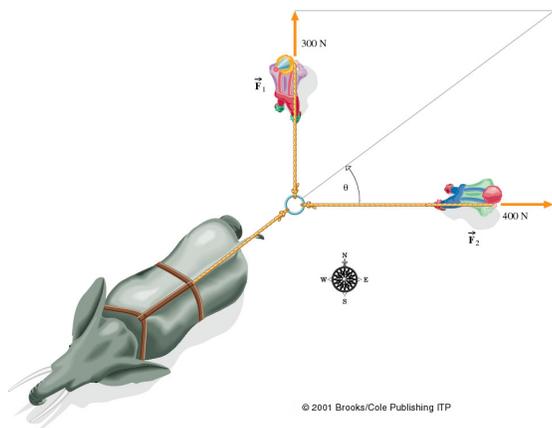


Figure 2.1: Utilisation d'un dynamomètre pour mesurer les forces. La figure illustre des situations qui semblent être différentes mais qui sont équivalentes "vues" du dynamomètre. Les exemples de cette figure montre des situations d'équilibre statique.

Exemple 2.1.1. Déterminer la force résultante exercée sur l'éléphant par les deux clowns.



Solution. Données: $F_1 = 300$ N et $F_2 = 400$ N. À déterminer: La résultant \vec{F} . Nous voulons la somme vectorielle: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Comme les forces forment un triangle rectangle, $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 500$ N. Pour trouver l'angle de \vec{F} avec l'axe est-ouest, on utilise la définition de $\tan \theta$: $\theta = \tan^{-1} \frac{300}{400} = 36.9^\circ$ nord-est. Vérification rapide: $(500 \text{ N}) \cos 36.9^\circ = 400$ N.

Exemple 2.1.2. Déterminer la force nette exercée sur l'anneau par les trois personnes dans la figure 2.2.

Solution. Données: $F_1 = 707$ N, $F_2 = 500$ N, et $F_3 = 966$ N. À déterminer: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Décomposons les trois vecteurs en leur composantes pour obtenir la résultante, comme indiqué aux figures ci-dessous.

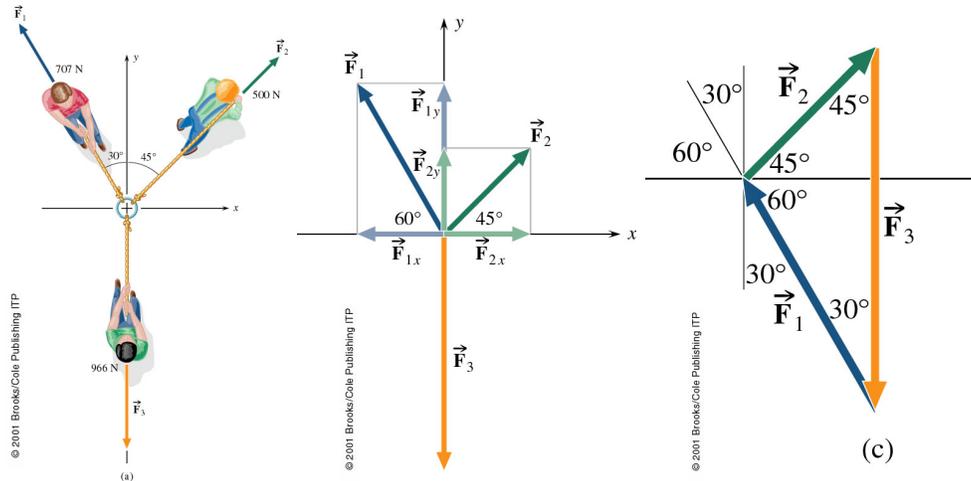


Figure 2.2: Trois forces passant par un même point et appliquées dans des directions différentes. Les trois forces sont décomposées suivant les axes x et y . Comme la résultante des forces est nulle, les trois vecteurs forment un triangle.

2.2 Les trois lois de Newton

2.2.1 La première loi de Newton: la loi d'inertie

Isaac Newton est né le jour de Noël 1642, année de mort de Galilée. Newton fut sûrement l'un des plus grands génies de tous les temps. Une des plus belles réussites de Newton est sa théorie du mouvement qui n'a jamais été mise en défaut pendant 200 ans.

En 1687, Isaac Newton a formulé les "axiomes ou lois du mouvement" dans son grand ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica* (appelé aujourd'hui *Principia*). Sa première loi était la loi d'inertie, qui répond la question, *que se passe-t-il lorsqu'aucune force n'agit sur un corps?* **Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne et uniforme aussi longtemps que la somme des forces extérieures agissant sur lui est nulle.** Il a attribué cette loi à Galilée.

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{constante} \quad (2.1)$$

La loi d'inertie est une loi idéale. Nulle part dans l'Univers, un objet peut être libéré complètement des influences externes. C'est pour ça que sur Terre, la vérification directe de cette loi est difficile, car la résistance de l'air et la gravité ne peuvent pas être supprimées.

Nous avons déjà vu une application de la loi d'inertie au mouvement des projectiles (section 2.3.3). Dans la direction horizontale, où il n'y a pas de force appliquée dans le cas où on néglige la résistance d'air, le mouvement est rectiligne et uniforme. Dans la direction verticale, la force gravitationnelle agit sur l'objet et change sa vitesse.

La loi d'inertie est valable dans tous les référentiels à vitesse relative constante. Un tel référentiel est un **référentiel d'inertie**. Un exemple est donné à la figure 2.3: le mouvement vertical des clés qui tombent dans un train est aperçu différemment par une personne qui se trouve dans le train et une autre personne qui regarde ce même train passer. Le mouvement horizontal du train n'a aucun effet sur la loi de la chute.

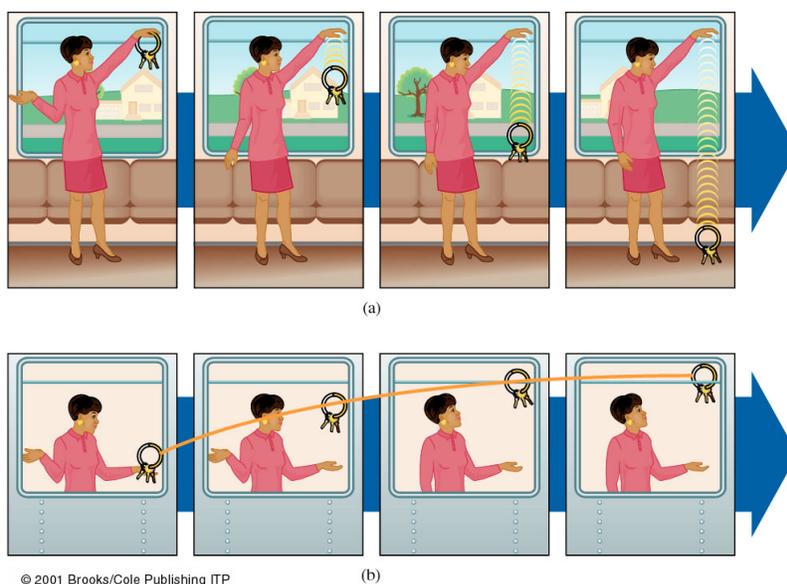


Figure 2.3: Une expérience faite à l'intérieur d'un train en mouvement rectiligne et uniforme. Observées de l'intérieur, les clés lâchées tombent verticalement, vers le bas. Observées de l'extérieur du train, les clés lancées verticalement vers le haut, décrivent une parabole, similaire au projectile d'un canon.

Les propriétés d'inertie d'un corps sont caractérisées par sa **masse**: plus la masse d'un corps est grande, plus il résiste à la force. La masse est associée à la quantité de matière, qui ne change pas d'un endroit à un autre dans l'Univers, contrairement au poids qui est proportionnel à l'accélération gravitationnelle.

2.2.2 La quantité de mouvement

La quantité de mouvement ou impulsion (en anglais *momentum*) est le produit de la masse avec la vitesse:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.2)$$

La vitesse caractérise l'état instantané du mouvement et la masse caractérise l'inertie du corps et sa 'préférence' à préserver son propre état. La quantité de mouvement est un vecteur. L'unité de la quantité de mouvement est une masse multipliée par une vitesse, par exemple:

$$[p] = [m] \cdot [vitesse] = kg \cdot \frac{m}{s}$$

La quantité de mouvement nous donne une vraie mesure du mouvement. Imaginez une mouche et une voiture qui se déplacent les deux à 60 km/h. Comme la vitesse, la quantité de mouvement est relative. La quantité de mouvement d'un objet de vitesse \vec{v} par rapport à un observateur est $m\vec{v}$ relativement à cet observateur. La quantité de mouvement d'un pilote volant à 800 km/h est nulle par rapport à l'avion.

2.2.3 La deuxième loi de Newton: la relation entre la force et les changements de mouvement

La deuxième loi de Newton lie la variation de la quantité de mouvement d'un corps aux forces qui lui sont appliquées. Plus précisément, *la force moyenne exercée sur un corps est égale à la variation résultante de la quantité de mouvement divisée par la durée du processus.*

$$\boxed{\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} \quad (2.3)$$

Cette loi implique les deux concepts suivants: (a) l'impulsion d'un objet change sous l'effet d'une force, et (b) la force résulte d'un changement d'impulsion. Dans ce formalisme, l'interaction entre deux corps est le résultat d'un échange d'impulsion. Au niveau quantique, cet échange est véhiculé par l'échange d'une particule spécifique pour chacune des 4 forces fondamentales:

Force	Agit sur...	Intensité relative	Particule
Forte	quarks et particules les contenant	1	gluon g
Electromagnétique	particules chargées électriquement	$\approx 10^{-2}$	photon γ
Faible	toutes particules	$\approx 10^{-5}$	W^\pm, Z^0
Gravitationnelle	toutes particules massives	$\approx 10^{-42}$	graviton (hypothétique)

L'essence de la deuxième loi de Newton est qu'une force instantanée cause un changement instantané de l'impulsion. Ceci se voit en faisant tendre Δt vers zéro dans la définition de cette deuxième loi.

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

et pour le cas où la masse est constante pendant l'application de la force \vec{F} ,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2.4)$$

La force accélère donc les objets dans sa propre direction. Une force appliquée à un objet de masse 1 kg qui provoque une accélération constante de 1 m/s^2 est définie comme une force de 1 *newton* (1 N):

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Autrement dit, nous définissons 1 N comme la force qui, agissant sur un corps quelconque, produit une variation de sa quantité de mouvement égale à $1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ en 1 s.

Exemple 2.2.1. Une balle de masse $m = 0.142$ kg quitte la main d'un joueur avec une vitesse finale de 20 m/s. Déterminez le module de la force, supposée constante, pour un lancement rectiligne qui dure 0.02 s.

Solution. Données: la masse de l'objet, $m = 0.142$ kg; la durée de l'accélération, $\Delta t = 0.02$ s; la vitesse initiale, $v_i = 0$ et la vitesse finale, $v_f = 20$ m/s.

Puisque la force est supposée constante, l'accélération l'est aussi et elle est égale à l'accélération moyenne:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s}}{0.02 \text{ s}} = 1000 \text{ m/s}^2$$

La force sera donc, $F = ma_m = (0.142 \text{ kg})(1000 \text{ m/s}^2) = 142 \text{ N}$.

Exemple 2.2.2. Un vieux taxi de masse $m = 1741.7$ kg, roule sur une route à la vitesse $v = 35.8$ m/s, lorsque le conducteur décide de continuer au point mort. La résistance de l'air le ralentit jusqu'à 22.4 m/s en 24 s avec une décélération non-uniforme. (a) Calculez la décélération moyenne pendant cet intervalle de temps. (b) Déterminez la force moyenne agissant sur la voiture.

Solution. (a) Selon la définition de l'accélération, sa moyenne a_m vaut:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{(22.4 - 35.8) \text{ m/s}}{24 \text{ s}} = -0.558 \text{ m/s}^2$$

(b) La force moyenne vaut:

$$F_m = ma_m = (1741.7 \text{ kg})(-0.558 \text{ m/s}^2) = -971.9 \text{ N}$$

Le signe négatif indique que la force décélère l'objet.

La force qui figure dans la 2ème loi de Newton, est la force nette appliquée à l'objet de masse m , i.e. la somme de toutes les forces appliquées:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Cette équation représente trois équations, une pour chaque direction de l'espace:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z$$

2.2.4 La troisième loi de Newton: action et réaction

Un corps isolé obéit à la loi de l'inertie. Par contre, l'interaction de deux entités implique une paire de forces de même module et de sens opposés, chacune agissant sur une entité. Lorsque deux corps A et B interagissent, ils exercent l'un sur l'autre des forces égales en grandeur et opposées en direction:

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}} \quad (2.5)$$

Cette formulation implique que chaque force fait partie d'une paire interactive.

Quand on parle d'une force, on ne considère d'habitude que la moitié de l'interaction. On ressent la gravitation parce que la Terre attire tous nos atomes vers son centre. Mais la Terre est aussi attirée par nous avec la même force. Si un objet ne se comporte pas selon la loi d'inertie, ceci implique la présence d'un deuxième objet dans le système qui interagit avec lui.

Exemple 2.2.3. Le moteur d'une petite fusée éjecte 10 kg de gaz d'échappement par seconde. En supposant que ces molécules ont une vitesse moyenne de 600 m/s, calculer la poussée de ce moteur.

Solution. Données: pour le gaz d'échappement $v_i = 0$, $v_f = 600$ m/s et 10 kg sont éjectés par seconde. À déterminer: la poussée F_m exercée par le moteur.

Nous savons qu'à chaque seconde, 10 kg de gaz d'échappement subissent un accroissement de vitesse de $\Delta v = 600$ m/s. La force moyenne exercée sur le gaz est donc:

$$F_m = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{(10 \text{ kg})(600 \text{ m/s})}{1 \text{ s}} = 6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Le moteur pousse donc le gaz avec une force F_m dirigée vers l'arrière et le gaz exerce sur la fusée une poussée égale en module et dirigée vers l'avant.

2.2.5 Conservation de la quantité de mouvement

Une des idées majeures de la physique est la loi de conservation de la quantité de mouvement. **Si la résultante de toutes les forces externes agissant sur un système est nulle, la quantité de mouvement du système reste constante.** En d'autres termes, la quantité de mouvement totale de l'Univers reste inchangée et le sera à jamais.

Nous retournerons beaucoup à ce sujet plus tard dans le cours.

Nous étudions dans la suite quelques types de forces (e.g. le poids et la force de frottement). Nous étudions aussi l'effet des forces sur le mouvement d'un objet point, i.e. un objet sans dimensions.

2.3 Diagramme du corps isolé

En progressant dans notre analyse des objets et leurs interactions, nous rencontrerons des situations où plusieurs forces agissent sur un corps dans des directions différentes. Bien que les choses deviennent compliquées, une représentation de **corps isolé** aide parfois à faire cette analyse: on imagine qu'on isole l'objet qui nous intéresse des autres corps du système avec lesquels il est en contact, et on remplace l'action de ces corps sur le corps isolé par les vecteurs forces appropriées. Il reste le corps seul avec l'ensemble des vecteurs forces agissant sur lui.

Plus spécifiquement: (a) on supprime tout objet en contact avec l'objet étudié et (b) on remplace chaque source d'interaction par un vecteur force. Deux exemples sont donnés à la figure 2.4.

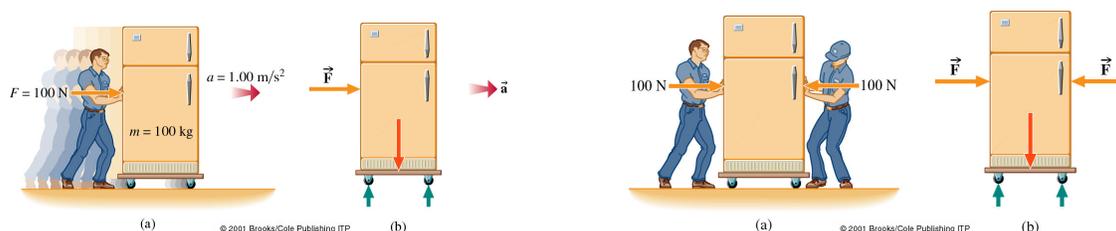


Figure 2.4: Gauche: Si la seule force horizontale qui agit sur un corps de masse m est F , alors il accélère horizontalement en satisfaisant la deuxième loi de Newton, $F = ma$. Ce mouvement est indépendant des forces verticales, que nous traiterons plus loin. La représentation de corps isolé montre la force horizontale. Droite: Cas de deux personnes qui agissent sur un corps avec deux forces opposées. La force est une grandeur vectorielle, alors ces deux forces se contrebalancent et $\sum \vec{F}_H = 0$; ce qui veut dire que le corps ne peut avoir aucune accélération horizontale. La représentation de corps isolé rend ce résultat plus visible.

Exemple 2.3.1. Un enfant tire un chariot de masse totale $m = 100$ kg. Il applique une force constante de 100 N sous un angle de $\theta = 30^\circ$. Calculer la force qui induit le mouvement et l'accélération résultante du chariot, en négligeant les frottements.

Solution. Données: $m = 100$ kg, $F = 100$ N, $\theta = 30^\circ$. À déterminer: F_H et a_H .

Le chariot étant trop lourd pour être soulevé, la composante verticale de la force est sans effet (dans le cas présent où on néglige les frottements).

Définissons un système de coordonnées dont l'axe x horizontal pointe dans la direction de la force. Un diagramme du corps isolé nous dit que la seule force dynamique est la composante horizontale F_x :

$$\sum F_x = F_x = F \cos \theta = F \cos 30^\circ = 86.6 \text{ N}$$

L'équation du mouvement (deuxième loi de Newton) sur cet axe x est:

$$\sum F_x = ma_x$$

Ainsi: $a_x = 0.866 \text{ m/s}^2$.

2.4 Le poids

Le poids d'un objet, n'importe où au voisinage de la Terre, est la force dirigée vers le centre de la planète qui s'exerce sur cet objet du fait de son interaction gravitationnelle avec la Terre.

Nous sommes en interaction gravitationnelle permanente avec la lune, les planètes, le soleil et une bonne partie des étoiles proches du système Solaire. Notre poids est le résultat net de nos interactions avec l'Univers entier. D'un point de vue pratique, l'influence de la Terre est dominante et toute autre influence est négligeable. Parce que la Terre tourne sur elle-même, nous sommes tous entraînés dans cette rotation. Ainsi, tout en nous pesant dans notre salle de bains, nous sommes animés d'un mouvement circulaire autour de l'axe de la Terre. Ce mouvement produit une accélération. Ce que nous lisons alors est le poids effectif, légèrement inférieur au poids gravitationnel; mais la différence est négligeable.

La deuxième loi de Newton fournit une relation entre les notions de poids (F_W) et de masse (m)¹. Comme le poids d'un corps sur Terre est attiré vers le bas avec une accélération g , la relation $\vec{F} = m\vec{a}$ devient:

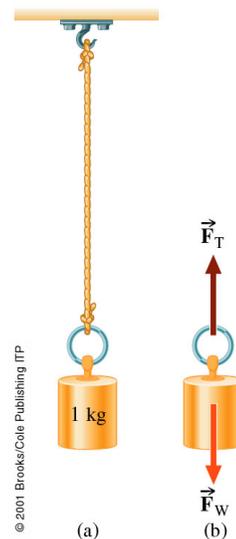
$$\vec{F}_W = m\vec{g} \quad (2.6)$$

Plus la masse est grande, plus le poids est grand. Ici, \vec{g} est le vecteur accélération gravitationnelle, dirigé vers le bas.

2.4.1 Poids et cordes

Nous considérons des cordes de masse négligeable par rapport aux masses qu'elles portent. La tension F_T est alors la même en deux points quelconques de la corde, du moment qu'aucune force tangentielle n'agisse entre ces deux points. La force exercée par une corde sur un corps auquel elle est attachée a un module F_T et elle est orientée dans la direction de la corde vers le centre de la corde.

La figure à coté montre une masse d'un kilogramme attachée à une corde. La masse est attirée vers la Terre par la gravitation qui agit sur tous ses atomes. Le module F_W de la force totale dirigée vers le bas, est communément appelé le poids. La masse tire vers le bas sur l'extrémité de la corde. La corde tire vers le haut avec une force de magnitude F_T qui est la tension. On néglige le poids de la corde dans cette discussion.



Appliquons la deuxième loi de Newton sur un axe y le long de la corde pointant vers le haut. Pour un corps en équilibre, $\sum \vec{F} = 0$. Donc:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_W = m\vec{a} = \vec{0}$$

Comme il n'y a qu'un seul axe qui importe, nous pouvons passer en notation scalaire, en respectant les signes:

$$\sum F_y = F_T + (-F_W) = 0 \Rightarrow F_T = F_W$$

La tension est la même en chaque point de la corde, toujours dirigée le long de la corde.

2.4.2 Force de Réaction

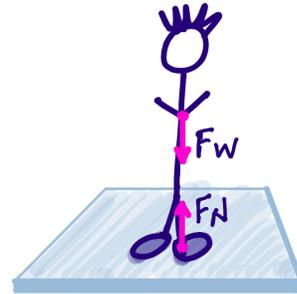
La force exercée par une surface sur un objet avec lequel elle est en contact est appelée **force de réaction**. Elle peut avoir à la fois une composante tangentielle, dite **force de**

¹Nous écrivons F_W en référence au mot *Weight*, poids en anglais.

frottement (F_f) et une composante normale à la surface, dite **force normale** (F_N). Ces forces de contact sont dues à l'interaction électromagnétique entre des atomes de la surface et des atomes de l'objet quand ils sont proches.

Une personne debout et immobile est soumise à une force verticale effective (le poids vers le bas et la force normale du sol vers le haut) qui est nulle (figure 2.5). La deuxième loi de Newton exige alors que la personne reste au repos dans la direction verticale.

Figure 2.5: Le poids d'un corps est équilibré par une force normale opposée, exercée par le plancher dans le sens ascendant. La représentation du corps isolé montre les deux forces agissant sur la personne debout. En fait, la force normale est répartie sur les deux pieds.



Le plan incliné Considérons maintenant un objet placé sur un plan incliné (figure 2.6), qui a un angle d'inclinaison θ par rapport à l'horizontale. La force gravitationnelle agit strictement vers le bas. Mais par rapport au plan incliné elle a deux composantes:

- $F_{W\parallel} = F_W \sin \theta$, parallèle au plan,
- $F_{W\perp} = F_W \cos \theta$, perpendiculaire au plan.

La deuxième loi de Newton peut être appliquée dans chacune des deux directions séparément. La force qui accélère le corps vers le bas du plan est $F_{W\parallel}$. Nous avons: $\sum F_{\parallel} = ma_{\parallel}$, d'où nous pouvons calculer a_{\parallel} . Comme il n'y a aucune accélération perpendiculaire au plan, $\sum F_{\perp} = ma_{\perp} = 0$, donc la force $F_{W\perp}$ doit être équilibrée par une force opposée, la **réaction normale** F_N .

Exemple 2.4.1. Une skieuse de 50 kg (figure 2.6) descend une pente enneigée inclinée à 30° . On néglige le frottement et la résistance de l'air. Calculer (a) le module de la force normale agissant sur elle, (b) le module de la force qui la fait glisser le long du plan incliné et (c) l'accélération résultante.

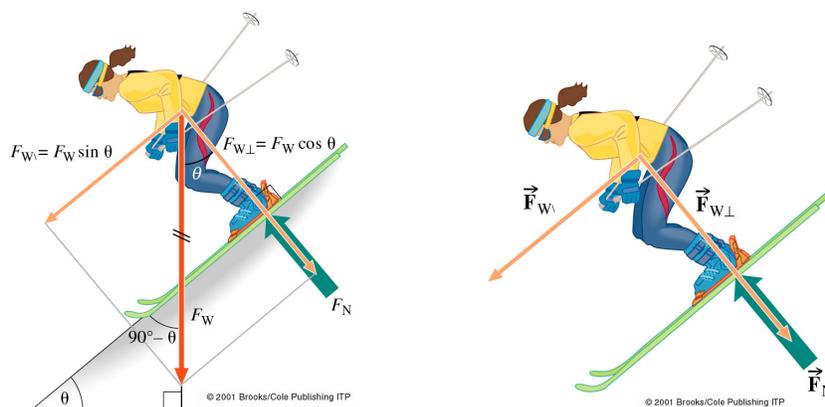


Figure 2.6: Un corps sur un plan incliné. La composante du poids parallèle au plan incliné entraîne le corps vers le bas du plan. La composante du poids normale au plan est équilibrée par la réaction normale du plan. L'application de la deuxième loi de Newton dans la direction du plan donne $\sum F_{\parallel} = F_{p\parallel} = ma_{\parallel}$.

Solution. Données: $m = 50 \text{ kg}$ et $\theta = 30^\circ$. À déterminer: (a) F_N , (b) la force parallèle au plan incliné et (c) a_{\parallel} .

(a) La composante du poids de la skieuse qui l'appuie sur la surface est:

$$F_{W\perp} = mg \cos \theta = (50 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ$$

soit:

$$F_{W\perp} = 425 \text{ N}$$

Comme la skieuse ne quitte pas la surface du plan, alors $a_{\perp} = 0$. Prenons la direction normale à la surface, dirigée vers le haut, comme positive. La somme des forces perpendiculaires au plan incliné est nulle, ainsi: $\sum F_{\perp} = 0 = F_N + (-F_{W\perp})$. Donc $F_{W\perp}$ est dirigée vers l'intérieur de la surface, dans la direction négative. Alors, $F_N = 425 \text{ N}$.

(b) Le module de la force motrice vers le bas du plan incliné est:

$$F_{p\parallel} = mg \sin \theta = (50 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ$$

et ainsi $F_{p\parallel} = 245 \text{ N}$.

(c) Pour calculer l'accélération vers le bas le long du plan, nous prenons la direction du mouvement vers le bas comme positive. La deuxième loi de Newton donne:

$$F_{\parallel} = ma_{\parallel} = F_{W\parallel}$$

alors $a_{\parallel} = g \sin \theta$, et pour $\theta = 30^\circ$, $a_{\parallel} = \frac{1}{2}g$. Ce résultat est indépendant de la masse, et s'applique à tout corps glissant vers le bas sans frottement sur un plan incliné à $\theta = 30^\circ$.

Cas special: la physique du saut Quand on veut sauter, il faut une force nette sur notre corps dirigée vers le haut. La troisième loi de Newton nous enseigne comment procéder: appuyons sur le plancher et celui-ci va nous pousser vers le haut. La force des muscles, F_M , pousse vers le bas. La charge totale est la somme de cette force, F_M , et du poids, F_W . La réaction du plancher devient:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_M + \vec{F}_W$$

Seules deux forces externes agissent sur le corps, \vec{F}_W vers le bas et \vec{F}_N vers le haut. Donc:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_W + \vec{F}_N$$

$$\sum F_y = F_W - (F_M + F_W) = -F_M$$

Cette somme correspond à une force nette dirigée vers le haut qui nous permet de sauter.

2.5 Mouvements couplés

Les deux masses dans les exemples de la figure 2.7 sont reliées par une corde de longueur fixe. Les poulies sont légères et sans frottement, il n'y a donc pas de force tangentielle et la tension est constante le long de chaque corde. Nous négligeons les frottements des surfaces.

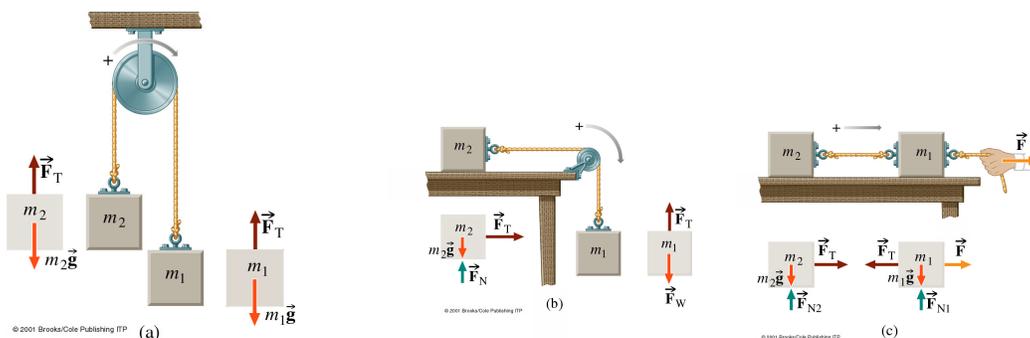


Figure 2.7: Trois exemples de systèmes couplés formés par deux masses attachées ensemble par une corde. La représentation de corps isolé pour chaque masse est illustrée. Dans chacun des trois exemples la même tension agit sur les deux masses et elles ont la même accélération.

Supposons que le mouvement ait lieu dans chaque cas dans la direction de la flèche. La plus grande masse m_1 tire la corde et la corde tire la masse m_2 . Les deux masses ont la même accélération a , car la masse entraînée ne peut pas rattraper m_1 et détendre la corde, ni avoir une accélération inférieure à celle de la corde.

La deuxième loi de Newton permet d'écrire deux équations couplées et déterminer deux inconnues, F_T et a .

Exemple 2.5.1. Marie ($m_M = 50$ kg) et son ami Daniel ($m_D = 70$ kg) sont reliés par une corde de masse négligeable. Elle est debout et marche sans frottement sur une plaque horizontale de glace mouillée quand son ami tombe d'une falaise (figure 2.8). La corde passe sans frottement sur une branche d'arbre. Nous supposons que la partie de la corde vers la fille est horizontale. Déterminez: (a) la tension dans la corde et (b) les accélérations des deux personnes.

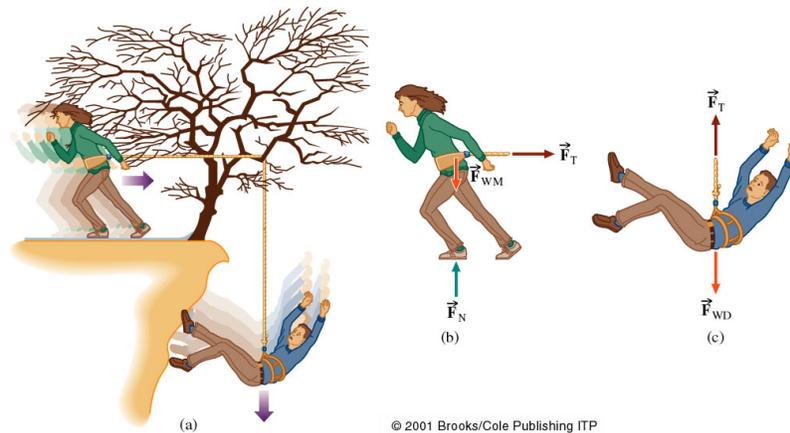


Figure 2.8: (a) La fille glissant sur la grace, après la chute de son ami de la falaise. Représentation de corps isolé pour (b) la fille et (c) le garçon.

Solution. Commençons par la représentation du corps isolé pour chaque personne. Tant que la corde ne se détend pas, $a_M = a_D \equiv a$. Comme le garçon est plus lourd que la fille, l'expérience nous dit que le mouvement ira de Marie vers Daniel. Pour elle, la direction vers la droite sera positive. Pour lui, elle sera positive vers le bas. On a deux inconnues, F_T et a . Nous avons donc besoin de deux équations. Le poids de Marie est compensé par le sol, elle n'a qu'un mouvement horizontal. Daniel ne subit pas de force horizontale et son mouvement est purement vertical.

Appliquons la deuxième loi de Newton au mouvement horizontal et au mouvement vertical:

$$\sum F_{horiz} = F_T = m_M a$$

$$\sum F_{vert} = F_{WD} - F_T = m_D a$$

En substituant F_T de la première équation dans la deuxième équation et sachant que $F_{WD} = m_D g$, on prend:

$$F_{WD} - m_M a = m_D g - m_M a = m_D a \Rightarrow a = \frac{m_D}{m_D + m_M} g$$

$$F_T = m_M a = \frac{m_M m_D}{m_M + m_D} g$$

soit $a = 0.58g$ et $F_T = 0.29 \text{ kN}$.

2.6 Frottement et mouvement

L'expérience quotidienne montre qu'en l'absence de force motrice, tout objet en mouvement fini par s'arrêter, en violation apparente de la première loi de Newton. La deuxième loi nous dit qu'il faut une force pour décélérer le mouvement: c'est la **force de frottement**.

Il y a deux formes principales de frottements: le **frottement cinétique** qui s'oppose à un mouvement déjà établi, et le **frottement statique** qui empêche un mouvement de démarrer.

L'origine du frottement est l'interaction électromagnétique des atomes qui forment les solides, les liquides et les gaz. Le **frottement liquide-gaz** nous évite d'être bombardés par des gouttes de pluie de grande vitesse. Il permet au vent de remuer la mer. Le **frottement liquide-solide** ralentit la circulation du sang dans les vaisseaux. Le frottement des marées contre le sol ralentit la rotation de la terre. Le **frottement solide-gaz** ralentit les voitures: à 110 km/h une voiture utilise 70% de son carburant pour vaincre la résistance de l'air. Le **frottement solide-solide** nous permet d'agir: sans lui on ne pourrait ni porter des vêtements, ni marcher, ni manger.

Dans la suite de la discussion, nous nous intéressons au frottement sec (non lubrifié) et nous limiterons la discussion aux solides immobiles, glissants ou roulants sur d'autres solides. Attention: l'analyse du frottement est difficile et sa base expérimentale est limitée par les contaminations (e.g. traces de liquide entre les surfaces).

2.6.1 Le frottement statique

Un bloc de poids \vec{F}_W est posé sur une table qui lui oppose une force normale \vec{F}_N , toutes deux verticales (figure 2.9). Une force horizontale \vec{F} est appliquée et mesurée par un dynamomètre à ressort. Si cette force est faible, le bloc ne bouge pas. Il y a donc une force vers la gauche égale et opposée à \vec{F} , parallèle à la surface, qui s'oppose au mouvement. C'est la force de frottement statique \vec{F}_f .

Si \vec{F} augmente sans que le bloc bouge, \vec{F}_f doit aussi augmenter. Quand \vec{F} dépasse une valeur limite, le bloc finit par se mettre en mouvement. Cette limite correspond au maximum du frottement statique \vec{F}_f^{max} .

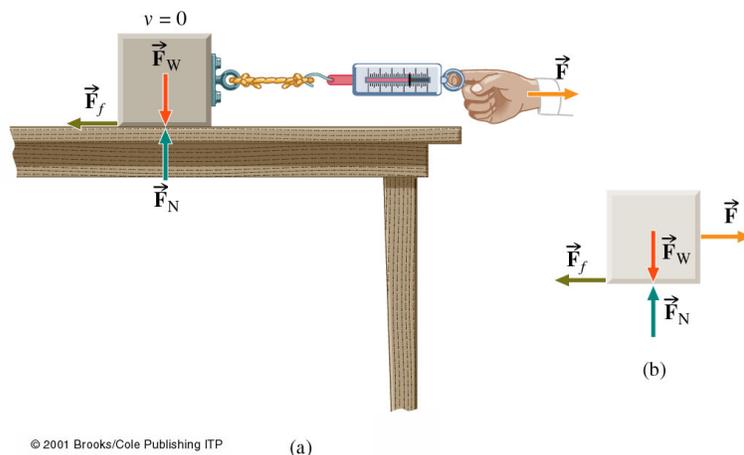


Figure 2.9: (a) Une force horizontale F agissant par l'intermédiaire d'un dynamomètre sur un bloc immobile de poids F_W . Le frottement statique s'oppose au démarrage du mouvement avec une force F_f . (b) La représentation de corps isolé indique qu'il n'y a aucune accélération tant que $F < F_f$. Pour calculer la force totale on peut dessiner les forces originant toutes du même point. Cette approche est valable que pour les mouvements rectilignes qu'on étudie ici.

La force de frottement maximum \vec{F}_f^{max} est proportionnel à la force normale:

$$\vec{F}_f^{max} = \mu_s \vec{F}_N$$

Le coefficient de proportionnalité μ_s est le coefficient de frottement statique et dépend des deux matériaux en contact. Quelques exemples qualitatifs de μ_s sont donnés dans le

tableau 2.1. \vec{F}_f^{max} est indépendante de l'étendue de la surface de contact entre les deux corps. Ainsi la force de frottement maximum d'un parallélépipède rectangle posé sur une table est la même pour toutes ses faces.

Matériaux	μ_s	μ_c
Acier sur glace	0.1	0.05
Acier sur acier, sec	0.6	0.4
Acier sur acier, lubrifié	0.1	0.05
Bois sur bois	0.5	0.3
Téflon sur acier	0.04	0.04
Chaussures sur glace	0.1	0.05
Bottes de montagne sur rocher	1.0	0.8
Pneus de voiture sur béton sec	1.0	0.7
Caoutchouc sur asphalte	0.6	0.4

Tableau 2.1: Exemples qualitatifs de coefficients de frottement statique, μ_s et de frottement cinétique, μ_c . Ce dernier sera discuté dans la suite.

Exemple 2.6.1. Une alpiniste est debout sur la face rocheuse d'une montagne. Les semelles et les talons de ses chaussures ont un coefficient de frottement statique égal à 1.0. (a) Quelle est la plus grande pente du rocher sur lequel elle peut se maintenir sans glisser? (b) Supposant que ses habits ont un coefficient de frottement statique 0.3, que se passe-t-il si elle s'assoit sur la pente pour se reposer?

Solution. (a) Le poids de l'alpiniste, \vec{F}_W , agit verticalement. Sa composante normale à la surface est compensée par la force de réaction normale du sol. La composante parallèle à la surface rocheuse est compensée par la force de frottement. L'alpiniste est immobile selon les deux directions parallèles et perpendiculaires:

$$\sum F_{\perp} = 0 = F_N - F_W \cos \theta \Rightarrow F_N = F_W \cos \theta$$

$$\sum F_p = 0 = F_f - F_W \sin \theta \Rightarrow F_f = F_W \sin \theta$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{F_f}{F_N} = \tan \theta &\Rightarrow \frac{F_f^{max}}{F_N} = \tan \theta_{max} = \mu_s \\ &\Rightarrow \theta_{max} = \arctan \mu_s \end{aligned}$$

ce qui vaut 45° pour $\mu_s = 1.0$.

(b) Si l'alpiniste s'assied avec des habits dont le coefficient de frottement vaut 0.3, l'angle maximum se réduit à $\theta_{max} = 17^\circ$. Elle glissera donc pour tout angle supérieur à 17° . Elle va chuter si elle commet l'imprudence de s'asseoir.

2.6.2 Le frottement cinétique

Si la force sur un objet au repos dépasse \vec{F}_f^{max} , l'objet se met à glisser dans la direction de la force appliquée. La force de frottement cinétique est égale et opposée à la force motrice que

l'on doit appliquer pour maintenir l'objet en mouvement uniforme. L'expérience montre que les lois citées pour le frottement statique restent valables, mais avec un coefficient de frottement cinétique, μ_c , inférieur et qui de plus diminue légèrement avec la vitesse de glissement:

$$F_f = \mu_c F_N$$

Le tableau 2.1 montre que le frottement statique est habituellement supérieur au frottement cinétique, ce qu'on peut facilement sentir lorsqu'on pousse un corps lourd. En pratique, le frottement cinétique diminue lorsque la vitesse de glissement augmente.

2.6.3 Le frottement avec roulement

La roue facilite considérablement le transport des charges par rapport au glissement. La raison est qu'en roulant sans glisser sur une surface, on élimine le frottement statique et le frottement cinétique. Mais comme il y a aussi propulsion, il y a forcément frottement. L'effet peut être décrit d'une manière analogue aux autres effets de frottement:

$$F_f = \mu_r F_N$$

avec un coefficient de frottement avec roulement, μ_r , bien inférieur à μ_s et μ_c .

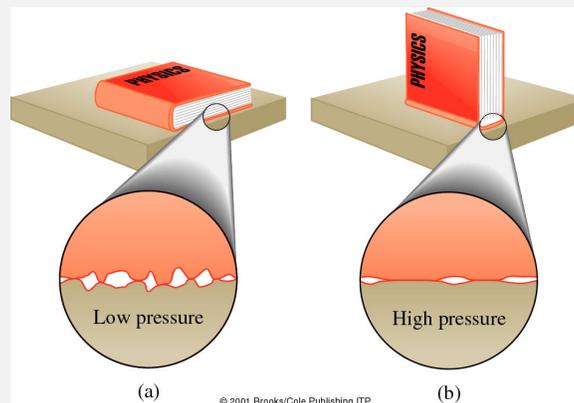
La force de frottement est encore une fois égale et opposée à la force motrice nécessaire pour que l'objet conserve une vitesse uniforme. Le frottement est dû à la déformation de la roue et de la surface de support. Si la roue et la surface sont dures, la déformation est faible, comme dans le cas des roues d'acier sur des rails d'acier, avec un μ_r qui ne dépasse guère 0.001. Un pneu sur du béton a un coefficient de l'ordre de 0.01 à 0.02 (avantage du rail sur la route).

Origine du frottement

Le frottement provient de l'attraction électromagnétique entre les atomes qui constitue la force de cohésion de la matière solide. Elle est de courte portée et devient négligeable à des distances de l'ordre de 10 rayons atomiques. À cette échelle, les surfaces de matériaux courants, mêmes polies, sont rugueuses.

Deux surfaces apparemment lisses ne se touchent en réalité que sur une petite fraction de leur surface apparente. D'autre part, la surface se déforme quand la pression, i.e. la force par unité de surface, est suffisamment grande. La surface effective est augmentée par la pression, et le frottement aussi, jusqu'à un certain équilibre. A poids constant, la pression est inversement proportionnelle à la surface apparente de contact. Si la surface apparente diminue, la pression augmente et la surface effective reste à peu près constante. Ceci explique que le frottement est indépendant de la surface (apparente) de contact pour un corps donné.

Les forces de frottement statiques apparaissent entre deux surfaces en contact. Deux pièces de métal, tel que l'or, pressées ensemble, fondent littéralement aux points de contact, et sont soudées à froid. En gardant les surfaces séparées, on réduit la cohésion et le frottement. C'est le rôle de l'huile et de la graisse pour les machines, du talc pour les sportifs et du liquide synovial pour les articulations.



(a) Si le charge est répartie sur une grande surface de contact, la pression est faible et il y a beaucoup de zones de contact réel. (b) Si la charge est concentrée, la pression est plus grande et il y a moins de zones de contact mais elles sont plus grandes. Ainsi, la superficie totale de contact réel est la même dans (a) et dans (b). Sur ces zones de contact réel, les deux corps sont littéralement soudés ensemble et des forces doivent être exercées pour les séparer.

L'adhérence est réduite si les deux corps se déplacent l'un par rapport à l'autre; donc en général, $\mu_c < \mu_s$. Lorsqu'il n'y a aucun mouvement relatif des deux corps, leurs surfaces viennent en contact étroit. Mais quand ils glissent l'un sur l'autre, les surfaces se touchent surtout aux points saillants. Par contre, en roulant, les soudures de frottement sont arrachées plutôt qu'abrasées ou déchirées, ce qui nécessite moins de force. De plus, pendant le glissement, des couches de saleté, d'oxydes et de graisse peuvent s'interposer entre les corps, ce qui peut réduire le frottement. Cela ne se produit pas dans le cas de corps en roulement où l'adhérence est encore plus faible $\mu_c > \mu_r$.

2.7 Équilibre des corps en translation

Nous nous limitons pour l'instant aux équilibres de translation pure, c'est-à-dire sans rotation. Pour simplifier, nous considérons uniquement des systèmes de forces coplanaires, c'est à dire, des forces qui agissent dans un seul plan.

La deuxième loi de Newton implique qu'un système général est en équilibre translationnel, $\vec{a} = \vec{0}$, si:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (2.7)$$

Ceci est la **première condition d'équilibre**. Si toutes les forces sont confinées dans un plan, on peut définir deux axes perpendiculaires arbitraires dans ce plan. Les composantes scalaires des forces le long de ces axes obéissent aux conditions simultanées:

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0$$

Soit une masse attachée à une corde légère accrochée au plafond. La masse, la corde et le crochet sont séparément en équilibre; pour chaque élément, $\sum F_y = 0$. La tension de la corde est égale à la charge : $F_T = F_W$.

2.7.1 Systèmes de forces parallèles et colinéaires

Si deux forces colinéaires (qui agissent suivant la même ligne), agissant sur un corps, sont dirigées l'une vers l'autre, le corps est comprimé. Par contre, si deux forces colinéaires agissant sur un corps l'étirent, on dit qu'il est soumis à une tension. Les forces externes qui supportent le système sont appelées des forces de réaction.

Cordes et poulies Si deux cordes légères et identiques supportent la même charge, comme le pot de 300 N dans la figure 2.10, la charge est également partagée, la tension de chaque corde est 150 N et la force sur chaque crochet est 150 N. Si trois cordes se répartissent également la charge de 300 N, la tension de chacune sera 100 N et la force sur chaque crochet du plafond sera de 100 N. D'autres exemples sont donnés sur les figures 2.11 et 2.12.

On peut utiliser un nombre arbitraire de poulies pour démultiplier la force par un facteur correspondant. Les poulies peuvent être montées l'une à côté de l'autre ou l'une au-dessus de l'autre. De tels dispositifs sont utilisés dans les ascenseurs et les grues. Les poulies servent donc à démultiplier et à réorienter les forces.

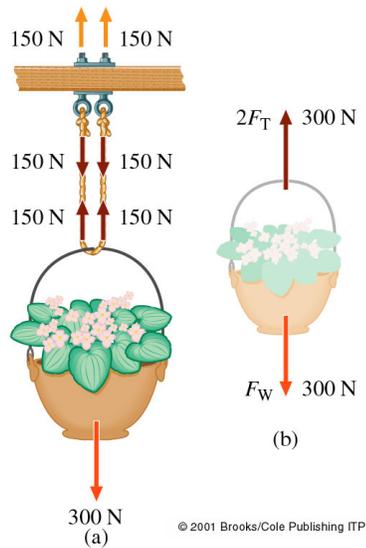


Figure 2.10: (a) Une charge portée par deux cordes. Comme le système est en équilibre, $\sum F_y = 0$. (b) La force ascendante ($2F_T$) est l'opposée de la force nette descendante (F_W). Ici vous comptez le nombre de cordes, de la même façon que vous comptez le nombre de pieds soutenant une table.

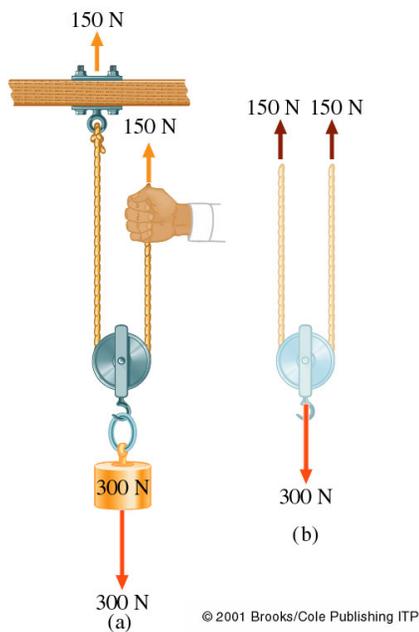
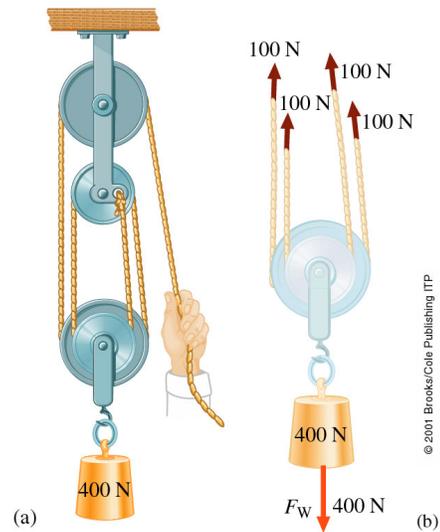


Figure 2.11: (a) Dans cette configuration, la poulie est utilisée comme un multiplicateur de force. Comptez le nombre de tronçons de cordes supportant la charge; dans ce cas, il y en a deux. Le système peut donc supporter une charge double de la force exercée. Ainsi la main soulève une charge de 300 N en exerçant une force de 150 N. (b) La tension dans chaque partie de la corde est 150 N. La force ascendante totale est donc 300 N.

Figure 2.12: (a) Quatre cordes soutiennent la charge, et le main exerce seulement une force de 100 N vers le bas. (b) Si quatre cordes soutiennent une charge en équilibre, chaque corde est sous une tension égale au 1/4 de cette charge.



2.7.2 Systèmes de forces concourantes

Les forces concourantes sont toutes les forces dont les lignes d'action passent par un même point. La ligne d'action est construite en prolongeant le vecteur force. Une situation où toutes les lignes d'action se croisent en un seul point est facile à analyser car les forces concourantes peuvent être combinées vectoriellement en une force résultante.

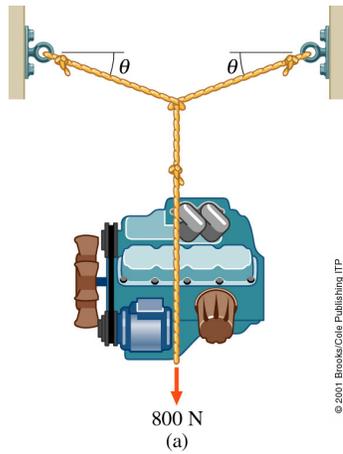
Cette situation n'est pas aussi spéciale qu'il n'y paraît: des forces coplanaires non-parallèles qui maintiennent un objet en équilibre sont forcément concourantes.

Un système, soumis à des forces concourantes et coplanaires (forces qui passent toutes par un même point et qui sont dans le même plan) est en équilibre si

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0$$

où x et y correspondent à deux directions perpendiculaires. Nous avons donc deux équations indépendantes, ce qui permet de déterminer au plus deux inconnues.

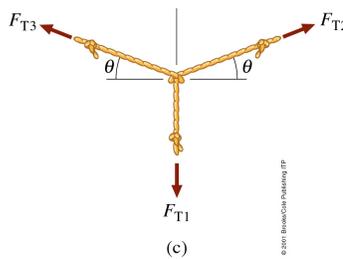
Exemple 2.7.1. Une machine qui pèse 800 N est suspendue en équilibre par deux cordes symétriques qui font un angle θ avec l'horizontale. Pour $\theta = 20^\circ$, calculez (a) la tension dans chacune des cordes et (b) la force horizontale qui essaie d'arracher les crochets d'attaches.



Consulter le tableau suivant des tensions de rupture (en kN) pour déterminer quelle corde convient. Pour éviter une rupture à cause de forces momentanément élevées, il est d'usage de ne pas dépasser le sixième de la tension de rupture.

Diamètre (cm)	Chanvre de Manila	Filament de Nylon	Tresse de Nylon	Câble d'acier
0.48	1.8	4.0	4.6	19
0.63	2.4	6.6	7.1	31
0.79	4.0	9.6	12.0	44
0.95	5.4	14.9	16.9	64
1.11	7.0	20.0	23.1	78
1.27	10.6	27.1	32.0	101

Solution. Le système consiste en trois cordes et une charge.



(a) Le diagramme du corps isolé montre que les trois forces externes F_{T2} , F_{T3} et F_W sont concourantes au noeud. La tension F_{T1} vient du poids du moteur:

$$F_{T1} = F_W = 800 \text{ N}$$

Par symétrie, les modules des tensions dans les deux autres cordes sont les mêmes, $F_{T2} = F_{T3}$.

Prenons l'axe y positif vers le haut et l'axe x positif vers la droite. La somme des forces sur le noeud est nulle dans les deux directions. Dans la direction horizontale, cette somme s'écrit:

$$\sum F_x = F_{T2} \cos \theta - F_{T3} \cos \theta = 0$$

alors: $F_{T2} = F_{T3}$ ce qui confirme la symétrie.

Dans la direction verticale:

$$\sum F_y = F_{T2} \sin \theta + F_{T3} \sin \theta - F_W = 0 \Rightarrow 2F_{T2} \sin \theta = F_W \Rightarrow F_{T2} = 1.17 \text{ kN}$$

une force donc bien supérieure à la charge.

(b) La force horizontale qui agit sur les chevilles fixant chaque corde au mur, est: $F_x = F_{T2} \cos \theta = 1.1 \text{ kN}$.

La plus grande tension, avec sa marge de sécurité, dépasse 7 kN. Il nous faut alors un filament de nylon d'au moins 7.9 mm ou une tresse de nylon d'au moins 6.3 mm de diamètre pour tenir le moteur.

Chapitre 3

La rotation

Le problème central de l’ouvrage de Newton *Principia* était “comment les planètes se déplacent-elles”? Au coeur de la synthèse newtonienne est le concept de force gravitationnelle qui maintient les planètes sur leur orbites curvilignes. Dans le mouvement curviligne la vitesse change continuellement son vecteur même si son module reste le même. Ce mouvement de translation est étudié dans ce chapitre, ainsi que le mouvement de rotation dans la suite.

Contenu

3.1	Mouvement curviligne	49
3.1.1	Accélération centripète	49
3.1.2	Force centripète	51
3.1.3	Applications	52
3.2	Mouvement de rotation	54
3.2.1	Cinématique de la rotation	54
3.2.2	Roulement sans glissement	60

3.1 Mouvement curviligne

3.1.1 Accélération centripète

Faites tourner une balle attachée à un fil en formant un cercle. En tournant, son vecteur vitesse change continuellement, même si son module reste constant; parce que la direction de \vec{v} change nécessairement. Ceci veut dire qu’il y a une accélération et, selon la deuxième loi de Newton, une force causant cette accélération. La main tire le fil vers le centre du mouvement, et le fil tire continuellement la balle pour l’éloigner de sa trajectoire rectiligne inertielle et la maintenir sur une trajectoire curviligne. *Une force continuellement dirigée vers un centre, c’est-à-dire une **force centripète**, doit être appliquée si l’objet doit se déplacer sur une trajectoire courbée.* Si on supprime la force centripète, le mouvement devient instantanément un mouvement rectiligne uniforme tangent à la courbe (d’après le principe d’inertie) et non un mouvement radial vers l’extérieur.

Nous pouvons établir une expression pour l’**accélération centripète**, a_c , pour un objet qui se déplace **uniformément** sur un cercle (figure 3.1).

Le corps se déplace de A à B pendant un intervalle de temps Δt et, en même temps, le rayon r balaie un angle θ . Le déplacement Δs est égal à $\Delta s = r \theta$.

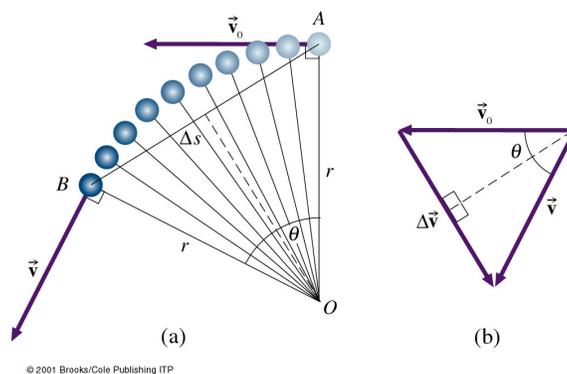


Figure 3.1: Géométrie du mouvement circulaire. Dans cette simple représentation, la vitesse est constante.

Considérons dans la suite un temps infinitésimal dt pendant lequel le corps se déplace de ds et d'un angle $d\theta$:

$$ds = r d\theta \quad (3.1)$$

Le module de la vitesse, qui est constant par rapport au temps, sera donné par:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \equiv r \omega \quad (3.2)$$

où ω correspond à la vitesse angulaire, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Même si le module de la vitesse est constant par rapport au temps, le vecteur vitesse change continuellement. Dans un temps dt la vitesse change par (figure 3.1b):

$$dv = |d\vec{v}| = v d\theta \quad (3.3)$$

L'accélération centripète aura donc un module

$$a_c = \frac{|d\vec{v}|}{dt} = v \frac{d\theta}{dt} \quad (3.4)$$

et puisque $v = r \frac{d\theta}{dt}$ (équation 3.2) on déduit:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r \omega^2 \quad (3.5)$$

La direction de \vec{a}_c est la même que la direction de $\Delta\vec{v}$ quand $\Delta t \rightarrow 0$. Nous pouvons montrer *graphiquement* que $\Delta\vec{v}$ est dirigé vers l'intérieur, perpendiculairement à $\Delta\vec{s}$ (voir figure 3.1b). Selon la deuxième loi de Newton, l'accélération est due à l'application d'une force, qu'on a appelé force centripète et qui est dirigée vers le centre de la courbe; l'accélération aura donc la même direction.

Le résultat pour l'accélération centripète (équation 3.5) s'applique aussi aux parcours qui ne sont pas strictement circulaires, à condition d'assimiler la trajectoire à une suite de petits arcs de cercles, dont le rayon varie en fonction du temps. A chaque instant t , correspond un rayon de courbure $r(t)$ de la trajectoire et une accélération centripète instantanée,

$$a_c(t) = \frac{v^2(t)}{r(t)} \quad (3.6)$$

3.1.2 Force centripète

Un corps de masse m accéléré doit subir une force de magnitude $F = ma$. Tout objet qui décrit un cercle est soumis à une force ($F_c = ma_c$) dirigée vers le centre du cercle.

$$F_c = ma_c = \frac{m v^2}{r} \quad (3.7)$$

Cette force courbe la trajectoire d'un corps qui autrement serait rectiligne selon le principe d'inertie. Plus le rayon r est petit, plus cette force est grande pour une vitesse donnée.

La force centripète est la force dirigée vers le centre d'une trajectoire circulaire; c'est la force qui génère cette trajectoire circulaire. Par exemple, dans le cas de la Lune en révolution autour de la Terre, la force centripète est l'interaction gravitationnelle; dans le cas d'une balle tournante au bout d'une corde, F_c est la tension de la corde; pour une voiture en virage sur une route horizontale, F_c est le frottement des pneus; et pour un train en virage dans des rails, F_c est la réaction des rails. *La force centripète n'est pas une nouvelle interaction*, elle est simplement le nom donné à toute force dirigée vers le centre du mouvement.

Exemple 3.1.1. Un scarabée s'est posé sur le bord d'un disque vinyle de 30.5 cm de diamètre. Quelle est l'accélération centripète de cet insecte quand le disque tourne à 33.33 tours par minute? Est-ce compatible avec une force de frottement et un coefficient de frottement de $\mu_f = 0.5$?

Solution. Données: $r = 0.152$ m et une vitesse de rotation de 33.33 t/m. À déterminer: a_c .

L'accélération centripète pour un corps circulant à la vitesse v sur un cercle de rayon r est:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

La vitesse, dont le module est constant, peut-être obtenue à partir de la distance parcourue en une minute, $\Delta s = 2\pi r \cdot 33.33 = 31.9$ m, divisée par le laps de temps, $\Delta t = 60$ s. La vitesse vaut:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{31.9 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 0.532 \text{ m/s}$$

L'accélération centripète vaut:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.532 \text{ m/s})^2}{0.152 \text{ m}} = 1.9 \text{ m/s}^2$$

La force centripète est $F_c = ma_c$. La force exercée par le disque sur le scarabée est une force de frottement. La force de frottement est $F_f = \mu_f F_W = \mu_f mg$. Si $F_f \geq F_c \Rightarrow \mu_f g \geq a_c$, le scarabée tient sur le disque. Si par contre, $F_f < F_c \Rightarrow \mu_f g < a_c$, le scarabée glisse. Dans notre exemple, $\mu_f = 0.5$ donc pour $g = 10 \text{ m/s}^2$ et alors $F_c < F_f$: le scarabée tient sur le disque. ◀

Le scarabée de l'exemple dessus, qui est à l'arrêt dans son propre référentiel, ressent la force centripète plus une force égale et opposée qui résulte du changement de référentiel non-Galiléen ressentie comme une force qui le tire vers l'extérieur, et qui l'empêche de 'tomber' vers le centre du disque: c'est la **force centrifuge**.

3.1.3 Applications

Virages relevés

Relever un virage permet de substituer le frottement par la composante horizontale de la force normale à la piste, comme la force qui fournit la force centripète du mouvement. La figure 3.2 montre la réaction normale F_N (perpendiculaire à la piste relevée) agissant sur un coureur.

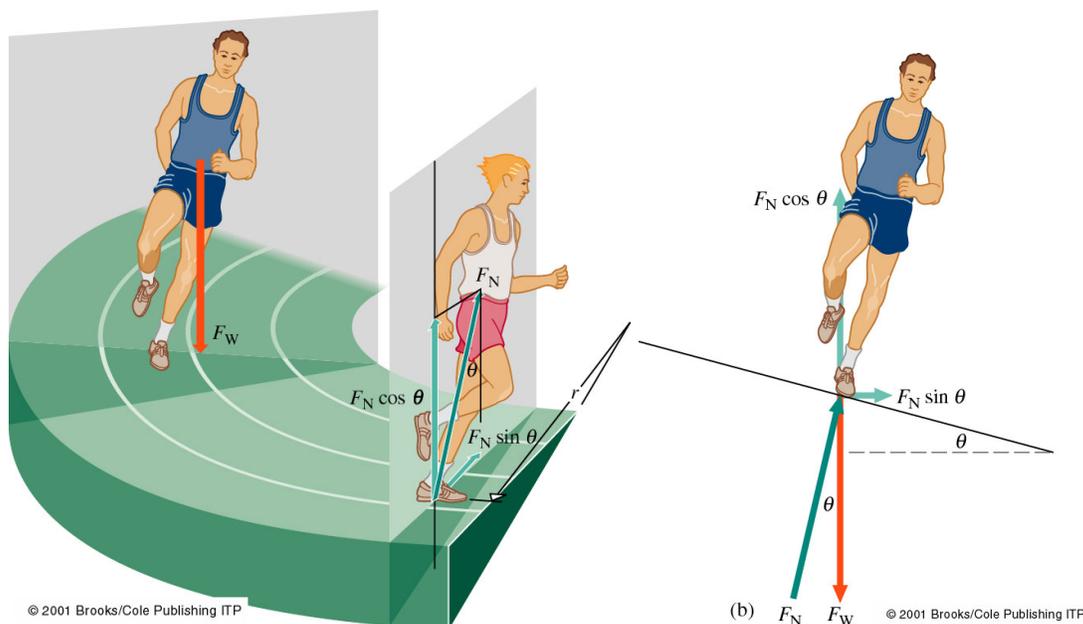


Figure 3.2: Coureur sur un virage relevé. La réaction normale F_N est toujours perpendiculaire à la route; tandis que le poids F_W est vertical vers le bas. La force normale a une composante radiale ou horizontale, $F_N \sin \theta$, qui peut être rendue égale à F_c .

Elle peut être décomposée en une composante verticale (F_V , contrebalançant le poids) et une composante horizontale (F_H , fournissant la force centripète). L'accélération verticale étant nulle, la deuxième loi de Newton donne:

$$\sum F_V = F_N \cos \theta - F_W = 0 \Rightarrow F_N \cos \theta = F_W = mg$$

Il existe une accélération horizontale (qui correspond à l'accélération centripète):

$$\sum F_H = F_N \sin \theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

En combinant les deux équations nous pouvons déterminer une relation entre l'angle θ et la vitesse v :

$$\frac{F_N \sin \theta}{F_N \cos \theta} = \frac{mv^2/r}{mg}$$

ce qui donne:

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr} \quad (3.8)$$

Cette expression donne l'angle dont il faut relever la piste pour une vitesse donnée. Cet angle ne dépend que de la vitesse et du rayon de courbure. Il est donc valable pour n'importe quel objet, indépendamment de sa masse m .

Exemple 3.1.2. Une piste circulaire de 20 m de rayon doit être relevée d'un angle θ adapté à une course de vitesse proche de 24 km/h. Calculer θ .

Solution. Données: $r = 20$ m et $v = 24$ km/h. À déterminer: θ .

La vitesse est: $v = 24 \times 10^3$ m/3600 s = 6.67 m/s Utilisant l'équation 3.8, nous déterminons θ :

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(6.67 \text{ m/s})^2}{(9.81 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})} = 0.227 \Rightarrow \theta = 12.8^\circ$$

Pesanteur artificielle

Imaginons une grenouille placée au fond d'un seau qu'on fait tourner dans un plan horizontal avec une vitesse v (figure 3.3). Le fond du seau contraint la grenouille à une trajectoire circulaire. Il exerce une force centripète dirigée vers le centre du cercle. Cette force est toujours normale à la trajectoire et ne change donc pas le module de la vitesse, mais uniquement sa direction. La gravitation est compensée par le frottement entre la grenouille et le fond du seau. La grenouille exerce sur le fond du seau une force normale dirigée vers l'extérieur.

Supposons qu'on fasse la même chose dans l'espace, en apesanteur. Il est possible d'ajuster le rayon et la vitesse tel que $a_c = \frac{v^2}{r} = 9.81 \text{ m/s}^2$. La grenouille astronaute exercerait alors sur le fond du seau la même force que si elle était sur Terre. C'est un moyen de générer une pesanteur artificielle dans l'espace.

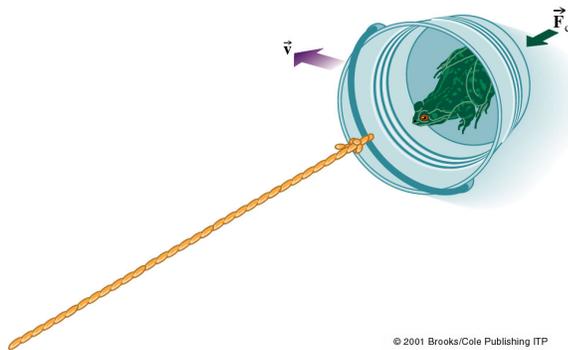


Figure 3.3: Une grenouille placée dans un seau en rotation sur un cercle, dans un plan horizontal. Le fond du seau exerce une force normale qui est la force centripète.

Il est intéressant de voir ce qui se passe si on fait tourner le seau dans un plan vertical. Dans ce cas, la gravité et la tension de la corde agissent toutes les deux, parfois l'une avec l'autre et parfois l'une contre l'autre, pour fournir la force centripète: $F_c = F_T - F_W \cos \theta$, où θ est l'angle de la corde avec laquelle on tient le seau par rapport à la verticale descendante. Comme $F_c = ma_c$, on prend:

$$a_c = \frac{F_T - mg \cos \theta}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Résolvant pour la tension:

$$F_T = m\left(\frac{v^2}{r} + g \cos \theta\right)$$

Au plus bas du cercle, où $\theta = 0$: $F_T = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right)$.

Au sommet du cercle, où $\theta = 180^\circ$: $F_T = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right)$.

Si vous faites cette expérience avec un seau plein d'eau, prenez vos précautions pour que $v > \sqrt{rg}$ au sommet ($\theta = 180^\circ$), sinon vous risquez de vous faire arroser.

3.2 Mouvement de rotation

Tout mouvement peut-être décomposé en deux contributions, un mouvement de translation et un mouvement de rotation. Dans le cas du mouvement de translation, deux points quelconques du corps se déplacent selon des trajectoires identiques. Ces trajectoires peuvent être soit une ligne droite (et dans ce cas nous parlons d'une translation rectiligne) soit une courbe (et dans ce cas nous parlons d'une translation curviligne). Dans le cas d'une rotation, deux points quelconques du corps ne suivent pas forcément des trajectoires identiques.

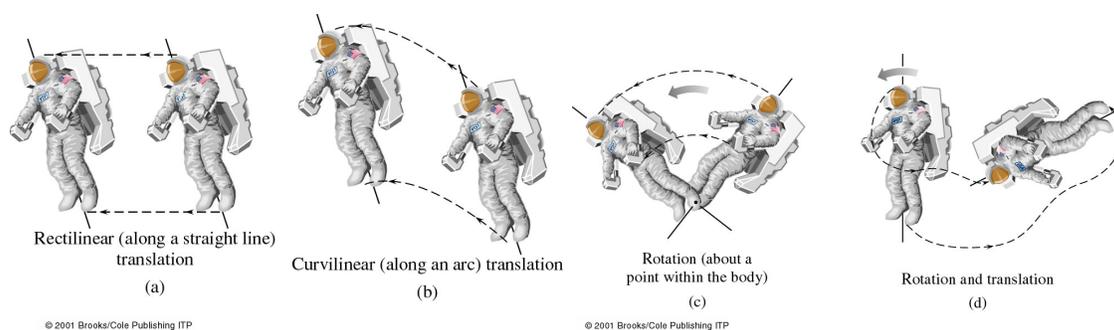


Figure 3.4: Le mouvement d'un corps rigide dans l'espace peut être décomposé en mouvements de rotation et de translation.

3.2.1 Cinématique de la rotation

Considérons un objet en rotation autour d'un point O , par exemple, une roue, une main, ou un collier de perles comme dans la figure 3.5. Chaque perle décrit un arc de cercle différent, ℓ , mais elles balaient toutes le même angle θ , le déplacement angulaire.

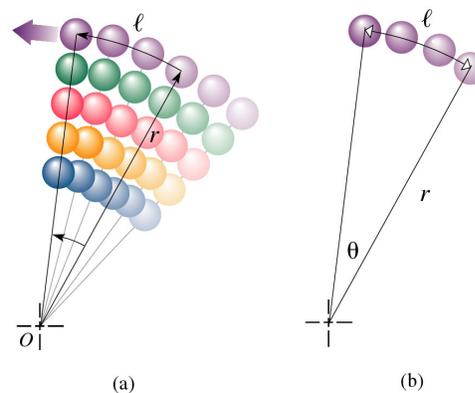


Figure 3.5: Le mouvement d'un corps rigide dans l'espace peut être décomposé en mouvements de rotation et de translation.

L'arc de cercle est proportionnel à l'angle θ et au rayon r sur lequel se trouve la perle. On peut mesurer les angles avec une unité qui permet d'écrire directement:

$$\theta = \frac{\ell}{r} ; \quad [\theta] = \text{rad} \quad (3.9)$$

Cette unité angulaire est le radian et il est défini comme le déplacement angulaire qui correspond à un arc de cercle égal au rayon. Puisque pour un angle de 360° la circonférence est $2\pi r$:

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57.3^\circ$$

Attention: rad est une “unité sans unité”, c’est-à-dire qu’elle “disparait” si on l’utilise dans une équation. Exemple: $[r\theta] = [r]$ =mètre.

Par convention, $\theta > 0$ dans le sens inverse des aiguilles d’une montre et $\theta < 0$ dans le sens des aiguilles d’une montre. Ainsi, un déplacement angulaire de quatre tours suivi de quatre tours dans le sens inverse donne $\theta = 0$. La longueur d’arc $\ell = \theta r$ peut prendre des valeurs positives ou négatives.

Un même déplacement angulaire peut correspondre à des longueurs d’arc très différentes en fonction de la distance au centre de référence. La diamètre de la Lune D_L est environ 3.4×10^6 m. La Lune est à une distance $r = 3.8 \times 10^8$ m de la surface de la Terre. Si nous assimilons son diamètre rectiligne à un arc, alors l’angle θ sous-tendu par la Lune vue de la Terre, appelé diamètre apparent, est:

$$\theta = \frac{\ell}{r} = \frac{D_L}{r} = \frac{3.4 \times 10^6 \text{ m}}{3.8 \times 10^8 \text{ m}} = 0.009 \text{ rad} \approx 0.5^\circ$$

Le diamètre du Soleil (1.4×10^9 m) est beaucoup plus grand, mais sa distance à la Terre (1.5×10^{11} m) l’est aussi. Par coïncidence le Soleil sous-tend le même angle de 0.009 rad. Ainsi, les deux corps célestes semblent être de même taille, et la Lune peut tout juste éclipser le Soleil.

La vitesse angulaire

Dans un mouvement circulaire, on mesure le déplacement angulaire θ et la longueur de l’arc ℓ , à partir d’une certaine droite de référence, ici l’axe x (figure 3.6). Selon la définition du déplacement angulaire, les intervalles finis sont liés par: $\Delta\ell = r\Delta\theta$. Si Δt est le temps mis pour parcourir l’arc $\Delta\ell$ correspondant à l’angle $\Delta\theta$, alors:

$$v_m = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega_m$$

Le terme de gauche est la vitesse moyenne, celui de droite est la vitesse angulaire moyenne. L’unité de la vitesse angulaire est [rad/s]. D’autres unités d’usage courant sont les degrés par seconde, les tours par seconde ou par minute (tours/s ou tours/min). Un tour correspond à $\theta = 2\pi$ rad, alors un tour par second équivaut 2π rad/s. Pour autant que la vitesse angulaire soit mesurée en rad/s, la vitesse moyenne et la vitesse angulaire moyenne sont simplement reliées par:

$$v_m = r \omega_m \tag{3.10}$$

Dans la limite d’un intervalle Δt infiniment petit, nous obtenons la vitesse angulaire instantanée ω :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt} \tag{3.11}$$

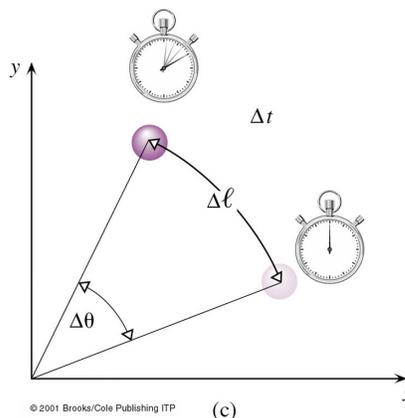


Figure 3.6: Lorsque la perle se déplace, l'angle change de $\Delta\theta$ et la longueur de l'arc, mesurée à partir de l'axe des x , varie de $\Delta\ell = r\Delta\theta$.

Donc ω mesure le taux de variation de θ dans le temps. Dans la même limite, avec r constant, on obtient la relation entre vitesse instantanée et vitesse angulaire instantanée (toujours pour $[\omega] = \text{rad}/[\text{s}]$):

$$v = r \omega \quad (3.12)$$

Cela signifie qu'une perle sur un grand rayon r_2 se déplace plus vite qu'une perle à $r_1 < r_2$, bien que ω ait la même valeur pour les deux (figure 3.7). La vitesse angulaire est la même pour tous les points d'un corps rigide qui tourne autour d'un axe; ω caractérise complètement le mouvement.

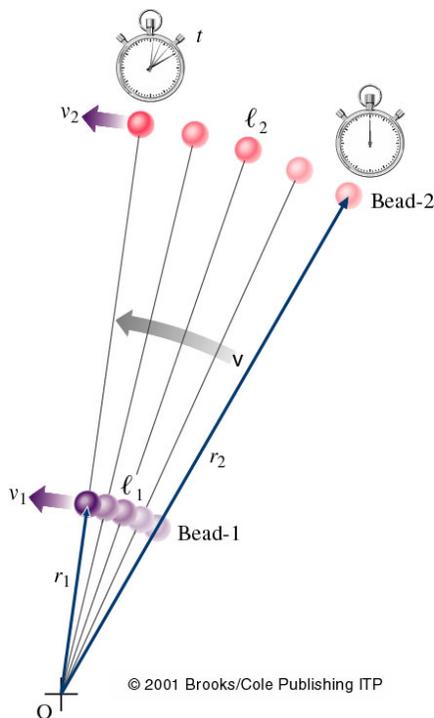


Figure 3.7: Les perles 1 et 2 sont représentées décrivant leurs cercles respectifs pendant des intervalles de temps égaux. La perle 2 a parcouru une plus grande distance; elle a bougé plus vite ($v_2 > v_1$), bien que les deux perles aient la même vitesse angulaire ω .

Exemple 3.2.1. Sur un CD, la musique est codée en une longue spirale de petites crêtes du centre vers l'extérieur qui peut atteindre 5.4 km de long. Un faisceau laser suit la

trace à une vitesse constante de 1.2 m/s, et l'information du CD est lue par la lumière fluctuante réfléchiée par les crêtes. Typiquement, le parcours commence à $r = 2.3$ cm du centre et finit à $r = 5.9$ cm. Pour obtenir une vitesse constante, la vitesse angulaire est variée constamment. Déterminer la vitesse angulaire au début et à la fin du parcours.

Solution. Notons r_i et ω_i le rayon et la vitesse angulaire du début, r_f et ω_f à la fin du parcours. La vitesse instantanée $v = 1.2$ m/s est constante, alors $v = r_i \omega_i = r_f \omega_f$. Les vitesses angulaires sont:

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{0.023 \text{ m}} = 52.2 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{0.059 \text{ m}} = 20.3 \text{ rad/s}$$

Un tour correspond à 2π rad de déplacement angulaire, alors ω en tours/s vaut:

$$\omega_i = 52.2 \text{ rad/s} = \frac{52.2}{2\pi} \text{ tours/s} = 8.3 \text{ tours/s} \quad ; \quad \omega_f = 20.3 \text{ rad/s} = 3.2 \text{ tours/s}$$

Exemple 3.2.2. Une corde est enroulée autour d'un cylindre horizontal de rayon de 50 cm. Un poids est suspendu à l'autre extrémité. Quelle est la vitesse angulaire du cylindre si le poids descend à la vitesse constante de 1 m/s?

Solution. Données: $R = 0.5$ m et $v = 1$ m/s. À trouver: ω .
Si le cylindre tourne d'un angle θ , une longueur $\ell = R\theta$ de la corde se dévide et le poids tombe de la même longueur. Nous en déduisons que, $v = R\omega$ et:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1 \text{ m/s}}{0.5 \text{ m}} = 2 \text{ rad/s}$$

Accélération angulaire

Les variations de vitesse angulaire ω avec le temps sont analogues aux changements de vitesse linéaire v . Si la vitesse angulaire varie de $\Delta\omega$ pendant un intervalle de temps Δt , le module de son accélération angulaire moyenne $a_{ang \ m}$ est:

$$a_{ang \ m} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} \quad (3.13)$$

L'unité de l'accélération angulaire est le rad/s^2 . Dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, la moyenne tend vers l'accélération angulaire instantanée a_{ang} :

$$a_{ang} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.14)$$

Pour l'instant, nous limitons notre étude aux cas où a est constante, et égale à $a_{ang} = a_{ang \ m}$.

De l'équation 3.12, nous déduisons que, si la distance r reste inchangée, une variation de la vitesse angulaire entraîne une variation de la vitesse linéaire, $\Delta v = r \Delta\omega$. Et l'équation 3.13 peut être écrite sous la forme:

$$a_{ang \ m} = \frac{\Delta v}{r \Delta t} = \frac{1}{r} a_m \quad (3.15)$$

En faisant tendre Δt vers zéro, avec r constant, nous obtenons la relation entre accélération angulaire et linéaire (tangentielle):

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

soit:

$$a_T = r a_{ang}$$

à condition que a_{ang} soit en rad/s^2 .

L'accélération a_T est l'**accélération tangentielle** (ou linéaire) due à la variation de la vitesse; a_T n'existe pas si v est constante. L'**accélération centripète** a_c , que vous avez déjà étudié, est due à la variation de la direction du mouvement, avec v constant ou non. Dès que la direction de \vec{v} change, il y a une accélération centripète. Pour un parcours circulaire, ceci est toujours le cas. **Si la direction et le module de \vec{v} varient tous les deux, les deux accélérations a_T et a_c sont non nulles et sont perpendiculaires.**

Exemple 3.2.3. Une voiture de Formule 1 prend un virage de 50 m de rayon avec une vitesse angulaire de 0.60 rad/s et une accélération angulaire de 0.20 rad/s^2 . Calculez sa vitesse linéaire au début du virage, son accélération centripète, ses accélérations tangentielle et totale.

Solution. Données: $r = 50$ m, $\omega = 0.60$ rad/s et $a_{ang} = 0.20$ rad/s^2 . À trouver: v , a_c , a_T et l'accélération totale a .

La vitesse angulaire et le rayon du virage permettent de calculer la vitesse linéaire et l'accélération centripète initiales:

$$v = r\omega = (50 \text{ m})(0.6 \text{ rad/s}) = 30 \text{ m/s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{50 \text{ m}} = 18 \text{ m/s}^2$$

L'accélération tangentielle est donnée par:

$$a_T = r a_{ang} = (50 \text{ m})(0.2 \text{ rad/s}^2) = 10 \text{ m/s}^2$$

L'accélération totale correspond au module de la somme vectorielle:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_T \quad ; \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r a_{ang})^2} = 21 \text{ m/s}^2$$

Cette accélération fait avec la tangente un angle:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a_c}{a_T} = 61^\circ$$

Mouvement curviligne uniformément accéléré

Nous pouvons appliquer tout-ce que nous savons sur le mouvement rectiligne uniformément accéléré (chapitre 2) au mouvement circulaire uniformément accéléré (avec $a \rightarrow a_T$).

$$v(t) = v_0 + a_T t \quad (3.16)$$

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (3.17)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_T t^2 \quad (3.18)$$

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a_T [x(t) - x_0] \quad (3.19)$$

Ces équations du mouvement curviligne peuvent être transformées aisément en un ensemble d'équations à accélération a_{ang} constante, en utilisant les relations que nous avons apprises dans ce chapitre:

$$\ell = r \theta$$

$$v = r \omega$$

$$a_T = r a_{ang}$$

Il suffit alors de faire des substitutions pour aboutir aux équations:

$$\omega(t) = \omega_0 + a_{ang} t \quad (3.20)$$

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega) \quad (3.21)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}a_{ang} t^2 \quad (3.22)$$

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2a_{ang} [\theta(t) - \theta_0] \quad (3.23)$$

Exemple 3.2.4. Un volant d'inertie est un disque massif utilisé dans certaines machines pour emmagasiner de l'énergie rotationnelle. Supposons qu'un autobus est muni d'un volant d'inertie de diamètre 2.0 m. Il est accéléré, à partir de l'arrêt, à un taux constant de 2.0 t/m par seconde^a. Quelle sera la vitesse angulaire d'un point de la périphérie de ce volant au bout de 5.0 s? De quel angle ce point aura-t-il tourné?

^aTours par minute par seconde, ou autrement dit, revolutions par minute par second, rpm/s

Solution. Données: $r = 1.0$ m, $a_{ang} = 2$ rpm/s et $\omega_0 = 0$. À trouver: ω et θ à $t = 5.0$ s. Déterminons d'abord a_{ang} en rad/s^2 :

$$a_{ang} = \frac{(2.0 \text{ t/m/s})(2\pi \text{ rad/t})}{(60 \text{ s/min})} = 0.209 \text{ rad/s}^2$$

Pour trouver la vitesse angulaire finale, on peut utiliser l'équation:

$$\omega = \omega_0 + a_{ang}t = (0 + 0.209 \text{ rad/s}^2)(5.0 \text{ s})$$

soit, $\omega = 1.045$ rad/s. On prend pour θ :

$$\theta = \frac{1}{2}a_{ang}t^2 = 2.6 \text{ rad}$$

3.2.2 Roulement sans glissement

Le cas du roulement libre mérite une étude spécifique. Le terme roulement libre ou roulement sans glissement signifie qu'il n'y a aucun glissement du point de contact avec le sol, c'est-à-dire ni dérapage ni mouvement de toupie. I.e. le point de contact a une vitesse de translation par rapport au sol qui est égale à zéro. Ceci réclame un frottement suffisant pour tenir momentanément le point B au repos.

La roue de la figure 3.8 roule vers la droite et le point O, sur l'axe, se déplace jusqu'à O' pendant que A se déplace jusqu'à A' et B jusqu'à B'. La longueur de l'arc BA est ℓ et il en est de même pour l'arc B'A' et les distances OO' et BA'. Ainsi, la distance rectiligne parcourue par le point central est $\ell = R\theta$, alors $v = R\omega$ et $a = R a_{ang}$. Le point central a donc la même vitesse et la même accélération qu'un point quelconque de la jante. Notons que lorsque le point B est en contact avec le sol, sa vitesse mesurée par rapport à O, notamment v_{BO} , est dirigée vers la gauche. La vitesse de O relativement au sol, V_{OS} , est dirigée vers la droite. En plus, $v_{BO} = v_{OS} = R\omega$; nous en déduisons que:

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BO} + \vec{v}_{OS} = 0$$

La vitesse du point B par rapport au sol, au moment où il touche le sol, est donc nulle; c'est cela, l'absence de glissement.

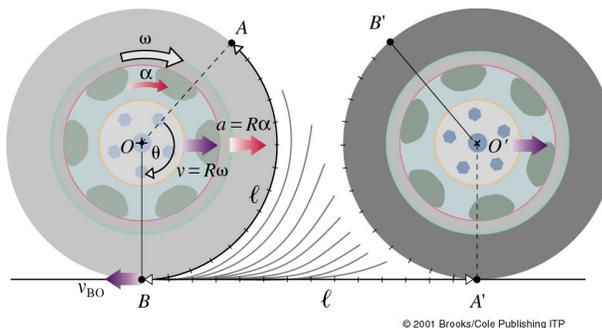


Figure 3.8: Pendant qu'un corps roule en tournant autour de son centre avec une vitesse angulaire ω et une accélération angulaire a_{ang} , le point O se déplace avec une vitesse $v = R\omega$ et une accélération $a = R a_{ang}$ à tout instant.

Chapitre 4

Équilibre et dynamique des corps en rotation

Contenu

4.1	Équilibre des corps en rotation	61
4.1.1	Moment de forces	62
4.1.2	Deuxième condition d'équilibre	64
4.2	Équilibre des solides	65
4.2.1	Centre de gravité	65
4.2.2	Stabilité et équilibre	67
4.3	La dynamique de la rotation	68
4.3.1	Inertie de rotation	69
4.4	Roulement sur un plan incliné	71
4.4.1	Moment cinétique	72
4.4.2	Conservation du moment cinétique	73

4.1 Équilibre des corps en rotation

La balance à bras égaux a été largement utilisée depuis plus de 4000 ans. Si des forces descendantes et égales sont appliquées aux deux extrémités d'une tige, qui peut pivoter autour de son centre, elle reste en équilibre horizontal. Si la tige ne pivote pas (ou, plus généralement, si elle ne subit aucun changement dans son état de mouvement rotationnel) nous disons qu'elle est en équilibre rotationnel. Le mot équilibre vient des mots latins "aequus", qui veut dire "égal" et "libra" qui veut dire "balance".

La *loi du levier*, qui est assez rudimentaire, affirme que des forces inégales agissant perpendiculairement aux extrémités d'une tige qui peut pivoter, s'équilibrent si $F_{W1}L_1 = F_{W2}L_2$, où L_1 et L_2 sont les distances de l'axe de pivotement aux points d'application des forces (par exemple, comme sur les figures 4.1 et 4.2). Nous devons donc considérer à la fois les forces et leurs distances à l'axe de pivotement.

Figure 4.1: Balance à bras inégaux ou bascule. Le contrepois peut être déplacé le long du bras jusqu'à atteindre l'équilibre avec l'objet pesé. La bascule équilibrée est un système des forces dont les lignes d'action sont parallèles et donc non concourantes.

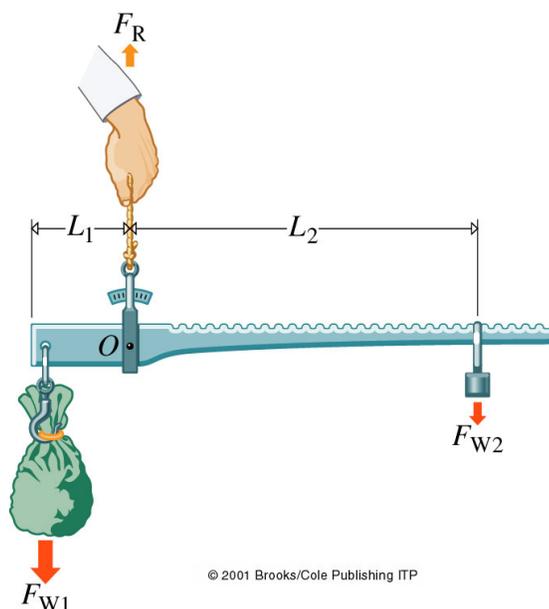
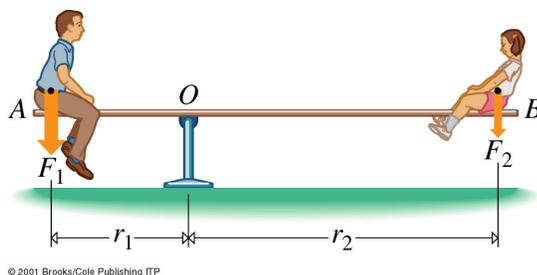


Figure 4.2: Forces inégales et parallèles à des distances inégales au point de pivotement. Ce système est en équilibre rotationnel.



Exemple 4.1.1. Un enfant de masse 30 kg voudrait jouer à la bascule avec son chien de masse 10 kg. La bascule, formée par une planche de 6.5 m, pivote autour de son milieu. À quelle distance l'enfant doit-il s'asseoir pour équilibrer le chien qui est à 3.0 m du pivot?

Solution. Données: $m_E = 30$ kg, $m_c = 10$ kg, $r_c = 3.0$ m et longueur de la planche 6.5 m. À déterminer: r_E . Les forces qui agissent sur les extrémités sont les poids $F_{WE} = m_E g$ et $F_{WC} = m_c g$. La loi du levier donne alors:

$$m_E g r_E = m_c g r_c$$

d'où $r_E = 1.0$ m. L'enfant doit donc se mettre à 1.0 m du pivot. ▶

4.1.1 Moment de forces

La clé à fourche ci-dessous peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à la feuille passant par O . La clé est mise en rotation par l'application d'une force \vec{F} à la position \vec{r} mesurée à partir de l'axe de rotation. Pour que la clé tourne, il faut que le point d'application de la force ne passe pas par l'axe de rotation. L'efficacité maximale est obtenue quand $\vec{F} \perp \vec{r}$ et quand le point d'application est le plus loin possible de l'axe de rotation ($|\vec{r}|$ grand).

On appelle le **bras de levier** de la force \vec{F} la distance de \vec{F} à l'axe de rotation; c'est-à-dire, la distance perpendiculaire (r_{\perp}) du point O à la ligne d'action de la force. Le moment de la force par rapport à O est défini comme le produit de F par son bras de levier. Nous symbolisons le moment de la force par la lettre grecque tau (τ). Pour préciser qu'il est le moment par rapport au point O , nous écrivons τ_O , ainsi:

$$\tau_O = r_{\perp} F$$

Le moment de la force mesure la capacité à produire un mouvement de rotation. Dans la figure 4.3, la ligne d'action du vecteur force \vec{F} fait un angle θ avec le vecteur position \vec{r} . Dans ce cas, $r_{\perp} = r \sin \theta$, donc:

$$\tau_O = F r \sin \theta$$

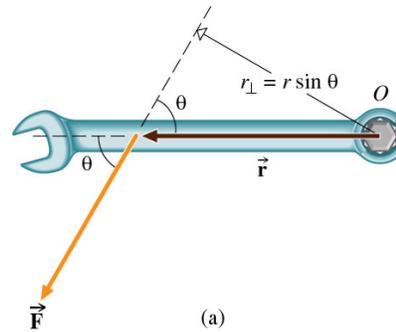
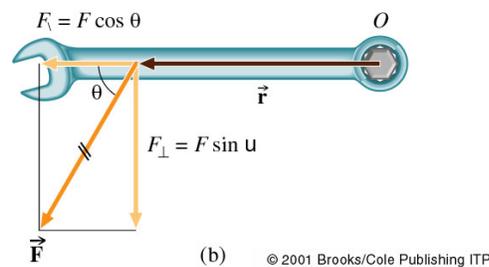


Figure 4.3: La torsion qu'on peut effectuer avec une clé dépend du module de la force, de la direction de sa ligne d'action et du point où elle est appliquée; c'est le moment de la force. Le moment d'une force est donné par la formule $F r_{\text{perp}} = F_{\perp} r = F r \sin \theta$.



Le résultat précédent suggère que le moment de force est une grandeur vectorielle correspondant au produit vectoriel de la force par la position de son point d'application:

$$\tau_O = r \sin \theta F \quad ; \quad \vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.1)$$

Le vecteur $\vec{\tau}_O$ suit le sens de l'axe passant par O et pointe dans la direction donnée par la règle de la main droite. Si tous les moments passent par le même pivot, leur moment total correspond à la somme vectorielle des moments individuels. S'ils sont de plus tous parallèles, il suffit de considérer les modules τ_O des moments, en tenant compte du signe donné par le sens de la rotation.

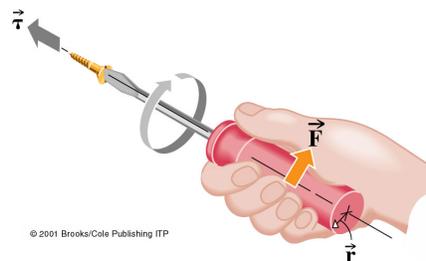
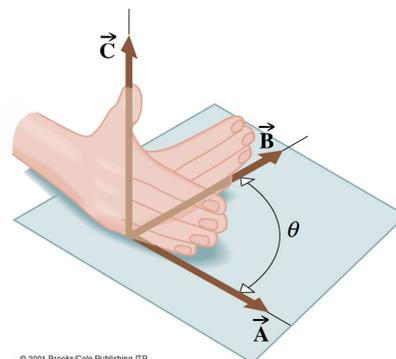


Figure 4.4: La règle de la main droite et du tournevis. Une vis ordinaire avance lorsqu'elle est tournée dans le sens des doigts de la main droite.

Figure 4.5: Pour trouver la direction du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$, on place les doigts de la main droite dans la direction de \vec{A} et on les fait tourner de l'angle θ pour coïncider avec la direction de \vec{B} ; alors le pouce est dans la direction du produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.



Exemple 4.1.2. Le mouvement illustré dans la figure 4.6 consiste à soulever plusieurs fois la jambe, alourdie de la masse m , jusqu'à la position horizontale puis l'abaisser. Exprimez le moment des forces par rapport au genou O en fonction de θ , m , et la distance r du genou au talon dans l'exercice de musculation ci-contre. Négligez la masse de la jambe.

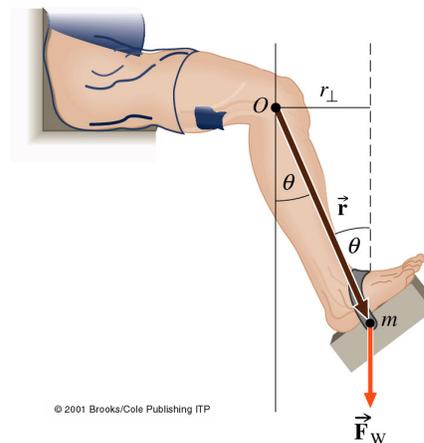


Figure 4.6: Le poids de la masse m exerce un moment de force par rapport à O qui est contrebalancé par un moment opposé produit par les muscles.

Solution. La seule force qui agit est la gravitation. Elle est toujours verticale et dirigée vers le bas:

$$\tau_O = r_{\perp} F_W = r_{\perp} mg = (r \sin \theta) mg$$

Donc τ_O a un minimum $\tau_O = 0$ pour $\theta = 0$ et un maximum $\tau_O = mgr$ pour $\theta = 90^\circ$.

4.1.2 Deuxième condition d'équilibre

Les corps réels se déforment jusqu'à un certain point sous l'influence des forces appliquées; mais beaucoup de corps changent si peu que nous pouvons les considérer comme pratiquement rigides. La condition d'équilibre d'un corps rigide est que le moment résultant de toutes les forces extérieures, qui agissent sur le corps est nul. Il est clair que ce n'est pas un nouveau principe, mais une simple conséquence des trois lois de Newton.

La première condition d'équilibre, que nous avons déjà vu, correspond à un équilibre de translation (voir chapitre 2):

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{0}$$

La deuxième condition assure l'équilibre rotationnel pour un corps rigide:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{\omega} = \vec{0} \quad (4.2)$$

Si les forces qui agissent sur le corps sont **concourantes**, la première condition suffit, parce que la deuxième est automatiquement satisfaite (puisque $\tau_O = 0$).

La balance romaine La balance romaine (figure 4.1) est utilisée depuis 2000 ans pour peser des objets lourds à partir d'un petit poids de masse standard. La balance romaine compare le produit du bras de levier L_i par la force gravitationnelle F_{W_i} de chaque côté du levier. Le poids de chaque côté est

$$F_{W_i} = m_i g$$

Donc $\sum \vec{\tau}_O = 0 \Rightarrow m_1 g L_1 = m_2 g L_2$. Ce type de balance compare vraiment les deux masses suspendues. Par rapport à une balance à bras égaux, la balance romaine utilise intelligemment l'effet du **bras de levier**.

Forces non concourantes Un couple est un ensemble de deux forces de même module, anti-parallèles et non colinéaires. Si un couple agit sur un corps (figure 4.7), celui-ci n'est pas en équilibre, bien que $\sum \vec{F} = 0$. Si un moment de force non nul agit sur un corps qui subit une accélération rotationnelle. Le corps reste en place, mais il se met en rotation parce que $\sum \vec{\tau} \neq 0$. La bascule, la balançoire, le levier, les ciseaux et le pied humain exploitent tous le modèle du levier, un dispositif très simple dont le point d'appui est situé entre les deux forces qui s'exercent sur lui.

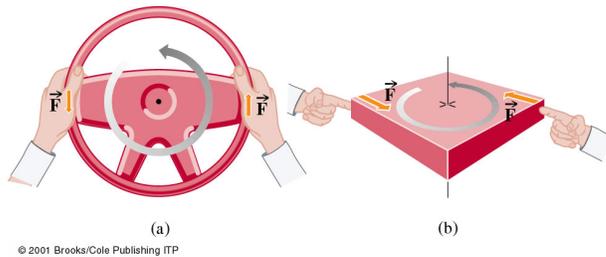


Figure 4.7: (a) Deux forces antiparallèles et de même module agissant en deux points différents d'un corps, ne produisent pas un équilibre bien que $\sum \vec{F} = 0$. En effet, il y a un moment de force et le système ne peut pas être en équilibre rotationnel. (b) Le bloc tourne sans subir un mouvement de translation.

4.2 Équilibre des solides

Sur Terre tous les objets, qui nous entourent, sont des corps de dimension finie, parfois en équilibre. Comment traiter la gravité agissant sur ces corps?

4.2.1 Centre de gravité

Tout objet fini peut être considéré comme un ensemble d'un très grand nombre de masses ponctuelles. Chaque atome subit une force gravitationnelle. Toutes ces forces sont parallèles et se combinent pour former une seule force résultante, qui est le poids du corps, F_W . La deuxième condition d'équilibre suggère que nous devons aussi connaître le point d'application de cette force. Le centre de gravité (c.g.) d'un objet est défini comme le point d'application de la force de pesanteur. Autrement dit, la seule force F_W agissant au

centre de gravité produit le même effet mécanique que toutes les forces gravitationnelles agissant sur les constituants. Ceci implique que le moment résultant de toutes les forces de gravité par rapport à un point quelconque est exactement égale au moment du poids total agissant au centre de gravité.

N.B. Le centre de gravité d'un corps de forme régulière et de composition uniforme est confondu avec son centre géométrique. Le centre de masse coïncide avec le centre de gravité dans un champ gravitationnel uniforme. On suppose ça dans la discussion de ce chapitre.

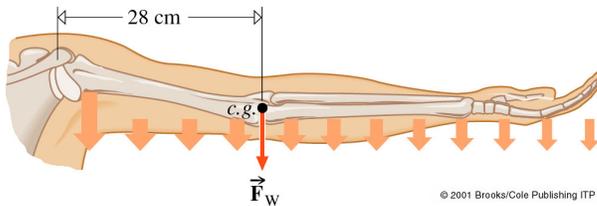


Figure 4.8: Le poids du bras est réparti sur toute sa longueur. Néanmoins, il peut être représenté par une seule force F_W appliquée en un seul point, le centre de gravité (*c.g.*).

Comme la ligne d'action du poids passe par le *c.g.*, la force de gravité ne génère aucun moment par rapport au centre de gravité. Un corps suspendu en son *c.g.* est en équilibre quelle que soit son orientation et il restera comme il est lorsqu'il est lâché. Donc, un corps suspendu par son *c.g.* est en équilibre.

Pour calculer le centre de masse d'un corps, considérons un corps plat constitué par un nombre n de petites masses, $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, comme montré à la figure 4.9. Chaque particule subit un moment de force par rapport à un point O arbitraire choisi comme origine. La distance x_i de la masse m_i est alors le bras de levier et le moment du poids $m_i g$ est $m_i g x_i = F_{W_i} x_i$.

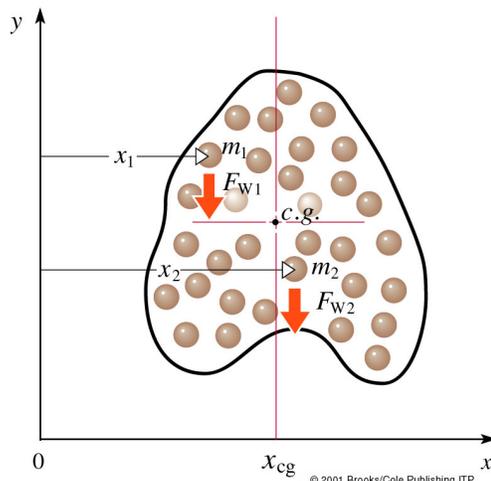


Figure 4.9: La somme des moments, autour d'un point O arbitraire, des poids de toutes les masses ponctuelles constituant un corps est égale au moment de force du poids total du corps agissant au *c.g.* Mesurée dans la direction de l'axe des x , la position du *c.g.* est à $x_{c.g.}$. Mesurée dans la direction de l'axe des y , la position du *c.g.* est à $y_{c.g.}$.

Le moment total des forces par rapport à O est:

$$F_{W1} x_1 + F_{W2} x_2 + \dots = \sum_{j=1}^n F_{Wj} x_j$$

Le poids total est:

$$F_{W1} + F_{W2} + \dots = \sum_{j=1}^n F_{Wj}$$

et ce poids appliqué au centre de gravité $x_{c.g.}$ doit produire le même effet que les poids élémentaires par rapport à O :

$$\left(\sum_{j=1}^n F_{W_j}\right) x_{c.g.} = \sum_{j=1}^n F_{W_j} x_j \Rightarrow$$

$$x_{c.g.} = \frac{\sum_{j=1}^n F_{W_j} x_j}{\sum_{j=1}^n F_{W_j}} \quad (4.3)$$

La coordonnée y est obtenue d'une façon analogue, en tournant le tout par 90° .

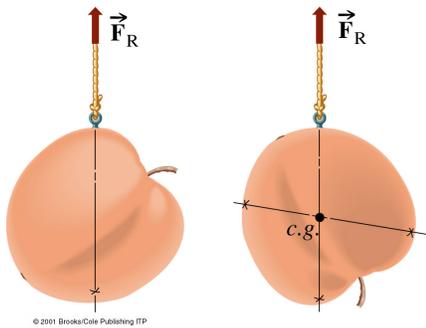


Figure 4.10: La position du c.g. d'un objet peut être déterminée en le suspendant en des points différents. Le c.g. est toujours sur la ligne d'action de la force soutenant l'objet en équilibre.

Exemple 4.2.1. Pour un homme de masse m et de hauteur h , le c.g. du pied lié à la jambe et celui de la cuisse sont illustrés dans la figure 4.11 avec les poids correspondants. Trouvez la position du c.g. de la jambe entière allongée, mesuré à partir de la plante du pied. Ce genre d'information est importante en thérapie physique.

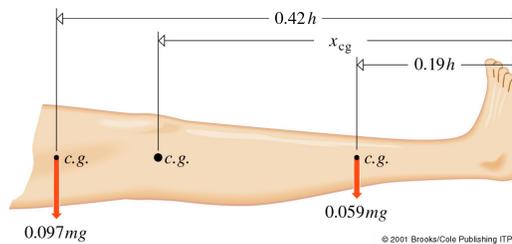


Figure 4.11: Position des c.g. des diverses parties de la jambe de l'homme.

Solution. Données: $F_{W_1} = 0.059 mg$, $x_1 = 0.19 h$, $F_{W_2} = 0.097 mg$, $x_2 = 0.42 h$. À déterminer: $x_{c.g.}$. Traitant les deux parties de la jambe comme des masses ponctuelles localisées à leurs c.g. respectifs, nous trouvons que:

$$x_{c.g.} = \frac{F_{W_1} x_1 + F_{W_2} x_2}{F_{W_1} + F_{W_2}} = \dots = 0.33 h$$

4.2.2 Stabilité et équilibre

Un corps est dit en équilibre stable s'il revient à une position d'équilibre dont il est légèrement écarté. Dans les exemples de la figure 4.12, le déplacement soulève le centre de masse qui tend à retomber à sa position la plus basse. Le moment du poids agit sur

le centre de masse et tend à faire pivoter le corps. Si, par exemple, le cône était posé sur sa pointe, il serait en équilibre instable: un petit déplacement le ferait s'écartier de plus en plus de cette position.

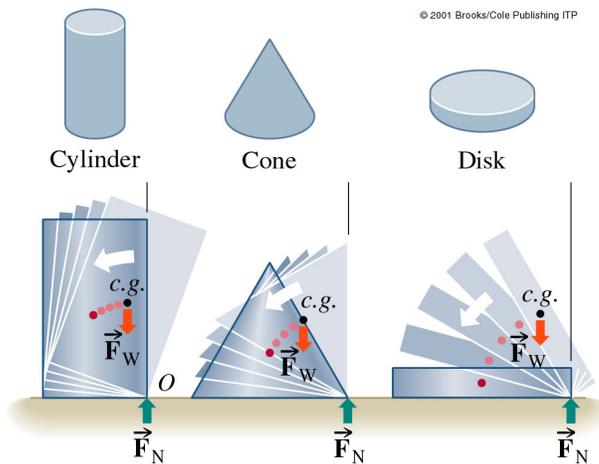


Figure 4.12: Les corps tels que ceux-ci sont en position d'équilibre stable parce qu'ils reviennent à cette position, s'ils en sont légèrement écartés. À l'équilibre, le c.g. est à un niveau plus bas que dans les positions hors de l'équilibre.

Un objet est **en équilibre stable** si, après avoir été légèrement déplacé à partir de la position d'équilibre, il y revient; dans ce cas, son centre de masse est le plus bas possible. Un objet est **en équilibre instable** si, après avoir reçu un petit déplacement momentané de la position d'équilibre, il s'éloigne de cette position et n'y retourne plus; cet équilibre arrive si l'objet est suspendu par un point plus bas que son centre de masse. Un objet est dit en **équilibre indifférent** si, après avoir reçu un petit déplacement momentané, il reste en équilibre dans cette nouvelle position, ne tendant ni à s'éloigner de sa position initiale ni à y revenir; dans ce cas, le c.g. reste à la même hauteur lorsque le corps se déplace au voisinage de cette position.

Question pour réfléchir.

Il y a une centaine d'années, le jouet représenté dans la figure à côté était très répandu. Si on l'incline, il se redresse aussitôt, de lui-même. Son équivalent moderne est un grand objet gonflable en plastique, auquel les enfants donnent des coups de poing. Comment de tels jouets fonctionnent-ils?



4.3 La dynamique de la rotation

Les trois lois de Newton constituent la base de notre compréhension de la dynamique, à la fois des mouvements linéaires et des mouvements rotationnels. Un corps tourne d'une seule pièce si ses diverses parties sont soudées par des forces internes. Alors nous pouvons décrire sa rotation en fonction des nouvelles variables cinématiques θ , ω et a_{ang} et introduire aussi des nouvelles quantités dynamiques.

Les deux conditions pour qu'un système ne subisse aucune accélération sont $\sum \vec{F} = 0$ et $\sum \vec{\tau} = 0$. La force est la cause de tout mouvement et le moment de la force est la cause du mouvement de rotation.

L'**inertie** d'un corps est la "résistance" qu'il oppose au changement de son état de mouvement. Cette résistance est physiquement représentée par la masse de l'objet. La même propriété est à l'origine de l'inertie de rotation, mais son action dépend à la fois de la quantité de masse et de sa répartition autour de l'axe de rotation. Par analogie avec le moment de force, on appelle cette grandeur **moment d'inertie**.

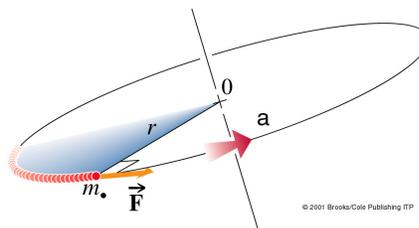
4.3.1 Inertie de rotation

Pour faire tourner une roue massive il faut lui communiquer une accélération angulaire. Il faut appliquer une force avec un certain bras de levier, c'est-à-dire un moment de force. Considérons une masse ponctuelle m_{\bullet} (figure 4.13) qu'une force tangentielle \vec{F} contraint à se déplacer sur un cercle de rayon r dont l'axe passe par O . Elle subit une accélération tangentielle qui correspond à une force $F = m_{\bullet} a_T$ qu'on peut exprimer en terme de son accélération angulaire qui correspond à une force $F = m_{\bullet} r a_{ang}$. Le moment de force de F par rapport à O est:

$$\tau_O = rF = r m_{\bullet} a_T = r m_{\bullet} r a_{ang} = m_{\bullet} r^2 a_{ang}$$

Cette équation suggère que $m_{\bullet} r^2$ est l'équivalent rotationnel de la masse. $I_{\bullet} = m_{\bullet} r^2$ est appelée **moment d'inertie** d'une masse ponctuelle par rapport à un axe donné. Donc $\tau_O = I_{\bullet} a_{ang}$ est équivalent à $F = m a$.

Figure 4.13: Description graphique de mouvement d'une masse ponctuelle m_{\bullet} .



Un corps rigide est constitué d'un grand nombre d'atomes en interaction. Lorsqu'il est en rotation, l'équation ci-dessus est valable pour chacune des particules. La somme de tous les moments de forces agissant sur tous ses constituants communique une accélération angulaire globale au corps, telle que:

$$\sum \tau_O = \left(\sum_j m_j r_j^2 \right) a_{ang}$$

La quantité entre parenthèses est le moment d'inertie du corps autour de l'axe de rotation passant par O :

$$I_O = \sum_j m_j r_j^2 \Rightarrow \sum \tau_O = I_O a_{ang} \quad (4.4)$$

Chaque particule avec sa masse propre et sa distance à l'axe possède son propre moment d'inertie. Tous ces moments doivent être ajoutés pour avoir le moment d'inertie global du corps. Dans la pratique il est impossible d'effectuer ce calcul pour un objet réel. Au lieu de cela, nous supposons que l'objet est continu et nous le partageons en petits éléments

de masse dm suffisamment petit pour que ses atomes soient à la même distance r de l'axe. La sommation peut alors être remplacée par une intégrale:

$$I = \int r^2 dm$$

La figure 4.14 donne les expressions de I pour certains corps symétriques et homogènes par rapport à certains axes. Plus la masse est grande et concentrée loin de l'axe, plus I est grand et plus la résistance du corps contre l'accélération angulaire est grande. Par exemple, à masse égale, le moment d'inertie de l'anneau est deux fois plus grand que celui du disque plein et celui de la sphère creuse est 5/3 fois plus grand que celui de la sphère pleine.

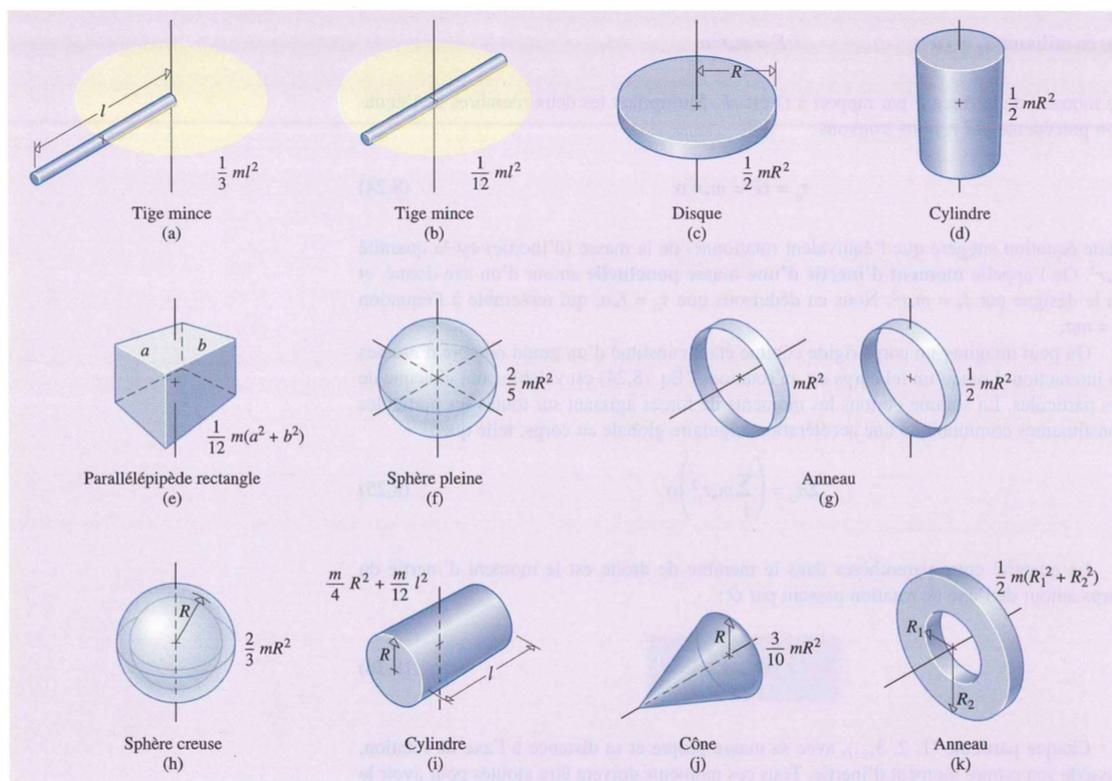


Figure 4.14: Moments d'inertie.

Exemple 4.3.1. Une masse $m = 10.0$ kg est suspendue à une corde enroulée autour d'un cylindre de rayon $R = 10.0$ cm et de masse $M_c = 2.00$ kg (figure 4.15). Une fois lâché, le cylindre est libre de tourner autour de son axe. Déterminez la tension de la corde, et les accélérations du cylindre et de la masse.

Solution. La tension dans la corde produit un moment de force tel que:

$$\sum \tau_O = F_T R = I a_{ang} \Rightarrow F_T = \frac{I a_{ang}}{R}$$

La masse m qui tombe obéit à la loi de Newton:

$$\sum F_{vert} = ma = mg - F_T$$

L'accélération de la corde est la même que celle d'un point sur la périphérie du cylindre, $a = Ra_{ang}$:

$$mg - F_T = ma = mRa_{ang} \Rightarrow mg - \frac{Ia_{ang}}{R} = mRa_{ang} \Rightarrow a_{ang} = \frac{mg}{mR + I/R}$$

Le moment d'inertie d'un disque est $I = \frac{1}{2}M_C R^2$. Alors:

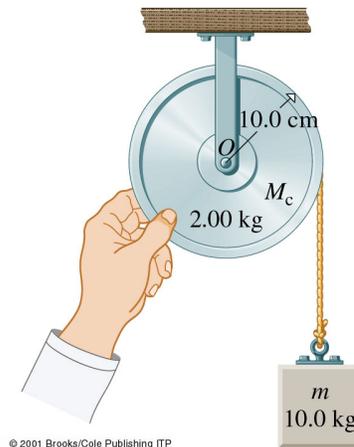
$$a_{ang} = \frac{mg}{mR + \frac{1}{2}M_C R} = \frac{2g/R}{2 + M_C/m} = \dots = 89.2 \text{ rad/s}^2$$

L'accélération tangentielle est: $a = Ra_{ang} = 8.92 \text{ m/s}^2 (< g)$.

La tension de la corde est: $F_T = mg - ma = m(g - a) = 8.9 \text{ N}$.

Vérification rapide: Examinons les valeurs extrêmes de a_{ang} , notamment, quand $m \gg M_C$ et $m \ll M_C$. Dans le premier cas ($m \gg M_C$), I/R est négligeable par rapport à mR . Alors $a \approx g$, $F_T = 0$ et nous avons une chute libre. Si $m \ll M_C$, $a_{ang} \approx mgR/I$, qui est très faible; le mouvement est alors quasi nul. Ces deux configurations sont vraisemblables.

Figure 4.15: Jusqu'alors, nous avons négligé la masse de la poulie dans ce genre de problèmes. Maintenant nous pouvons en tenir compte. La poulie a un moment d'inertie qui réduit l'accélération de m .



4.4 Roulement sur un plan incliné

La sphère pleine de rayon R de la figure 4.16 roule sans glissement vers le bas sur un plan incliné. La force de frottement F_f est la cause de la rotation de la sphère. Sans frottement, la sphère glisserait vers le bas gardant toujours le même point A en contact avec le plan.

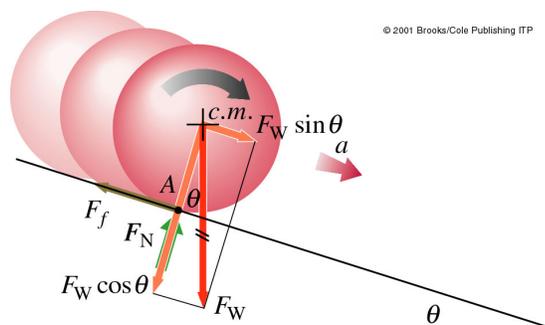


Figure 4.16: Une sphère pleine roulant vers le bas sur un plan incliné. La sphère a une accélération $a = (5/7)g \sin \theta$, à comparer avec son accélération de glissement $a = g \sin \theta$.

Le mouvement peut être analysé comme une translation du c.m. couplé à une rotation autour du c.m. Pour le mouvement de translation on aura: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, où m est la masse totale de la sphère et \vec{a} est l'accélération linéaire de son centre de masse. Par conséquent, en projetant sur le plan incliné:

$$\sum F_{\parallel} = F_W \sin \theta - F_f = ma$$

Comme la sphère tourne, nous avons aussi $\sum \tau = I a_{ang}$. Le moment de force par rapport au c.m. s'écrit: $\sum \tau_{c.m.} = F_f R = I_{c.m.} a_{ang}$. Le moment d'inertie de la sphère, est $I_{c.m.} = (2/5)mR^2$. En plus, nous avons vu que $a = R a_{ang}$. Donc:

$$F_f R = (2/5) m R^2 (a/R)$$

Utilisant le fait que $F_W = mg$:

$$a = (5/7)g \sin \theta \quad \text{et} \quad F_f = (2/7)mg \sin \theta$$

L'accélération ne dépend ni de m ni de R . Elle n'est pas égale à $g \sin \theta$, comme si la sphère glissait sur le plan incliné; elle est sensiblement plus petite, à cause de l'inertie de rotation.

Question pour réfléchir. Qu'est-ce qui changerait si la sphère était creuse au lieu d'être pleine?

4.4.1 Moment cinétique

L'équivalent rotationnel de la force est le moment de la force τ , et celui de la masse est le moment d'inertie I . De la même manière, la quantité de mouvement (linéaire) a son équivalent rotationnel, le moment cinétique \vec{L} (aussi parfois appelé moment angulaire).

Soit une particule de masse m_{bullet} qui se déplace à la vitesse v à une distance r_{\perp} d'un axe passant par O . Le module de son moment cinétique est défini comme:

$$L_O = r_{\perp} p = r \sin \theta p$$

où p est sa quantité de mouvement. En définissant le vecteur moment cinétique comme:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{\perp} \times \vec{p} \tag{4.5}$$

nous précisons à la fois le module et la direction de cette grandeur. La direction peut être déterminée en appliquant la règle de la main droite qu'on a déjà vu appliquée au moment d'une force.

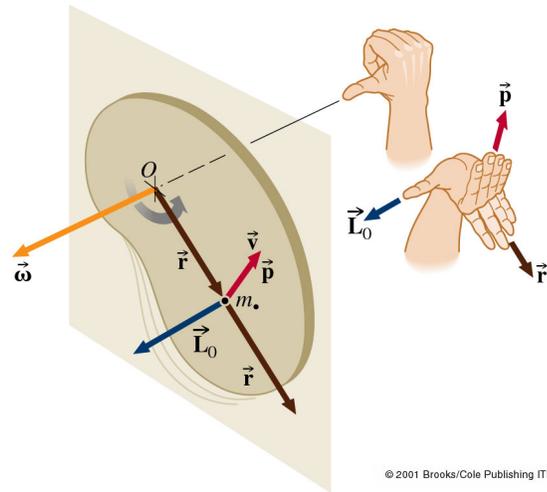
Considérons maintenant un objet plat constitué de particules ponctuelles libre de tourner autour d'un axe perpendiculaire au point O . Chaque particule a un moment cinétique caractéristique bien que toutes les particules tournent à la même vitesse angulaire ω .

Pour un objet en deux dimensions, le rayon vecteur \vec{r} est automatiquement perpendiculaire à \vec{v} , par conséquent $r = r_{\perp}$ et le module du moment cinétique total est:

$$L_O = \sum r m_g v = \sum (r m_g) r \omega = \sum (m_g r^2) \omega \Rightarrow$$

$$L_O = I_O \omega \tag{4.6}$$

Figure 4.17: Pour cet objet plat, L_O est dans la même direction que ω pour toutes les particules qui constituent le corps.



Le moment cinétique est un vecteur parallèle à l'axe de rotation, et qui pointe dans la direction indiquée par la règle de la main droite, $\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$, où nous avons écrit $\vec{\omega}$ comme un vecteur, également attaché à l'axe de rotation. Cette équation est complètement analogue à la quantité de mouvement, $\vec{p} = m\vec{v}$.

4.4.2 Conservation du moment cinétique

Supposons qu'un corps soit soumis à un moment de force τ pendant un intervalle de temps Δt . Il subit une accélération angulaire constante telle que:

$$\tau = I a_{ang} = I \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Tant que I est constant, tout changement du moment cinétique résulte en un changement de ω , $\Delta L = I \Delta \omega$:

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \text{et pour } \Delta t \rightarrow 0 : \tau = \frac{dL}{dt}$$

Le moment de force est égal au taux de variation du moment cinétique. Cette équation est l'équivalent de la deuxième loi de Newton, $F = dp/dt$, et signifie que: **en l'absence de moments de forces, le moment cinétique est conservé.** Mentionnons encore une fois que l'équation du moment cinétique est réellement une relation entre vecteurs, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

La tendance de la matière à garder son mouvement rotationnel constant est utilisé dans un grand nombre d'applications pratiques. Par exemple, un volant d'inertie dans un moteur permet de lisser le mouvement rotationnel entre deux coups d'accélération.

Exemple 4.4.1. Une patineuse avec les bras tendus peut atteindre une vitesse angulaire de 1.0 tours/s. Dans cette configuration, son moment d'inertie autour de l'axe vertical est $3.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Les masses constituant ses bras et sa jambe sont en bonne partie éloignées de l'axe; le moment d'inertie est donc relativement grand. Que devient sa vitesse de rotation si elle rapproche ses bras et se met dans une position de pirouette, qui correspond à un moment d'inertie de $1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$? On néglige les forces de frottement.

Solution. Données: $\omega_i = 1$ tours/s, $I_i = 3.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ et $I_f = 1.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. À trouver: ω_f . Comme $\vec{\tau}$, $\vec{L}=\text{constante}$. Donc:

$$L_i = L_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i \Rightarrow \omega_f = 3.5 \text{ tours/s}$$

La patineuse tourne 3.5 fois plus vite sur elle-même. Effectivement, comme elle conserve son moment cinétique, la patineuse augmente sa vitesse de rotation lorsque son moment d'inertie diminue.

Exemple 4.4.2. On fait tourner une très petite sphère de masse 0.20 kg au bout d'un fil de longueur 2.0 m sur un cercle horizontal à une vitesse constante de 1.0 m/s.

- Déterminez son moment cinétique autour de l'axe de rotation.
- Supposons qu'on réduise brusquement le rayon à 1.0 m. Que devient la vitesse de la sphère ?
- Que peut-on dire de la tension de la corde ?

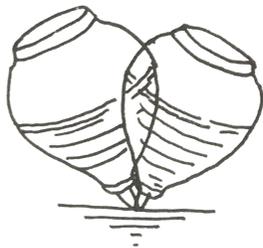
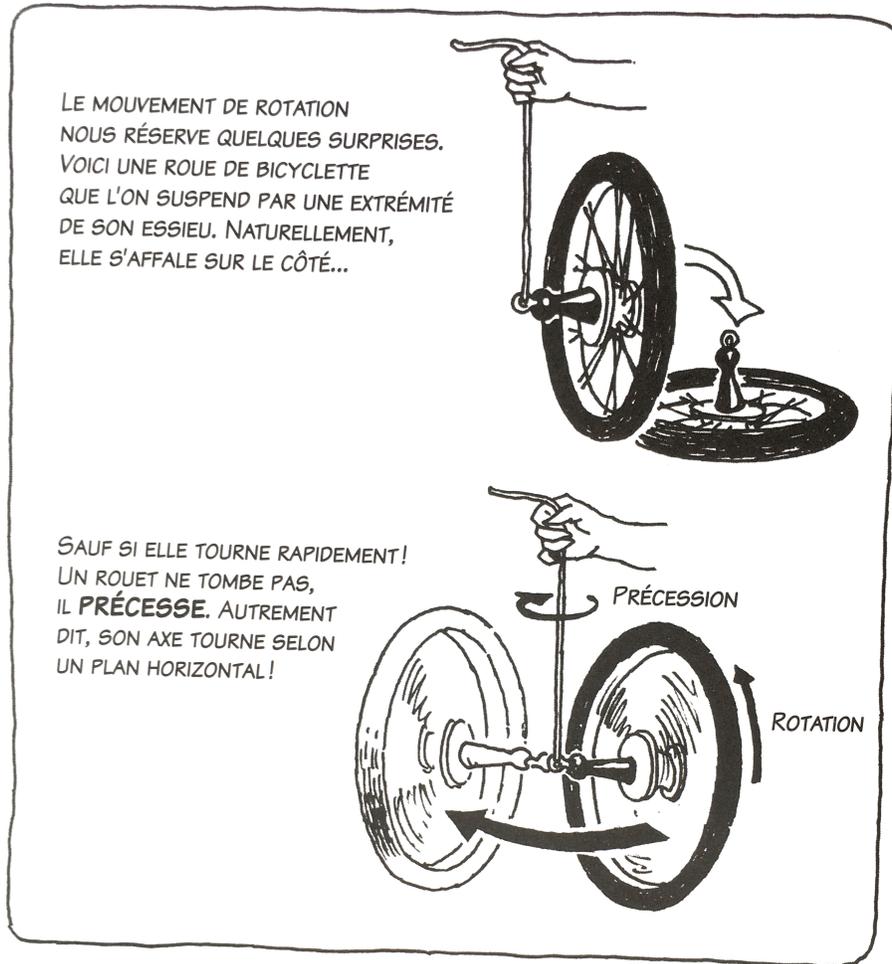
Solution. Données: $m=0.2 \text{ kg}$, $v_i = 1 \text{ m/s}$, $r_i=2 \text{ m}$ et $r_f=1 \text{ m}$. À trouver: L_O autour de l'axe de rotation en O et v_f . Le moment cinétique peut être calculé en assimilant la sphère à une masse ponctuelle concentrée en son c.m. Alors nous trouvons: (a) $L_O = rmv = 0.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. (b) La force de tension exercée par la corde passe par O , et son moment est nul. Par conséquent, il n'y a aucun moment de force qui agit sur le système et le moment cinétique doit être conservé pendant la réduction du rayon de rotation: $L_O = \text{constante}$, soit:

$$mr_i v_i = mr_f v_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

On trouve donc:

$$v_f = \frac{v_i r_i}{r_f} = \dots = 2 \text{ m/s}$$

(c) La tension dans la corde est donnée par: $F_T = m \frac{v^2}{r}$. Cette force augmente avec le carré de la vitesse et inversement avec le rayon de la trajectoire. Elle est transmise par le fil, dont la tension augmente d'un facteur 8. Le moment cinétique est conservé. Si le moment d'inertie diminue, la vitesse angulaire augmente et il en est de même pour la vitesse linéaire. Si le rayon est réduit de moitié, la vitesse linéaire est doublée.



UNE TOUPIE EST UN EXEMPLE PLUS FAMILIER. LA PESANTEUR NE LA FAIT PAS TOMBER : ELLE PRÉCESSE. ET LE COUPLE DE ROTATION SUR LA TERRE DÙ À LA FORCE DE GRAVITÉ DE LA LUNE FAIT PRÉCESSER L'AXE DE LA TERRE D'UN TOUR TOUS LES 26 000 ANS.



Figure 4.18: Applications de la loi de conservation du moment cinétique: la stabilité gyroscopique. (Ref: *La physique en BD*, ed. Larousse.)

Chapitre 5

L'énergie

Nous étudions dans ce chapitre, l'énergie, en regardant d'abord comment elle est transférée par le *travail* et comment elle se manifeste sous deux formes fondamentales: l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'accent est mis sur la mécanique, mais l'énergie est omniprésente dans toutes les branches de la physique, influençant notre façon de les aborder.

L'énergie d'un système se manifeste de manières très diverses, mais toutes résultent de l'action d'une des quatre forces fondamentales. On distingue trois formes d'énergie fondamentales:

- Une énergie liée à la position relative: l'énergie potentielle;
- Une énergie liée à la vitesse relative: l'énergie cinétique;
- Une énergie liée à la configuration d'un système: l'énergie interne.

Contenu

5.1	Le travail	76
5.2	Puissance	82
5.3	Énergie cinétique	83
5.4	Énergie potentielle	85
5.5	Énergie interne	87
5.6	Conservation de l'énergie	87
5.7	Énergie mécanique	87
5.8	Application: Les collisions	90
5.8.1	Conservation de la quantité de mouvement	90
5.8.2	Collision élastique en une dimension	91
5.8.3	Collision complètement inélastique en une dimension	93
5.8.4	Collision élastique en deux dimensions	93
5.9	Extra: un collisionneur des particules	95

5.1 Le travail

L'énergie totale d'un système isolé est conservée. Elle peut être transférée par l'interaction d'un système à un autre, mais on ne peut ni créer de l'énergie,

ni en détruire. La force est l'agent du changement et l'énergie est une mesure du changement.

Quand deux systèmes interagissent (e.g. une balle de tennis et une raquette) il y a un transfert d'énergie de l'un vers l'autre. Nous disons que le fournisseur d'énergie effectue un travail sur le bénéficiaire d'énergie.

Le travail mesure le changement de l'énergie d'un système qui résulte de l'application d'une force qui agit sur un certain parcours.

Au coeur du concept de travail est la notion de mouvement contre une résistance, qu'elle soit fournie par la pesanteur, un frottement, une force électrique ou n'importe quelle autre force.

Commençons par le cas le plus simple d'une masse ponctuelle (équivalent à un corps parfaitement rigide dont tous les composants se déplacent ensemble). Soit une force constante externe \vec{F} exercée sur cette masse qui la déplace sur une distance rectiligne l . Par définition, le travail W effectué par une force est:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} \quad (5.1)$$

Autrement dit, le travail d'une force constante, appliquée à un corps, est le produit de la composante de la force dans la direction du mouvement par la distance sur laquelle la force agit:

$$W = F l \cos \theta$$

L'unité de travail est le *newton-mètre*. Pour simplifier et en honneur de J.P. Joule, le travail effectué par une force de 1 newton en déplaçant un corps de 1 mètre est appelé 1 joule (J), ou

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pour une force parallèle à la trajectoire rectiligne du mouvement, le travail W devient:

$$W = \pm F l$$

Un travail positif est effectué sur un objet quand le point d'application de la force se déplace dans le sens de la force. Un travail négatif est effectué quand le point d'application de la force se déplace dans la direction opposée à la force. Le travail est nul quand il n'y a pas de déplacement.

Exemple 5.1.1.

1. En démarrant, une locomotive exerce une force de traction constante de 400 kN sur une distance de 0.5 km sur le wagon qu'elle tire. Quel est le travail effectué, W_d ?
2. En arrivant dans une gare, la locomotive exerce une force de freinage de 100 kN dans la direction opposée au mouvement pour arrêter le train sur une distance de 1 km. Quel est le travail effectué, W_f ?

Solution.

1. Dans le cas du démarrage, la direction de la force est dans le sens du mouvement, alors $F > 0$ et $W > 0$:

$$W_D = +F l = +(400 \text{ kN})(500 \text{ m}) = 100 \times 10^6 \text{ J} = 200 \text{ MJ}$$

2. Dans le cas du freinage, la force est opposée à la direction du mouvement et $W < 0$:

$$W_D = +F l = -(100 \text{ kN})(1000 \text{ m}) = -100 \times 10^6 \text{ J} = -100 \text{ MJ}$$

NB : exprimez la distance en mètres, car les unités du travail sont en $[J] = [N][m]$.

Exemple 5.1.2. Une dépanneuse remorque une voiture sur une côte à 20° . La tension dans le câble est constante et la vitesse des deux véhicules est constante. Quel est le travail effectué par la dépanneuse quand elle remorque la voiture sur une distance de 0.50km sur cette pente constante en supposant que le câble fasse un angle de 30° avec le plan de la route et que la tension soit de 1600 N?

Solution. Données: $F_T = 1600$ N, $\theta = 30^\circ$ et $l = 500$ m. L'angle de la route n'est pas importante ici. À trouver: W_{dv} .

Le mouvement est dans la direction de la route en pente. La composante de la force agissant dans la direction du déplacement est $F_T \cos 30^\circ$, indépendant de la pente de la route. Le travail est donné par:

$$W = F_T \cos 30^\circ l = \dots = 6.9 \times 10^5 \text{ J}$$

Travail contre la pesanteur Élever une masse m contre la gravité requiert un travail. Si on soulève m à vitesse constante, son accélération est nulle, $\vec{a} = 0$, c'est à dire que $\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$. Par conséquent, la force appliquée \vec{F} doit compenser exactement le poids de l'objet \vec{F}_W , sauf pendant le démarrage du mouvement où elle doit être plus grande. Force et mouvement sont verticaux et dirigés vers le haut:

$$\theta = 0 \text{ et } W = Fl \cos \theta = Fl$$

Soit h la hauteur de laquelle la charge est soulevée. Le travail effectué contre la gravité est alors:

$$W = F_W h = mgh$$

On dit couramment que ce travail est fourni à l'objet pour le soulever. Il est plus précis de dire que ce travail est fourni au système objet-Terre: on fournit un travail pour augmenter la distance entre les deux objets.

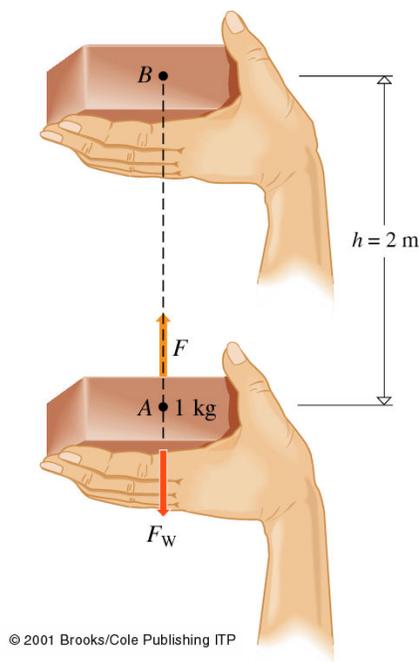
Exemple 5.1.3. Déterminez le travail fourni pour soulever une brique de 1 kg à vitesse très faible et constante d'une hauteur $h = 2.0$ m. On néglige la petite force additionnelle pour déclencher le mouvement; on suppose g constant.

Solution. Pour soulever le bloc à vitesse constante, $a = 0$, la somme de toutes les forces doit être nulle, $F = ma = 0$. Ainsi, la force appliquée, \vec{F} , doit être égale et opposée au poids du bloc, \vec{F}_W ; \vec{F} est verticale et dirigée vers le haut:

$$W = Fl \cos \theta = F_W h = mgh = \dots = 20 \text{ J}$$

Cette équation décrit le travail fait par la main contre la gravité. On peut également calculer le travail effectué par la force gravitationnelle elle-même. Sa direction est opposée au mouvement, $\theta = 180^\circ$, et ce travail est négatif $W_{F_W} = -W = -20$ J.

Figure 5.1: La main soulève lentement le bloc en exerçant une force ascendante F légèrement plus grande que le poids F_W du bloc. Un travail est effectué pour surmonter la pesanteur, c'est-à-dire déplacer le bloc en s'opposant à l'interaction gravitationnelle Terre-bloc.



Force conservative: la pesanteur Considérons un mouvement général dans un champ gravitationnel homogène. Il n'y a pas de frottements. Imaginez qu'une charge doit être transportée sur une colline. Une petite étape de ce parcours déplace la charge de Δx horizontalement et la soulève d'une hauteur Δy . Seul le mouvement Δy implique un travail, $\Delta W = mg\Delta y$. Le mouvement horizontal n'implique aucun travail. Le travail total dépend donc seulement du déplacement vertical; il est indépendant du mouvement horizontal.

En général, en déplaçant m de A à B dans un champ gravitationnel homogène, le travail est indépendant du parcours. Seule importe la différence de hauteur entre A et B .

Une **implication importante** est que le travail est nul si on déplace une masse ponctuelle sur un parcours fermé. Les forces avec cette propriété sont appelées *forces conservatives*.

Force non conservative: le frottement Considérez un bloc traîné sur un plancher à une vitesse constante. La force F doit être égale et opposée à la force de frottement cinétique F_f . Cette dernière est la moyenne macroscopique d'infinies interactions microscopiques entre les atomes du bloc et du plancher.

Les régions de contact s'usent l'une sur l'autre, des soudures microscopiques sont continuellement faites et défaites. Les atomes se bousculent et de l'énergie est transférée au bloc et au plancher. Il est impossible de calculer le travail effectué sur le bloc seul. Par contre, le travail net sur l'ensemble du système bloc-plancher est bien $F_f l$; le travail contre le frottement cinétique est:

$$W_f = F_f l = \mu_c F_N l$$

La force de frottement n'est pas conservative. Le travail réapparaît surtout sous forme thermique, qui chauffe à la fois le bloc et le plancher.

Exemple 5.1.4. Un enfant de 25 kg assis sur le gazon retient son grand chien par une laisse tendue horizontalement. Le chien tire sur la laisse avec une force de 100 N et traîne l'enfant à vitesse constante. Quel est le travail effectué par le chien sur une distance de 20 m, pour vaincre le frottement cinétique?

Solution. Données: $F = F_f = 100$ N et $l = 20$ m. À trouver: W_f .

La force exercée par le chien s'oppose au frottement. Elle est constante et pointe dans la direction du déplacement. Le travail correspondant est:

$$W_f = F_f l = \dots = 2 \text{ kJ}$$

Quand un travail positif est effectué d'un système sur un autre, il y a transfert d'énergie W du premier vers le second. Dans cet exemple, le chien est la source de 2 kJ d'énergie qui est envoyée vers l'enfant, le sol et le chien lui-même. La force de frottement s'oppose au mouvement. Elle change de direction avec les changements de direction du mouvement. Ainsi, même si l'enfant et le chien retournent au point de départ, le travail effectué contre le frottement n'est pas zéro: W_f est toujours positif.

La force de frottement n'est pas conservative.

Travail d'une force variable La définition du travail $W = Fl \cos \theta$ implique que la force F est constante le long du trajet. Mais en général, la force peut varier le long du chemin (e.g. la force gravitationnelle varie comme $1/r^2$) et il faut écrire explicitement $\vec{F}(x, y, z)$ ou $\vec{F}(r)$.

Considérons un chemin de P_i à P_f dans un champ de force variable. On peut le décomposer en une succession de n petits segments rectilignes de longueur Δl_j sur lesquels la force peut être considérée constante (\vec{F}_j).

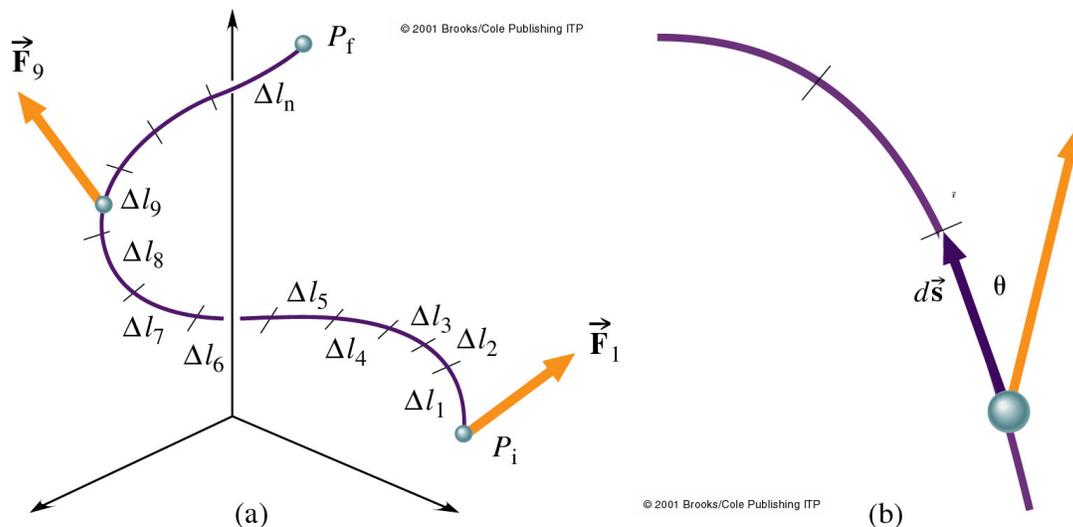


Figure 5.2: (a) Un objet se déplace dans l'espace de P_i à P_f dans un champ de force. En chaque point de l'espace, donc en chaque point de la trajectoire, une force s'exerce. (b) Un gros plan de cette géométrie.

Le travail total de $\vec{F}(\vec{r})$ sur le chemin P_i à P_f est alors approximativement:

$$W = \sum_{j=1}^n \Delta W_j = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \Delta \vec{l}_j = \sum_{j=1}^n F_j \cos \theta_j \Delta l_j$$

Cette approximation devient exact dans la limite où $n \rightarrow \infty$, tel que $\Delta l_j \rightarrow 0$. La somme se transforme alors en intégrale:

$$W = \int_{P_i}^{P_f} F(\vec{r}) \cos \theta dl = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad (5.2)$$

Cette intégrale est la définition la plus générale du travail effectué par une force le long d'un chemin.

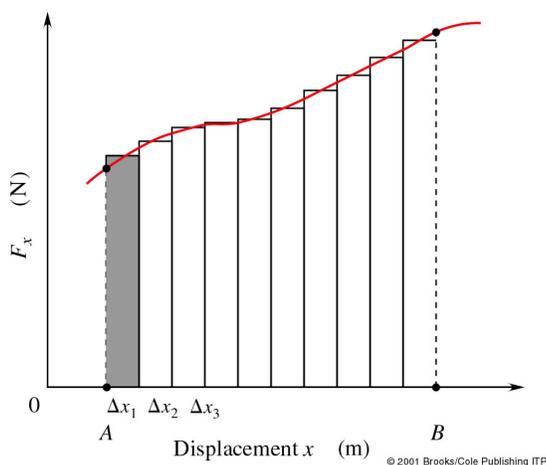
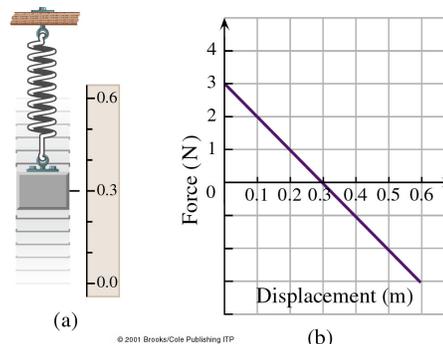


Figure 5.3: En une dimension, nous pouvons représenter graphiquement $F_x(x)$ en fonction de x dans un diagramme appelé diagramme du travail. L'aire sous la courbe entre les deux points P_i et P_f est le travail total de la force variable quand on déplace un corps de P_i à P_f : $A = \int_{P_i}^{P_f} F_x dx$.

Exemple 5.1.5.

Une masse attachée à un ressort en apesanteur est au repos à 0.3 m du sol. On écarte la masse de 30 cm de la position de repos (jusqu'à 0.0 m) puis on la lâche. Le graphique montre la force en fonction du déplacement.

1. Décrivez la force variable.
2. Quel est le travail du ressort lorsque la masse se déplace de 0.0 m à 0.3 m?
3. Quel est le travail du ressort lorsque la masse se déplace de 0.3 m à 0.6 m?



Solution.

1. La force d'un ressort agit parallèlement au déplacement, $\theta = 0$, et varie linéairement avec le déplacement: $F = k\Delta x$. En $\Delta x = 0$ la force totale est dirigée vers le haut et vaut $F = 3.0$ N, en $\Delta x = 0.3$ m le système est à l'équilibre et la force totale vaut 0. Enfin, à $\Delta x = 0.6$ m la force est dirigée vers le bas et vaut $F = -3.0$ N.

2. De $\Delta x = 0.0$ m à $\Delta x = 0.3$ m, la force du ressort est la cause du mouvement, au-delà elle s'oppose au mouvement. Le travail fourni par le ressort correspond à l'aire sous la courbe entre $\Delta x = 0.0$ m et $\Delta x = 0.3$ m:

$$W = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{hauteur}) = 0.45 \text{ Nm} = 0.45 \text{ J}$$

3. Quand la masse dépasse la position d'équilibre en $\Delta x = 0.3$ m, la force change de direction et pointe vers le bas, $\theta = 180^\circ$. C'est la masse qui travaille sur le ressort et le travail du ressort devient négatif. L'aire entre 0.3 m et 0.6 m est négative et $W = -0.45$ J. Le travail total du ressort est nul.

5.2 Puissance

Pour l'exploitation d'une source d'énergie, ce n'est pas uniquement son contenu total en énergie qui compte mais aussi le taux avec lequel elle est libérée. Ce n'est pas par hasard que la notion de puissance est devenue mesurable au début de la Révolution industrielle.

La puissance est la cadence à laquelle l'énergie est transformée d'une forme en une autre, ou transférée d'un système à un autre:

$$\text{Puissance} = \frac{\text{travail effectué}}{\text{intervalle de temps}}$$

Pour un intervalle de temps Δt fini, nous parlons de puissance moyenne P_m :

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Pour exprimer la variation de la puissance avec le temps, on définit la puissance instantanée:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right) = \frac{dW}{dt}$$

Si l'énergie est dégagée à un taux constant, la puissance instantanée est égale à la moyenne. L'unité de puissance SI est le watt (W):

$$[\text{Puissance}] = 1W = 1J/s$$

Exemple 5.2.1. La vitesse moyenne de l'ascenseur express de la tour Sears à Chicago est de 548.6 m/min. Quelle est la puissance moyenne délivrée par son moteur lors de la montée d'une charge totale de 1.0×10^3 kg au 103^e étage à 408.4 m au-dessus du sol?

Solution. Données: $v_m = 9.144$ m/s, $\Delta l = 408.4$ m et $m = 1.0 \times 10^3$ kg. À trouver: P_m .

Nous calculons d'abord l'énergie requise pour monter la charge (d'après l'éq. 5.2)

$$\Delta W = Fh = mgh = \dots = 4.0 \times 10^6 \text{ J}$$

Le temps de montée peut être calculé à partir de la vitesse moyenne:

$$v_m = \frac{\Delta l}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{h}{v_m} = 44.6 \text{ m}$$

La puissance moyenne est:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \dots = 90 \text{ kW}$$

Puissance et mouvement

Si une force F agit sur un corps qui se déplace d'une certaine distance Δl , l'éq. 5.2 implique qu'un travail $\Delta W = (F \cos \theta) \Delta l$ est fait. Si ce processus dure un temps Δt , la puissance moyenne est:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \cos \theta v_m$$

et à la limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$P = F v \cos \theta \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La puissance est égale au produit de la composante de la force dans la direction du mouvement avec la vitesse.

5.3 Énergie cinétique

Pour comprendre le concept d'énergie cinétique, considérons un corps de masse m sous l'influence d'une force constante F . Le travail effectué par cette force sur une distance l est:

$$W = F l = m a l$$

L'accélération a est constante car la force est constante. La vitesse change de v_i à v_f (équation 1.20):

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 a l \Rightarrow a l = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2)$$

En multipliant les deux membres par m , nous obtenons le travail W en fonction des vitesses finale et initiale:

$$W = m a l = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

Ainsi le travail modifie la quantité $\frac{1}{2} m v^2$, qui par définition est l'énergie cinétique E_C :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow W = E_{Cf} - E_{Ci} = \Delta E_C$$

L'unité SI de l'énergie cinétique, comme toute forme d'énergie, est le Joule [J]:

$$[\text{Energie}] = [\text{m}] \cdot [\text{v}^2] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \equiv \text{J (Joule)}$$

Exemple 5.3.1. Calculez l'énergie cinétique d'un avion au décollage. L'avion pèse 2.2×10^6 N et décolle à 268 m/s.

Solution. Pour calculer l'énergie cinétique il faut connaître la masse de l'avion:

$$F_W = m g \rightarrow m = \dots = 2.24 \times 10^5 \text{ kg}$$

La vitesse de l'avion permet de calculer son énergie cinétique:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \dots = 8.0 \times 10^9 \text{ J}$$

L'énergie cinétique est une quantité relative; nous choisissons par convention le zéro de l'énergie cinétique, en choisissant le système de coordonnées par rapport à la vitesse mesurée.

La Terre est prise comme référence "immobile" dans l'exemple précédent et on calcule la vitesse par rapport au sol. Si vous étiez dans l'avion, "au repos" à côté de votre valise de 20 kg, votre valise n'a aucune énergie cinétique par rapport à vous; l'avion n'en a pas non plus. Mais un observateur au sol vous voit passer à 268 m/s: pour lui, votre valise a une énergie cinétique de 7.2×10^5 J.

Ce qui compte en matière d'énergie liée au mouvement, ce n'est pas l'énergie absolue du système, mais **l'énergie qui lui est transférée ou retirée**¹.

Théorème de l'énergie cinétique

Le travail total effectué pour accélérer un objet rigide est égal à la variation de son énergie cinétique, une conclusion connue sous le nom de **théorème de l'énergie cinétique**.

Il est important de noter que ce théorème n'est valable que pour les corps rigides indéformables (e.g. particule ponctuelle). Il ne s'applique pas, même approximativement, aux corps déformables (ressort, élastique, liquide etc...): une bonne partie du travail peut disparaître dans la déformation de l'objet et ne causer aucun effet cinématique (ce travail affecte par contre l'énergie interne).

Exemple 5.3.2. Un homme de 70 kg peut courir à une vitesse maximum d'environ 10 m/s. Calculer son E_C maximum.

Solution. Données: $m = 70$ kg et $v_{max} = 10$ m/s. À trouver: $E_{C\ max}$. Son E_C maximum est:

$$E_{C\ max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \dots = 2.5 \times 10^3 \text{ J}$$

Énergie cinétique de rotation

Considérons un corps rigide tournant autour d'un axe fixe. À tout instant, chaque particule du corps a une E_C individuelle. Le corps tournant a donc une E_C de rotation. En général, un système en rotation possède une énergie cinétique de rotation.

Pour chaque masse ponctuelle $m_{\bullet j}$, l'énergie cinétique sera $E_{Cj} = \frac{1}{2}m_{\bullet j}v_j^2$. Mais $v_j = r_j\omega$ car chaque particule a la même vitesse angulaire ω que le corps. Donc:

$$E_{Cj} = \frac{1}{2}m_{\bullet j}v_j^2 = \frac{1}{2}m_{\bullet j}r_j^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n m_{\bullet j}r_j^2\right)\omega^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si un corps rigide est en mouvement de translation sans rotation, son énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$. Si le corps rigide est en mouvement de rotation sans translation, son énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}I\omega^2$. En général si le corps est à la fois en mouvement de

¹Il faudra la relativité pour introduire un invariant d'énergie, l'énergie dans le centre de masse $E = mc^2$.

translation et de rotation, son énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. Fondamentalement il n'y a rien de nouveau dans l'énergie cinétique de rotation; elle est simplement l'énergie cinétique de translation des particules constituantes due à la rotation du corps rigide.

5.4 Énergie potentielle

Considérons une force qui agit continuellement (e.g. la force gravitationnelle et la force d'un ressort). Pour déplacer un objet contre cette force, il faut fournir un travail. Si l'objet est lâché, il se met en mouvement sous l'effet de la force et récupère de l'énergie cinétique.

Que devient le travail pendant que l'objet est maintenu immobile? L'énergie est emmagasinée dans le système (Terre-objet, Ressort-objet), prête à être libérée. Cette énergie liée à la position d'un objet dans un champ de force, ou à la position relative de corps qui exerce une force l'un sur l'autre, est appelée **énergie potentielle**, E_P .

L'énergie potentielle fait partie de la grande chaîne de toutes les formes d'énergie. Le travail peut être stocké sous forme d'énergie potentielle avant d'être transformé en énergie cinétique, ou vice versa. L'énergie potentielle existe seulement dans le cas d'objets en interaction.

Énergie potentielle gravitationnelle sur Terre

Quand un peintre gravit un mât, il effectue un travail contre la gravitation. Il est toujours pratiquement immobile, et la force qu'il doit exercer correspond exactement à celle qui agit sur lui. Le travail vaut:

$$F = F_W = mg \Rightarrow W = Fl = mg\Delta h$$

où $\Delta h = h_f - h_i$ est la différence de hauteur.

Pour des déplacements proches de la Terre, g est constant. Si le peintre est immobile au début comme à la fin du déplacement, le changement de son énergie potentielle est:

$$\Delta E_P = W = mg\Delta h$$

Comme toute énergie est relative, seule la hauteur relative entre en considération: le niveau de référence, c'est-à-dire le point zéro de h et de E_P est totalement arbitraire. La seule énergie mesurable en absolu est la variation de l'énergie potentielle.

Définissons par exemple la surface de la Terre comme niveau de référence. La différence entre l'énergie potentielle à ce niveau h_0 et à une hauteur h plus élevée est:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{P0} = mg(h - h_0)$$

Dire que h_0 est le niveau référence signifie qu'on compte la hauteur à partir de ce point. Alors:

$$h_0 = 0 \Rightarrow E_{P0} = mgh_0 = 0$$

$$W = \Delta E_P = E_{Pf} = mgh$$

Le travail effectué pour soulever une masse est égal à l'accroissement de son énergie potentielle dans le champ gravitationnel.

Exemple 5.4.1. Un peintre porte un pot de peinture de 2 kg. Il grimpe 10 m le long du mât au dessus du toit d'une tour de 30 m. (a) De combien augmente l'énergie potentielle du pot lors de cette ascension? (b) Quelle énergie potentielle a gagné le pot depuis qu'il a quitté le sol?

Solution. Données: les hauteurs de 30 m et 10 m, masse $m=2$ kg.

(a) Lors de l'ascension sur le mât:

$$\Delta E_P = mg\Delta h = (2 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) = 196 \text{ J}$$

(b) Quand on hisse le pot depuis le sol, il est soulevé de 40 mètres, et:

$$\Delta E_P = mg\Delta h = (2 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(40 \text{ m}) = 4 \times 196 \text{ J} = 784 \text{ J}$$

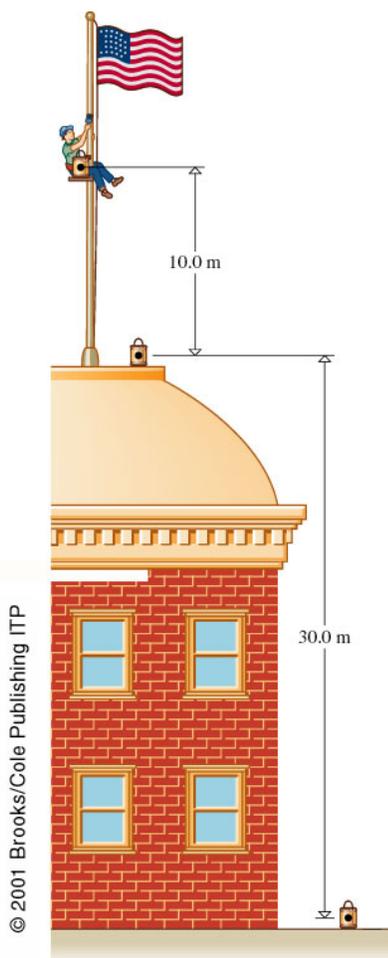


Figure 5.4: Le peintre de la hampe du drapeau a une énergie potentielle gravitationnelle donnée par $E_P = mgh$, où h est mesurée à partir d'un niveau quelconque pris comme origine ($h=0$). Seule la variation de E_P est mesurable, donc la position du niveau $h = 0$ n'a aucune importance.

Selon le choix du niveau de référence, E_P peut être positive ou négative. Considérons un train de montagnes russes. Il part du sommet (hauteur h_i) et descend jusqu'au premier minimum (hauteur $h_f < h_i$). L'énergie potentielle change de $\Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = mg(h_f - h_i) < 0$, ce qui montre que l'énergie potentielle diminue.

5.5 Énergie interne

Les deux formes d'énergies introduites avant (potentielle et cinétique) se distinguent en deux autres: l'énergie interne et l'énergie externe. Quelques exemples sont donnés en bas:

- Énergie cinétique interne: Dans une boule au repos, tous les atomes vibrent au voisinage de leur position d'équilibre avec de grandes vitesses de l'ordre de 400 m/s. Nous appelons cette énergie cinétique interne et désordonnée, énergie thermique.
- Énergie cinétique externe: Une boule lancée en l'air a un mouvement global qui se superpose à celui de chaque atome, qui correspond à une énergie cinétique externe.
- Énergie potentielle interne: Si la boule est déformée, par une collision par exemple, elle emmagasine de l'énergie élastique, une des formes de l'énergie potentielle interne.
- Énergie potentielle externe: Si la distance Terre-boule change, la boule gagne ou perd de l'énergie potentielle externe.

En progressant dans notre étude de la physique, nous rencontrerons plusieurs types d'actions des quatre forces fondamentales qui permettent d'emmagasiner de l'énergie potentielle interne et externe. Exemples: énergie chimique, électrique, magnétique ou nucléaire.

5.6 Conservation de l'énergie

L'un des énoncés les plus fondamentaux de toute la physique est la loi de conservation de l'énergie: **L'énergie totale de tout système isolé du reste de l'Univers reste constante, mais l'énergie peut être transformé d'une forme à l'autre à l'intérieur du système.**

Dans l'hypothèse où l'énergie de l'Univers est constante sur toute sa durée de vie, l'énergie de toute portion de cet Univers isolée du reste doit aussi être constante. S'il n'y a aucun transfert d'énergie de l'extérieur vers ce système ou de ce système vers l'extérieur (c'est ce que signifie ici le mot *isolé*), et si l'énergie interne ne peut être créée sans en consommer autant, ni l'énergie du système, ni celle du reste de l'Univers ne peuvent varier.

Nous appliquons ce principe tout à fait général aux formes d'énergie que nous connaissons déjà, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Mais il ne faut pas oublier que cette loi s'applique à la somme de toutes les formes d'énergie.

5.7 Énergie mécanique

L'énergie mécanique E d'un système est la somme de l'énergie cinétique E_C et de l'énergie potentielle gravitationnelle E_P : $E = E_C + E_P$. Cette définition néglige toute énergie interne et toute énergie externe sauf celle causée par la gravité.

Supposons que le système fournit un travail W_{ext} contre une force externe appliquée autre que la gravité. Son énergie mécanique est alors diminuée par une portion W , et passe de E_i à $E_f < E_i$, impliquant une variation de l'énergie gravitationnelle et/ou de l'énergie cinétique:

$$W_{ext} = \Delta E = E_f - E_i = \Delta E_C + \Delta E_P$$

S'il n'y a aucune force extérieure autre que la gravité, le système n'effectue pas et ne reçoit pas de travail, $E_i = E_f$ et **l'énergie mécanique est conservée**. Ceci est une forme restreinte de la loi de conservation de l'énergie, ne tenant compte que de l'énergie mécanique.

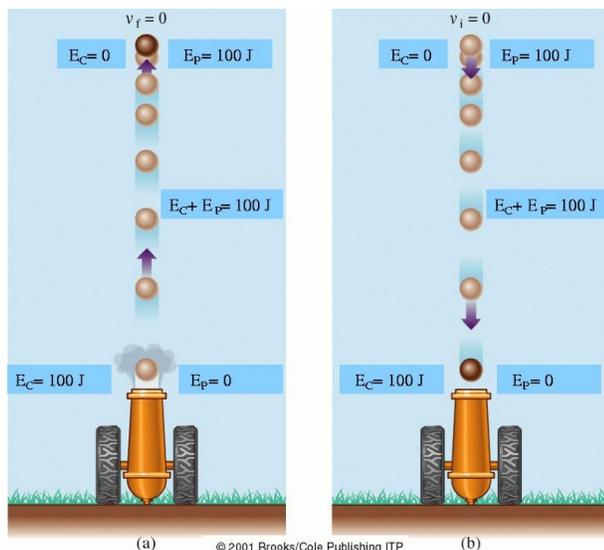


Figure 5.5: (a) En montant, un boulet de canon tiré vers le haut perd de l'énergie potentielle gravitationnelle. Tiré avec $E_{Ci} = 100 \text{ J}$, il aura toujours une énergie totale de 100 J. En réalité une partie de l'énergie sera perdue à cause de la résistance de l'air. (b) Quand le boulet descend après s'être immobilisé au faite de sa trajectoire, il perd de l'énergie potentielle et gagne de l'énergie cinétique.

Considérons la situation démontré à la figure 5.5 et supposons que g soit constante. La loi de conservation se traduit par:

$$W_{ext} = \Delta E = \Delta E_C + \Delta E_P \Rightarrow$$

$$W_{ext} = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) + (mgh_f - mgh_i)$$

Si aucune force autre que la gravitation agit sur le système, $W_{ext} = 0$ et la loi de conservation s'écrit:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i$$

À chaque instant du mouvement, l'énergie mécanique totale est constante; si l'énergie cinétique du corps augmente, son énergie potentielle diminue, et vice versa.

Le pendule est un autre exemple de la conservation de l'énergie mécanique. Au début du trajet, nous élevons la masse à une hauteur h au-dessus de la position d'équilibre. Nous augmentons ainsi son énergie potentielle de mgh . En lâchant la masse, elle est accélérée jusqu'à une énergie cinétique équivalente, qu'elle atteint au point d'équilibre, convertissant toute l'énergie potentielle accumulée. En continuant, la gravitation ralentit le mouvement, jusqu'à ce que toute l'énergie soit reconvertie en énergie potentielle. A ce point la masse est de nouveau au repos pour un petit instant.

On peut aussi analyser ce pendule du point de vue de la force de pesanteur: Sur la première moitié de la trajectoire, la force de pesanteur fourni un travail au pendule équivalent à $W = F d = mg d = mgh$. Ce travail est entièrement convertit en énergie cinétique du pendule $W = mgh = E_C = \frac{1}{2}mv^2$. Sur la seconde moitié de la trajectoire, le pendule travaille contre la force de pesanteur et son énergie cinétique est reconvertie en énergie potentielle.

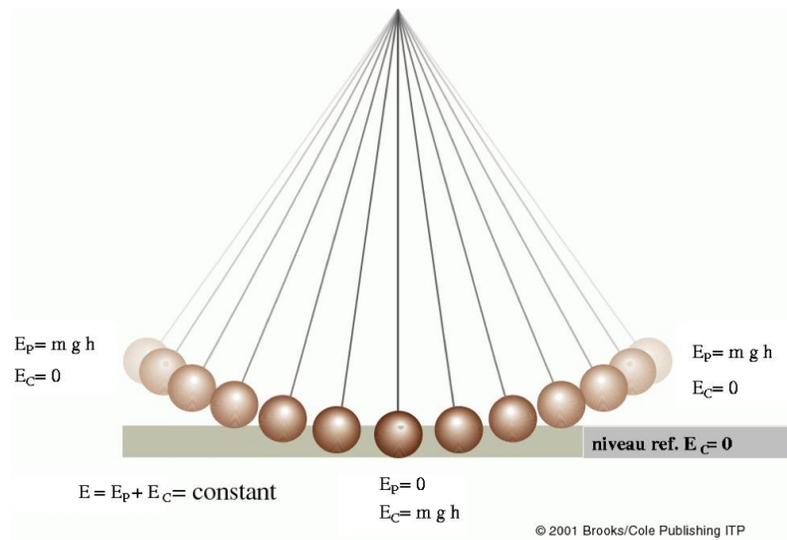
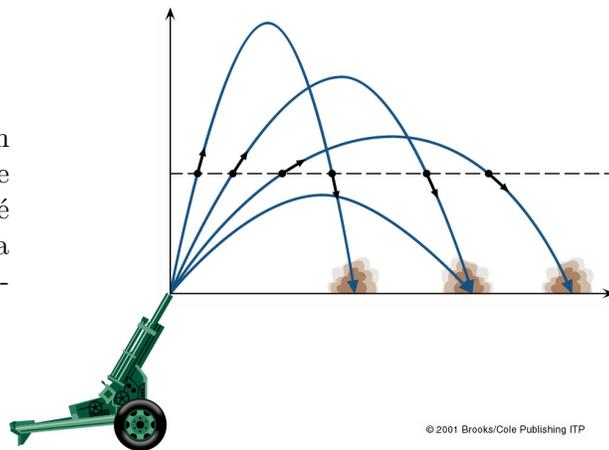


Figure 5.6: Le transfert d'énergie d'une forme à une autre au cours de l'oscillation d'un pendule.

Question pour réfléchir.

Imaginons des boulets de canon identiques, tirés avec la même vitesse en module, comme indiqué sur le dessin ci-contre. Quelle sera la relation entre leurs vitesses, en module, à la même hauteur h ?



Exemple 5.7.1. Pourquoi une planète accélère-t-elle sur son orbite en s'approchant du Soleil?

Solution. Nous avons déjà répondu à cette question sur la base des lois de Newton. Nous disposons maintenant d'une seconde méthode basée sur la conservation d'énergie mécanique: $E_C + E_P = \text{constante}$. Quand la planète s'approche du Soleil, elle perd de l'énergie potentielle. Comme l'énergie totale doit être constante, l'énergie cinétique augmente, ainsi la vitesse de la planète augmente. Au périhélie, la planète a un minimum d'énergie potentielle et un maximum d'énergie cinétique: sa vitesse est donc maximale. A l'aphélie, l'énergie potentielle est maximale: l'énergie cinétique et la vitesse sont donc minimales.

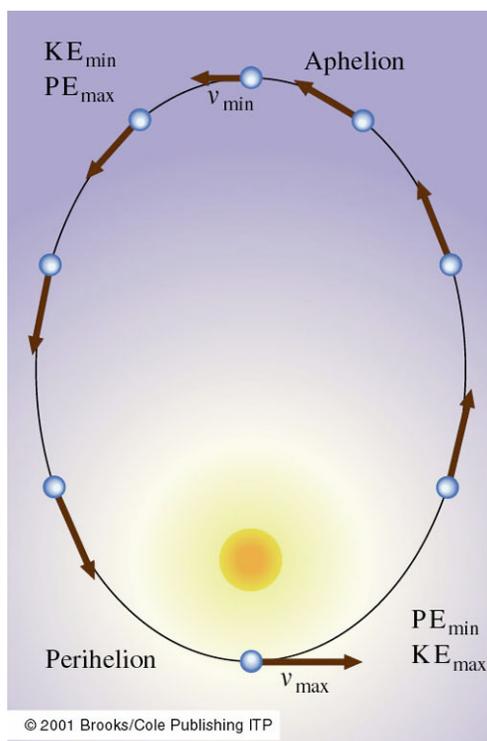


Figure 5.7: Une planète en orbite elliptique autour du Soleil. En s'approchant du Soleil, elle accélère. La vitesse de la planète est la même lorsqu'elle est à égales distances du Soleil, en s'approchant ou en s'éloignant du Soleil car alors l'énergie potentielle est la même, donc l'énergie cinétique doit aussi être la même.

5.8 Application: Les collisions

La plupart de nos connaissances en physique atomique et subatomique, nous vient de l'observation des collisions. Des faisceaux de particules sont lancés contre des cibles et on analyse le mouvement des fragments émis. Des relations analogues gouvernent à la fois ces événements exotiques et les collisions plus familières, telles que des clubs frappant des balles de golf. Une collision est marquée par le transfert de quantité de mouvement entre des objets en mouvement relatif, résultant de leur interaction par au moins une des quatre forces. Dans tous les cas où il n'y a pas de forces externes, la quantité de mouvement totale des objets qui entrent en collision est conservée.

Une collision est **inélastique** si l'énergie cinétique finale du système est différente de l'énergie cinétique initiale; une partie de l'énergie cinétique est convertie en d'autres formes d'énergie, par exemple en chaleur. La collision complètement inélastique est un cas extrême, où les objets qui entrent en collision restent soudés et toute l'énergie cinétique est transformée. Un choc entre deux voitures, un insecte qui vient frapper le pare-brise d'un autobus en mouvement ou un neutron absorbé par un noyau d'uranium sont des exemples de collisions inélastiques.

On dit qu'une collision est **élastique** quand la somme des énergies cinétiques des protagonistes reste inchangée, c'est-à-dire quand l'énergie cinétique est globalement conservée.

5.8.1 Conservation de la quantité de mouvement

La description physique des collisions fait appel à la quantité de mouvement \vec{p} , que nous avons étudié au chapitre 3. Nous avons introduit ce concept en lien avec la deuxième loi de Newton $F = ma$, qui dit que tout changement de quantité de mouvement nécessite une force correspondante agissant pendant un intervalle de temps Δt . Nous avons aussi appris

que ce qui compte est le changement de quantité de mouvement et pas sa valeur absolue, une situation analogue à ce que nous avons vu dans le cas de l'énergie.

La quantité de mouvement totale d'un système isolé est une constante:

$$\vec{F} = 0; \quad \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i$$

La quantité de mouvement d'une particule à l'intérieur d'un système peut être modifiée par des forces internes. Mais la quantité de mouvement totale de ce système isolé est conservée; la somme vectorielle des quantités de mouvement des deux partenaires est la même avant et après l'interaction:

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

Si les masses des partenaires ne changent pas pendant l'interaction, cette équation devient:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

Exemple 5.8.1. Une balle de masse $m = 8.0$ g est tirée horizontalement avec une vitesse $v = 352.0$ m/s avec un pistolet de 0.90 kg au repos. Quelle est la vitesse de recul?

Solution. Le système formé du pistolet et de la balle n'est soumis à aucune force horizontale externe. Par conséquent, la quantité de mouvement horizontale doit être conservée. Dans la direction horizontale par rapport à la Terre, on a:

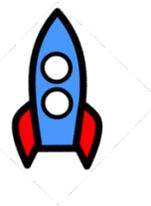
$$m_B v_{Bi} + m_P v_{Pi} = m_B v_{Bf} + m_P v_{Pf} \Rightarrow 0 = m_B v_{Bf} + m_P v_{Pf} \Rightarrow v_{Pf} = -\frac{m_B v_{Bf}}{m_P} = -3.1 \text{ m/s}$$

Le signe négatif de la réponse veut dire que le mouvement de recul du pistolet est dirigé dans le sens opposé à celui de la balle, pour que la vitesse soit définie positive. ◀

Question pour réfléchir.

Application: fusée sur un fil.

Une fusée est remplie d'air comprimé et une seconde plus lourde est remplie d'un mélange d'eau et d'air comprimé. Laquelle des deux s'envole le plus loin?



5.8.2 Collision élastique en une dimension

Dans un choc frontal, les centres de masse des deux objets qui entrent en collision se déplacent le long d'une même ligne droite.

Puisqu'on connaît la vitesse et la masse de deux corps avant la collision et que les masses ne changent pas dans la collision, il y a deux inconnues dans l'état final: les vitesses des deux corps. Il y a deux équations à respecter pour déterminer les vitesses dans l'état final: la conservation de la quantité de mouvement, toujours vérifiée, et la conservation de l'énergie cinétique, seulement parce que la collision est élastique. Le problème est donc entièrement déterminé.

Après la collision, le mouvement reste sur cette même ligne droite et on peut travailler avec des quantités de mouvement scalaires. La conservation de la quantité de mouvement nous donne:

$$p_i = p_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

et la conservation de l'énergie cinétique:

$$E_{Ci} = E_{Cf} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

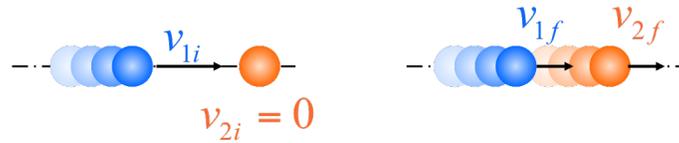


Figure 5.8: Représentation du choc frontal élastique.

Examinons d'abord un cas simple, comme indiqué à la figure 5.8. Pour une collision frontale avec l'un des mobiles au repos avant le choc, on a:

$$m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

et

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

On peut résoudre les deux équations pour v_{1f} et v_{2f} en fonction de v_{1i} :

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \quad \text{et} \quad m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 v_{2f}^2$$

En factorisant le premier membre de la deuxième équation on trouve:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \quad \text{et} \quad m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2$$

et en divisant ces deux équation on obtient:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad \text{et} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (5.3)$$

Question pour réfléchir. Déterminer l'effet physique des équations 5.3 pour les cas spécifiques:

- $m_1 = m_2$
 - $m_1 > m_2$
 - $m_1 < m_2$
-

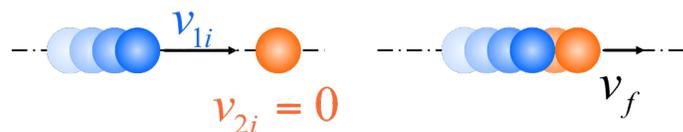


Figure 5.9: Représentation du choc frontal complètement inélastique.

5.8.3 Collision complètement inélastique en une dimension

Pour une collision complètement inélastique entre deux corps, l'énergie cinétique n'est pas conservée, mais la vitesse finale des deux corps est la même (voir figure 5.9).

On peut écrire le rapport entre l'énergie cinétique finale et l'énergie cinétique initiale (avec m_2 initialement au repos):

$$\frac{E_{Cf}}{E_{Ci}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2}{\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2}$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$m_1v_{1i} + 0 = m_1v_f + m_2v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}v_{1i}$$

En remplaçant v_f dans l'équation de l'énergie cinétique ci-dessus, on trouve:

$$E_{Cf} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}E_{Ci}$$

Cette relation implique que si la masse en mouvement est beaucoup plus grande que celle au repos, $m_1 \gg m_2$, l'énergie cinétique finale est à peu près égale à l'initiale. Dans la collision d'une voiture avec une bicyclette, celle-ci est emportée et la voiture continue. Dans le cas contraire, $m_2 \gg m_1$, l'énergie cinétique finale tend vers zéro. Si une voiture rentre dans un poids lourd garé, ou dans un mur, toute l'énergie cinétique de la voiture est transformée en déformation. NB: La quantité de mouvement est conservée dans tous les cas.

5.8.4 Collision élastique en deux dimensions

Le cas général de la collision élastique en deux dimensions de particules ponctuelles est compliqué par le fait qu'il n'y a pas assez de contraintes pour déterminer une solution unique. Dans le cas de l'impact d'un objet avec un autre objet immobile, il faut déterminer le vecteur vitesse de chaque objet après la collision, i.e. deux vecteurs.

En utilisant les relations de la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement nous pouvons déduire quelques relations entre les vecteurs vitesses.

Considérons le choc représenté à la figure 5.10. La collisions entre **deux masses égales** a une solution simple. La conservation de l'énergie cinétique donne:

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \Rightarrow v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (5.4)$$

La conservation de la quantité de mouvement implique:

$$m\vec{v}_{1i} = m\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f} \Rightarrow \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \Rightarrow |\vec{v}_{1i}|^2 = |\vec{v}_{1f}|^2 + |\vec{v}_{2f}|^2 + 2|\vec{v}_{1f}||\vec{v}_{2f}|\cos\theta \quad (5.5)$$

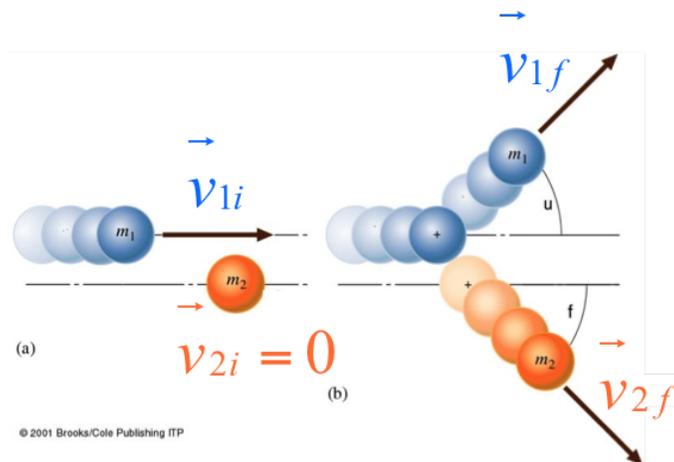


Figure 5.10: Représentation du choc élastique en deux dimensions.

où θ est l'angle entre les vecteurs vitesse finaux. Comparant directement ces deux équations, on en déduit que:

$$|\vec{v}_{1f}| |\vec{v}_{2f}| \cos \theta = 0$$

Cette condition est respectée si:

- $v_{1f} = 0$: collision frontale entre deux masses égales;
- $v_{2f} = 0$: la masse incidente manque sa cible, pas de collision;
- $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$ pour des vitesses finales simultanément non nulles.

5.9 Extra: un collisionneur des particules

Les accélérateurs ont été inventés pour produire des particules énergétiques permettant de sonder la structure du noyau des atomes. Depuis, ils ont été utilisés pour explorer divers aspects de la physique des particules. Leur fonction est d'accélérer des faisceaux de particules pour en augmenter l'énergie au moyen de champs électriques, et de guider et de focaliser ces faisceaux au moyen de champs magnétiques. Un accélérateur peut être en forme d'anneau (accélérateur circulaire), ou en ligne droite (accélérateur linéaire). Dans le premier cas, les faisceaux circulent en boucle, dans le deuxième, ils vont d'une extrémité à l'autre. Plusieurs accélérateurs d'énergie croissante peuvent être reliés, de façon à former une chaîne: c'est le cas du complexe d'accélérateurs du CERN.

Les collisions à l'intérieur d'un accélérateur peuvent se produire soit entre un faisceau et une cible fixe, soit entre deux faisceaux. Des détecteurs de particules sont placés autour du point de collision et enregistrent les événements, révélant les particules qui émergent des collisions.

Le Grand collisionneur de hadrons (LHC) est le plus grand et le plus puissant accélérateur de particules du monde. Il est aussi la dernière machine à être venue enrichir le complexe d'accélérateurs du CERN: son démarrage a eu lieu le 10 septembre 2008. Cet anneau de 27 kilomètres est jalonné d'aimants supraconducteurs, associés à des structures accélératrices qui augmentent l'énergie des particules qui y sont propulsées.

Dans l'accélérateur, deux faisceaux de particules de haute énergie circulent à une vitesse proche de celle de la lumière avant d'entrer en collision. Les faisceaux se déplacent dans des directions opposées, dans des tubes distincts placés sous ultravide. Un puissant champ magnétique généré par des électroaimants supraconducteurs les guide tout au long de leur parcours dans l'accélérateur. Ces aimants sont composés de bobines d'un câble électrique spécial qui, parce qu'il est à l'état supraconducteur, conduit l'électricité sans la moindre résistance ni perte d'énergie. Le secret derrière cette performance ? Les aimants sont maintenus à moins 271.3 °C, une température plus basse que celle de l'espace intersidéral. Aussi une grande partie de l'accélérateur est-elle reliée à un système de distribution d'hélium liquide, qui refroidit les aimants, et alimentée par d'autres services.

Plus d'information: <https://home.cern/fr>.

Chapitre 6

La gravité selon Newton

Après 2000 ans de réflexions sur la gravité, nous avons une bonne compréhension du phénomène, mais encore incomplète. Cette compréhension vient de plusieurs perspectives théoriques différentes. Nous avons d'abord la théorie Newtonienne, fiable, pratique et simple. Nous disposons aujourd'hui de la Théorie de la Relativité Générale d'Einstein, qui lie la gravité à la structure de l'espace-temps. La théorie de Newton en est une approximation et la Relativité Générale la contient et la dépasse. Elle permet d'analyser les phénomènes à l'échelle cosmique, mais la formulation d'Einstein est hautement mathématique et pratiquement inutile pour la plupart des phénomènes à l'échelle terrestre. Pourtant, cette théorie aussi est incomplète.

Dans la suite on se concentre sur la théorie newtonienne, et comment elle s'applique sur Terre et au système solaire.

Contenu

6.1	La loi de la gravitation universelle	96
6.2	La force cosmique	100

6.1 La loi de la gravitation universelle

La loi classique de la gravitation universelle fut formulée par Isaac Newton en 1685 sur la base des connaissances expérimentales de son temps. Elle énonce que le module de la force gravitationnelle F_G entre deux corps de masse m et M distants d'une distance r est:

$$F_G = G \frac{mM}{r^2} \tag{6.1}$$

La distance r est mesurée entre les centres de masse des deux objets.

La force F_G est une force attractive qui agit sur toute forme de matière, partout dans l'univers. Elle est dirigée le long de la ligne reliant les centres de masse de deux corps en interaction. La constante de proportionnalité est la **constante de gravitation** universelle G .

La Terre nous attire vers le bas avec une force gravitationnelle appelée **poids**. Elle attire les pommes, les rochers et l'air, en les dotant d'un poids. Mais en retour, ces objets attirent gravitationnellement la Terre avec une force opposée; c'est donc une interaction de paire.

Confirmation de la loi en $1/r^2$ par Newton

Hooke tenta en vain d'établir expérimentalement la loi de distance en déterminant la petite variation du poids d'un objet avec l'altitude: Dans ce but, il compara le poids d'un objet mesuré au fond d'un puits et sur la tour de l'abbaye de Westminster. Mais ces mesures n'étaient pas pleinement satisfaisantes.

Newton a fait la première vérification de la loi en $1/r^2$ vers 1660, quand il était un jeune homme de 24 ans. Comme il le prétendit, il "compara la force nécessaire pour maintenir la Lune sur son orbite avec la force de gravité à la surface de la Terre et il prouva qu'elles correspondaient assez joliment".

Newton compara la gravitation à la surface de la Terre à une distance $r_T = 6.37 \times 10^6$ m de son centre, et celle mesurée au centre de la Lune à une distance $d_L \approx 3.84 \times 10^8$ m du centre de la Terre.

La valeur de l'accélération centripète ressentie par la Lune est facilement déterminée en utilisant la relation $a_c = v^2/d_L$. La vitesse orbitale lunaire, v , correspond au parcours d'une révolution, $\Delta s = 2\pi d_L$, divisé par la période, $\Delta t = 27.32 j = 2.36 \times 10^5 s$. Cela donne une vitesse $v = 1.02$ km/s et une accélération $a_c = v^2/d_L = 0.0027$ m/s².

Ensuite, Newton compara cette valeur avec l'accélération, 9.81 m/s², à la surface de la Terre. Supposant que la force gravitationnelle varie avec la distance au centre de la planète comme $1/r^2$, l'accélération résultante varie de la même façon car $F = ma$. Donc, $g \sim 1/r^2$.

Soit g_T l'accélération gravitationnelle sur la surface de la Terre. La Lune est à une distance égale à $d_L/r_T = 60.33$ fois le rayon terrestre. La Lune (et tout objet qui se trouve à cette distance) doit subir une accélération gravitationnelle g_L donnée par les relations suivantes:

$$g \sim 1/r^2 \Rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{r_T^2}{d_L^2} = \frac{1}{(d_L/r_T)^2} \Rightarrow g_L = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{60.33^2} = 0.0027 \text{ m/s}^2$$

Ainsi, l'accélération centripète de la Lune est égale à l'accélération gravitationnelle, due à la Terre à cette altitude: $a_c = g_L$. Ceci confirme la loi de la distance $1/r^2$.

La dépendance de la masse

Le fait que la force gravitationnelle soit proportionnelle à la masse peut être déduit du fait que sur Terre tous les objets tombent avec la même accélération. Le poids d'un objet est la force exercée sur cet objet par tous les autres corps dans l'univers. En raison de la loi en $1/r^2$, cette force est dominée par la seule attraction de la Terre à proximité de la Terre.

La deuxième loi de Newton appliquée à la chute libre s'écrit $F = mg$ et l'accélération $g = F/m$ est indépendante de m . Alors:

$$F \propto m \text{ combiné avec } F \propto \frac{1}{r^2} \text{ implique } F \propto \frac{m}{r^2}$$

La troisième loi de Newton dit que l'attraction gravitationnelle est une interaction, une paire de forces égales et opposées agissant sur les deux objets. Si la Terre attire l'objet vers le bas, l'objet attire la Terre vers le haut avec la même force.

Considérons deux masses m et M en interaction. Comme la force de gravité est proportionnelle à la masse, nous concluons que $F_G \propto m$ et $F_G \propto M$. Comme les forces sur les deux objets ont la même intensité, il faut que:

$$F \propto \frac{mM}{r^2}, \text{ autrement écrit : } F = G \frac{mM}{r^2}$$

La constante de proportionnalité est la constante de gravitation universelle G .

La constante de gravitation

À proximité de la Terre, le poids est donné par $F = mg$. Le poids résulte de l'interaction gravitationnelle $F = m \frac{GM_T}{r_T^2}$, d'où $g = \frac{GM_T}{r_T^2}$. Cette équation relie l'accélération gravitationnelle terrestre, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ à la constante de gravitation universelle $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, via la masse de la Terre $M_T = 5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$ et le rayon de la Terre $r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$.

La première mesure directe de la constante de gravitation universelle G fut réalisée par **Cavendish** en 1798 en utilisant une balance de torsion: On approche deux grosses sphères de plomb de deux petites sphères montées sur un pendule de torsion. Ces dernières se déplacent jusqu'à ce que la torsion du fil vertical équilibre le couple gravitationnel. Le petit angle de rotation est mesuré en observant la réflexion d'un rayon lumineux par un petit miroir monté sur le fil de torsion. L'angle de rotation du fil est proportionnel au couple. Ayant déjà déterminé auparavant cette constante (de torsion) du fil et en mesurant l'angle de rotation produit par le couple gravitationnel, Cavendish put déterminer la force gravitationnelle F_G . Connaissant m , M , r et F , il put calculer la constante G . La valeur actuellement acceptée est:

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Cavendish obtint une valeur, équivalente dans nos unités à $6.75 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Parmi toutes les constantes fondamentales que nous rencontrerons, la constante G est celle qui est connue avec le moins de précision.

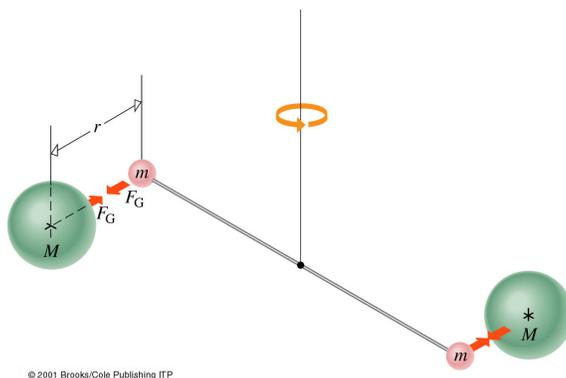


Figure 6.1: La balance de torsion de Cavendish pour déterminer G . Attirées gravitationnellement par les grandes boules, les deux petites boules font tordre le fil.

Exemple 6.1.1. Pour se faire une idée de l'intensité de l'attraction gravitationnelle, calculons la force gravitationnelle entre deux petites sphères homogènes de masse $m = 100 \text{ kg}$ dont les centres sont séparés de 1.00 m .

Solution. Selon la loi de la gravitation universelle, la force est:

$$F = G \frac{mM}{r^2} = (6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}) \frac{(100 \text{ kg})(100 \text{ kg})}{(1.0 \text{ m})^2} = 6.67 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Cette force équivaut au poids d'un bébé puce. Cela n'a rien d'étonnant : nous ne nous sentons pas attirés gravitationnellement les uns vers les autres.

La loi en $1/r^2$ dans une Terre imparfaite en rotation

La Terre n'est pas exactement sphérique et elle n'est pas homogène. En plus des petites irrégularités du relief, la planète est légèrement aplatie aux pôles, avec un petit renflement au nord qui lui donne un aspect de poire. A l'équateur, son rayon r_T est environ 21.5 km plus grand qu'aux pôles. Près de la Terre, l'écart à la loi idéale $1/r^2$ est faible, $\sim 0.1\%$, mais suffisant pour dévier les satellites artificiels. Plus loin, à des distances de l'ordre de celle de la Lune, la déviation de la loi de distance $1/r^2$ n'est que d'environ 0.00003%. En général, deux corps, quelles que soient leurs formes et leurs distributions de masse, interagissent avec une force qui s'approche de la forme en $1/r^2$ lorsque leur distance est suffisamment grande comparée à leur taille.

La forme aplatie de la planète et la rotation sur elle-même produisent une variation de la valeur de g mesurée à la surface de la Terre. Ces deux effets font varier g d'environ 0.5% lorsqu'on se déplace du pôle à l'équateur.

Pour déterminer l'effet de la rotation, considérons une masse m suspendue à un dynamomètre à l'équateur. Elle subit deux forces externes: son interaction avec la Terre F_G et la force du dynamomètre F_D égale en module au poids mesuré $F_W = mg$.

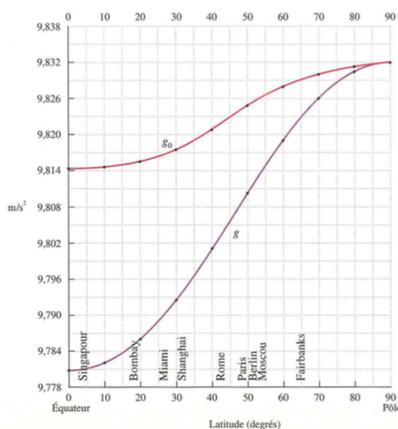
La masse est entraînée dans la rotation de la Terre et doit éprouver une force centripète, telle que:

$$\sum F = ma_c = F_G - F_D = \frac{GmM_T}{r_T^2} - mg \Rightarrow g = \frac{GM_T}{r_T^2} - a_c = g_0 - a_c$$

où g_0 est l'accélération gravitationnelle absolue, c'est-à-dire due à la gravité de la Terre sans rotation (représentant le "vrai" poids d'un corps, dû seulement à son interaction gravitationnelle avec la Terre).

Aux pôles, $a_c = 0$, alors $g = g_0$ et le poids mesuré est égal au vrai poids mg_0 . À l'équateur, $a_c = 0.0339 \text{ m/s}^2$ et g est réduit d'autant. La valeur absolue de l'accélération gravitationnelle varie continuellement de $g_0 = 9.814 \text{ m/s}^2$ à 9.832 m/s^2 de l'équateur aux pôles. La valeur observée de g varie entre $g_0 = 9.780 \text{ m/s}^2$ à 9.832 m/s^2 . La rotation produit donc plus des 2/3 de la variation observée de g (figure 6.2).

Figure 6.2: Représentation graphique de la variation de la valeur mesurée (g) et de la valeur absolue (g_0) de l'accélération de la pesanteur sur la surface de la Terre. La première inclut l'effet de la rotation de la Terre et la seconde ne l'inclut pas.



6.2 La force cosmique

La gravitation est la force la plus faible, mais elle domine l'évolution de l'univers et le mouvement des astres et des planètes.

Le premier à avoir étudié le mouvement des planètes du système Solaire sans préjugés sur leur forme était Johannes Kepler (1571-1630). Pour son étude, Kepler se base sur les données collectées par Tycho Brahe (1546-1601) qui lui permettent de formuler ses trois célèbres lois du mouvement des planètes. Ces lois forment les bases dont se servira Newton pour établir sa théorie de la gravité.

Les lois du mouvement des planètes

Contrairement à presque tous ses prédécesseurs qui martelaient que les trajectoires planétaires devaient avoir la perfection mystique du cercle, la première loi de Kepler énonce que *les planètes décrivent des orbites elliptiques avec le Soleil à l'un des foyers*. Les orbites planétaires sont presque circulaires, et la petite différence avec un cercle est cruciale: la vitesse le long de l'orbite n'est pas uniforme.

La deuxième loi de Kepler énonce que *la planète se déplace autour du soleil de telle manière que le rayon qui la relie au soleil balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux* (figure 6.2). Par exemple, la ligne Terre-Soleil balaye toujours la même surface par unité de temps, que ce soit en juillet ou en janvier. Lorsque la planète est proche du Soleil la vitesse et l'arc sont grands: le secteur balayé en une semaine est court et large. Loin du Soleil, la vitesse est plus faible et le secteur balayé est étroit. Mais il est long et l'aire balayée en une semaine est la même.

La physique de la gravitation et les lois de Newton nous permettent de mieux comprendre la seconde loi de Kepler. La planète, attirée par le Soleil, se rapproche du Soleil et accélère. Ainsi, la force gravitationnelle augmente en même temps que la planète accélère; la planète atteint sa vitesse maximale lorsqu'elle est au point le plus proche, la **périhélie**. En s'éloignant du Soleil la force gravitationnelle s'affaiblit graduellement pendant que la planète décélère; la planète atteint sa vitesse minimale au point le plus éloigné, l'**aphélie**.

La troisième loi de Kepler énonce que *le rapport du cube de la distance moyenne au Soleil au carré de la période est le même pour toutes les planètes du système Solaire*. En bref:

$$\frac{r_{SP}^3}{T_P^2} = C_S \quad (6.2)$$

où T_P est la période orbitale de la planète et r_{SP} sa distance moyenne au Soleil. C_S est une constante caractéristique du Soleil et dont la valeur numérique dépend évidemment des unités utilisées. Le fait que toutes les planètes partagent la même constante C_S suggère qu'elles sont toutes gouvernées par le même mécanisme sous-jacent, la gravité.

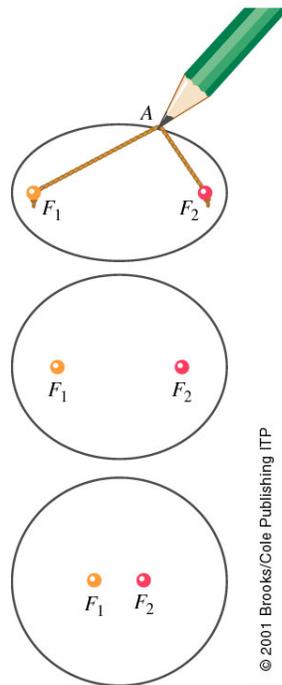


Figure 6.3: L'ellipse. En tout point A d'une ellipse, la somme des distances de ce point aux deux foyers est une constante. Imaginez un fil dont les extrémités sont fixées en F_1 et F_2 . La pointe du crayon tenant le fil tendu trace une ellipse.

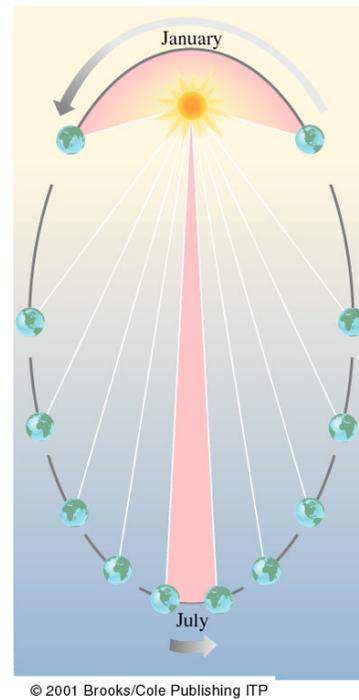


Figure 6.4: La ligne qui joint le Soleil à la Terre, balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux. Chaque segment correspond à un mois et ils ont tous la même superficie. La Terre atteint son périhélie en janvier; elle a alors sa vitesse maximum.

Lois de Kepler et gravitation universelle

Les lois de Kepler peuvent bien entendu être dérivées de la loi de gravitation universelle si on prend le Soleil comme référence immobile vers laquelle chaque planète est attirée. L'orbite sera elliptique si et seulement si la force centripète varie comme l'inverse du carré de la distance au centre de la force, qui coïncide alors avec l'un des foyers.

La force centrale requise est la gravité, qui doit alors varier avec $1/r^2$. Des orbites fermées et ouvertes sont possibles sous l'influence d'une force centrale en $1/r^2$. Tout objet en interaction gravitationnelle avec un autre corps "immobile" (étoile) peut se déplacer sur une trajectoire circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique. Exemple: les comètes (Comète de Haley).

Une planète qui décrit un cercle de rayon r_{SP} autour du Soleil, doit être sous l'influence d'une force centripète:

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{r_{SP}}$$

Si la gravité est à l'origine de cette force ($F_c = F_G$), alors:

$$F_G = \frac{GmM_S}{r_{SP}^2} = \frac{mv^2}{r_{SP}} = F_c$$

où M_S est la masse du corps central. Comme $2\pi r_{SP}$ est le périmètre de la circonférence, en divisant par la période, on obtient la vitesse $v = (2\pi r_{SP}/T)$. En substituant cette valeur de v dans l'équation précédente, nous trouvons la relation indépendante de m :

$$\frac{GM_S}{r_{SP}^2} = \frac{4\pi^2 r_{SP}^2}{T^2 r_{SP}}$$

d'où la relation:

$$\frac{r_{SP}^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$$

qui n'est autre que la troisième loi de Kepler, où le second membre doit être identifiée à la constante C_S . Notez que *seule la masse du corps central apparaît dans l'expression!* La même loi s'applique à la Lune (avec la masse de la Terre substituée) ou à tout satellite artificiel.

Orbites des satellites

Tout projectile lancé horizontalement peut être assimilé à une sorte de satellite de la Terre. Une balle lancée du haut d'un immeuble décrit une orbite restreinte qui percute la Terre non loin de son point de lancement. Pour une Terre plate, cette orbite serait parabolique. Sur une Terre sphérique, une balle lancée horizontalement dans le vide décrit un arc d'ellipse dont l'un des foyers est le centre de la planète. Toute la masse de la Terre agit comme si elle était concentrée en son centre et le projectile essaie de décrire une ellipse autour de ce point. En pratique, le frottement de l'air freine le mouvement et la surface de la Terre fait obstacle.

Plus la vitesse de lancement de la balle lancée augmente, plus l'ellipse devient aplatie et plus la balle ira loin. En augmentant la vitesse jusqu'à une valeur bien précise, la balle plane au-dessus du sol à une altitude constante et décrit un tour complet sur un cercle. Si on augmente encore la vitesse, l'orbite redevient elliptique et plus grande. Pour une deuxième vitesse critique plus élevée, l'ellipse se transforme en parabole. Si la vitesse augmente encore la trajectoire devient une hyperbole ouverte et la balle ne revient jamais à son point de départ.

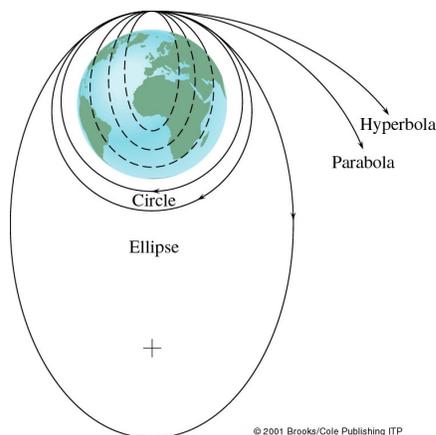
Un objet de masse m à une distance r du centre d'un grand corps sphérique de masse M , décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse orbitale tangentielle v_o , si la force gravitationnelle est exactement égale à la force centripète, donc:

$$\sum F = ma_c \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_o^2}{r} \Rightarrow$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (6.3)$$

Tout satellite, quelle que soit sa masse (du moment que $M \gg m$) décrit une orbite circulaire de rayon r , s'il est lancé avec une vitesse donnée par l'équation 6.3, indépendamment de toute rotation du corps central.

Figure 6.5: Orbites de projectiles tirés horizontalement à partir d'un point proche de la surface de la Terre à diverses vitesses. L'orbite circulaire correspond à une vitesse de lancement $v_{hor} = v_o$. Si $v_{hor} < v_o$, l'orbite est elliptique. Si $v_{hor} > v_o$ mais $v_{hor} < \sqrt{2}v_o$, le projectile monte vers une orbite elliptique plus grande. Si $v_{hor} = \sqrt{2}v_o$ l'orbite est parabolique et à vitesse supérieure, est hyperbolique.



Exemple 6.2.1. L'orbite géostationnaire est l'une des orbites la plus intéressante. Le satellite est lancé sur une orbite dans le plan de l'équateur et fait un tour en exactement un jour: il est synchronisé avec la rotation de la Terre et paraît immobile dans le ciel. Calculez l'altitude au dessus de la Terre et la vitesse de lancement d'un tel satellite.

Solution. Données: $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg et la grandeur la plus importante, $T = 24$ h. À déterminer: l'altitude h . Rappelons que $h = r - R_T$, la différence entre la distance du satellite au centre de la Terre et le rayon de la Terre. Écrivant que $F_c = F_G$ et utilisant $v_o = 2\pi r/T$, nous obtenons:

$$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} \Rightarrow r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

soit $r = 42.25 \times 10^6$ m et $h = r - R_T = 3.59 \times 10^7$ m = 36'000 km $\approx 5.6 R_T$. La vitesse s'obtient en tenant compte du fait qu'il faut $T = 24$ h pour effectuer un tour de longueur $2\pi r$: $v_o = 3.1 \times 10^3$ m/s.

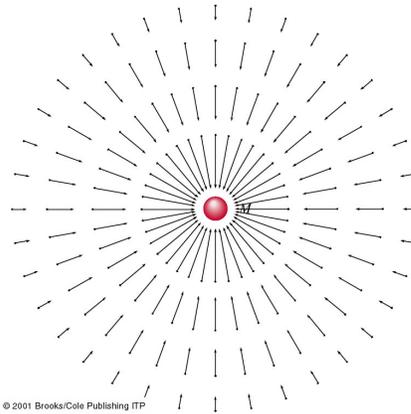
Le champ gravitationnel

Une pomme qui se détache de la branche d'un arbre tombe vers le sol sous l'influence de la gravité. Mais comment la pomme perçoit-elle la gravité? Comment connaît-elle la direction vers le bas et l'intensité avec laquelle elle est attirée?

A chaque particule de matière est associée un champ d'influence, qui l'entoure. C'est ce champ qui transporte l'interaction entre deux particules éloignées. Un champ de force existe dans une région de l'espace si un objet approprié, placé en tout point de cette région, subit une force. Ainsi nous pouvons imaginer un champ de force gravitationnel entourant tout objet de masse M . Supposons que nous suspendions une petite masse m à un dynamomètre et que nous faisons des mesures de F_G en le déplaçant d'un point à un autre.

On peut définir un champ gravitationnel en normalisant la force à la masse "test" m , c'est-à-dire en formant: $\vec{g} = \vec{F}_G/m$.

Figure 6.6: Le champ gravitationnel d'une masse M . En chaque point entourant M , nous traçons le vecteur correspondant à la force qui agit sur une masse-test m , divisée par m .



Chapitre 7

La matière & Les fluides

Dans notre étude de l’univers physique, un de nos sujets d’intérêt est la matière. La question “qu’est-ce que c’est la matière” était une des questions qui ont toujours intéressées l’humanité dès l’antiquité.

Ce chapitre introduit l’exploration de la matière. Dans les chapitres suivants nous étudierons ses propriétés mécaniques, thermiques, électriques, magnétiques et optiques. Nous commençons par un aperçu du paysage atomique. Nous explorons ensuite les différents états de la matière et leurs interactions avec l’environnement: les liquides et les gaz, appelés aussi “fluides”; et les solides.¹

Contenu

7.1	Les atomes	105
7.2	États de la matière	110
7.3	Hydrostatique	112
7.3.1	Pression hydrostatique	112
7.3.2	Variation de la pression avec la profondeur	113
7.3.3	Pression atmosphérique	115
7.3.4	Principe de Pascal	117
7.3.5	Les machines hydrauliques	118
7.3.6	Poussée d’Archimède	119
7.3.7	Tension superficielle	120
7.4	Hydrodynamique	120
7.4.1	Écoulement d’un fluide	121
7.4.2	Équation de continuité	122
7.4.3	Équation de Bernoulli	123
7.4.4	Tourbillons	127
7.4.5	Les fluides réels: la viscosité	127

7.1 Les atomes

Qu’est-ce que c’est la matière?

A ce jour (2017), on a identifié 118 éléments de base (oxygène, fer, hydrogène, etc...), dont 92 existent naturellement sur Terre (figure 7.1).

¹Le plasma est le troisième état de la matière, mais on n’en parle pas dans ce cours.

IUPAC Periodic Table of the Elements

Key:																	
atomic number		Symbol		name		conventional atomic weight		standard atomic weight									
1	H	hydrogen	1.008	1.0081	2	He	helium	4.0026	4.0026								
3	Li	lithium	6.94	6.938, 6.997	4	Be	beryllium	9.0122	9.0122								
11	Na	sodium	22.990	22.989, 22.990	12	Mg	magnesium	24.304	24.304, 24.307								
19	K	potassium	39.098	39.098	20	Ca	calcium	40.078(4)	40.078(4)								
27	Rb	rubidium	85.468	85.468	38	Sr	strontium	87.62	87.62								
37	Rb	rubidium	85.468	85.468	39	Y	yttrium	88.906	88.906								
55	Cs	caesium	132.91	132.91	56	Ba	barium	137.33	137.33								
87	Fr	francium	223	223	88-103	actinoids											
13	B	boron	10.81	10.806, 10.821	14	C	carbon	12.011	12.009, 12.012								
15	N	nitrogen	14.007	14.006, 14.008	16	O	oxygen	15.999	15.999, 16.000								
17	F	fluorine	18.998	18.998	18	Ne	neon	20.180	20.180								
13	Al	aluminium	26.982	26.982	14	Si	silicon	28.086	28.086, 28.089								
15	P	phosphorus	30.974	30.974	16	S	sulfur	32.06	32.06, 32.076								
17	Cl	chlorine	35.45	35.446, 35.457	18	Ar	argon	39.948	39.948								
29	Cu	copper	63.546(3)	63.546(3)	30	Zn	zinc	65.38(2)	65.38(2)								
31	Ga	gallium	69.723	69.723	32	Ge	germanium	72.630(8)	72.630(8)								
33	As	arsenic	74.922	74.922	34	Se	selenium	78.971(8)	78.971(8)								
35	Br	bromine	79.904	79.904	36	Kr	krypton	83.798(2)	83.798(2)								
47	Ag	silver	107.8682	107.8682	48	Cd	cadmium	112.411	112.411								
51	In	indium	114.818	114.818	52	Sn	tin	118.710	118.710								
55	Sb	antimony	121.757	121.757	56	Te	tellurium	127.603(3)	127.603(3)								
63	Bi	bismuth	208.980	208.980	64	Po	polonium	209	209								
75	Re	rhenium	186.207	186.207	76	Os	osmium	190.23(3)	190.23(3)								
77	Ir	iridium	192.22	192.22	78	Pt	platinum	195.084	195.084								
80	Au	gold	196.96657	196.96657	81	Hg	mercury	200.59	200.59, 200.59								
82	Pb	lead	207.2	207.2	83	Bi	bismuth	208.980	208.980								
84	Po	polonium	209	209	85	At	astatine	210	210								
86	Rn	radon	222	222	87	Fr	francium	223	223								
88	Ra	radium	226	226	89-103	actinoids											
91	Pa	protactinium	231.04	231.04	92	U	uranium	238.03	238.03								
93	Np	neptunium	237	237	94	Pu	plutonium	244	244								
95	Am	americium	243	243	96	Cm	curium	247	247								
97	Bk	berkelium	247	247	98	Cf	californium	251	251								
99	Es	einsteinium	252	252	100	Fm	fermium	257	257								
101	Md	mendeleevium	258	258	102	No	nobelium	259	259								
103	Lr	lawrencium	260	260	104	Rf	rutherfordium	261	261								
105	Db	dundium	262	262	106	Sg	seaborgium	263	263								
107	Bh	bohrium	264	264	108	Hs	hassium	265	265								
109	Mt	meitnerium	266	266	110	Ds	darmstadtium	267	267								
111	Rg	roentgenium	268	268	112	Cn	copernicium	269	269								
113	Nh	nihonium	270	270	114	Fl	flerovium	270	270								
115	Mc	moscovium	270	270	116	Lv	livermorium	270	270								
117	Ts	tennessine	270	270	118	Og	oganeson	270	270								

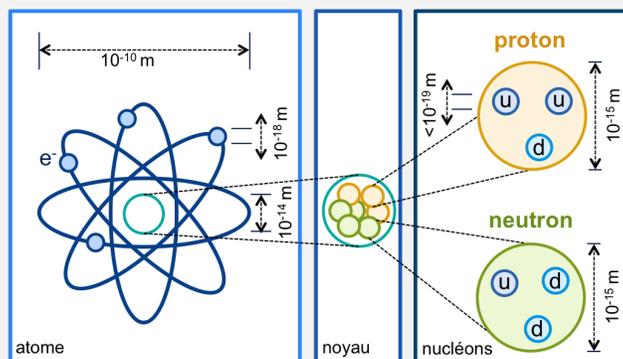


For notes and updates to this table, see www.iupac.org. This version is dated 28 November 2016. Copyright © 2016 IUPAC, the International Union of Pure and Applied Chemistry.

Figure 7.1: La dernière version du tableau périodique des éléments (28 Novembre 2016) a inclu les élément récemment ajoutés (113, 115, 117 et 118) ainsi que leurs noms et symboles. Plus d'information: <https://iupac.org/what-we-do/periodic-table-of-elements/>.

Un échantillon d'un élément donné est composé d'entités identiques sub-microscopiques, appelées **atomes**, chacun étant le plus petit échantillon représentatif de l'élément. Lorsque les éléments se combinent, on obtient des **corps composés**. L'entité fondamentale d'un corps composé, c'est-à-dire celle qui a les propriétés chimiques du composé, est une **molécule**, elle-même composée d'atomes (par exemple, $NaCl$, H_2O). Certains gaz comme l'Hélium (He) et l'Argon (Ar) sont monoatomiques (leurs molécules sont des atomes individuels), tandis que l'oxygène et l'azote sont diatomiques (O_2 , N_2 – chaque molécule est formée de deux atomes).

Les constituants de l'atome On connaît aujourd'hui que l'atome n'est pas une particule élémentaire. Il est constitué d'un noyau chargé positivement, autour duquel se trouvent des électrons, chargés négativement. Le noyau est constitué de protons et de neutrons, qui sont faits de quarks, d'antiquarks et de gluons. On considère actuellement que des particules comme l'électron ainsi que les quarks et les gluons sont des particules élémentaires. Dans les collisionneurs hadroniques (tel que le LHC au CERN) on étudie leurs propriétés ainsi que leurs interactions. La figure suivante montre une représentation *simplifiée* de l'atome et de ces constituants.



L'unité de masse atomique

La masse des atomes et des molécules s'exprime souvent en unité de masse atomique: **uma** ou **u**. Par définition : **12 u** correspondent très précisément à la masse d'un atome neutre de $^{12}_6C$. Exprimé en grammes: $1 \text{ uma} = 1.6605387 \times 10^{-24} \text{ g}$. L'atome d'hydrogène (1_1H) a une masse de 1.007825 u. L'atome d'oxygène ($^{16}_8O$) a une masse de 15.994915 u. La masse *moléculaire* est la somme des masses des atomes constituant la molécule; par exemple: CO_2 a une masse de $12 \text{ u} + 2 \times 15.994915 \text{ u} \approx 44 \text{ u}$.

Le nombre d'Avogadro

En 1811, Amedeo Avogadro, fit deux propositions brillantes (forgeant à l'occasion le mot "molécule"): (1) Les éléments gazeux peuvent exister sous forme moléculaire. (2) Des volumes égaux de gaz moléculaires (dans les mêmes conditions de températures et de pressions) contiennent le même nombre de molécules.

L'hydrogène moléculaire a une masse de $\sim 2 \text{ u}$. Supposons qu'on introduise 2 g de gaz d'hydrogène dans un ballon extensible, qui peut être maintenu à la température normale (0°C) et à la pression normale (1 atm), dites conditions normales de température et de pression (CNTP). Nous constatons que le gaz occupe un volume de 22.4 litres. Selon Avogadro, 22.4 litres d'oxygène ou de tout autre gaz contiennent le même nombre de molécules. Chaque molécule H_2 a une masse de $2 \times 1.007825 \text{ u} \approx 2 \text{ u}$ et chaque molécule O_2 a une masse de $2 \times 15.994915 \text{ u} \approx 32 \text{ u}$. Par conséquent, 22.4 litres d'oxygène devraient avoir une masse 16 fois plus grande que 22.4 litres d'hydrogène. Cela s'avère exact. 22.4 litres de tout gaz aux CNTP ont une masse qui, exprimée en grammes, a la même valeur numérique que la masse moléculaire du gaz. Cette mesure est appelée une **moleculogramme** ou simplement une **mole** du gaz. Par exemple, une molécule de CO_2 a une masse de $12 + 2 \times 16 = 44 \text{ u}$; donc 1 mole de CO_2 a une masse de 44 grammes et, comme gaz aux CNTP, elle occupe 22.4 litres.

Le nombre de molécules dans une mole est le **nombre d'Avogadro** N_A , bien que Avogadro n'ait eu aucune idée de sa valeur numérique. La mesure actuelle de ce nombre est:

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ molécules / mole}$$

Une mole d'une substance que ce soit des ions, des atomes, des molécules, ou même un mélange de différentes particules, contient toujours N_A constituants élémentaires.

Exemple 7.1.1. Déterminer (a) la masse d'un atome de carbone en kilogrammes et (b) l'équivalent d'une unité de masse atomique en kilogrammes.

Solution. Données: la masse d'un atome de carbone est 12 u et une mole ou 12 g de carbone contient N_A atomes. À trouver: la masse d'un atome de carbone en kg et l'équivalent de 1 u en kg.

(a) La masse d'un atome de carbone est la masse d'une mole de carbone divisée par le nombre d'atomes dans une mole. Donc:

$$m_C = \frac{12 \text{ g}}{6.022 \times 10^{23}} = 1.993 \times 10^{-23} \text{ g}$$

soit $m_C = 1.993 \times 10^{-26} \text{ kg}$.

(b) Comme $12 \text{ u} = m_C = 1.993 \times 10^{-26} \text{ kg}$, on a:

$$1 \text{ u} = \frac{1.993 \times 10^{-26} \text{ kg}}{12} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Masse volumique et densité

La **masse volumique** s'exprime en kilogramme/m³:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Quelques exemples des masses volumiques ρ de certains matériaux sont listé sur le tableau à coté.

La **densité** est le rapport entre la masse volumique d'une substance et celle de l'eau à 4°C. C'est une valeur absolue, sans dimension, ni unité.

Materiau	ρ (kg/m ³)
Air 0°C / 1 atm	1.29
Air 20°C / 1 atm	1.21
Air 0°C / 50 atm	6.5
CO ₂ 0°C / 1 atm	1.98
Hélium 0°C / 1 atm	0.179
Eau (vapeur)	0.598
Eau 4°C / 1 atm	1000
Eau 4°C / 50 atm	1002
Eau de mer	1025
Mercure	13600
Or	19300
Terre (noyau)	9500
Soleil (au centre)	1.6×10^5
Noyau atomique	10^{17}

Comme $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ en CNTP, la densité de n'importe quelle substance équivaut à l'expression numérique de sa masse volumique en g/cm³.

$$1\text{g/cm}^3 = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ kg}}{(1 \times 10^{-2}\text{m})^3} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Ainsi, la densité du mercure est $13600/1000 = 13.6$.

Exemple 7.1.2. Soit une sphère pleine en or de 10 cm de diamètre (masse atomique = 197 u). La masse volumique de l'or est $19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Sa densité est de 19.3. Déterminez: (a) la masse de la sphère et (b) le nombre d'atomes d'or contenus dans la sphère.

Solution.

(a) Le volume de la sphère est:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (0.05)^3 \text{ m}^3 = 0.542 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

La masse volumique permet de trouver sa masse:

$$m = \rho V = \dots = 10.1 \text{ kg} = 10100 \text{ g}$$

(b) 1 mole d'or a une masse de 197 g. Cette sphère correspond donc à $10100 \text{ g}/197 \text{ g} = 51.27 \text{ mol}$. Le nombre d'atomes N est égal à:

$$N = N_A \times N_{\text{moles}} = (6.022 \times 10^{23} \text{ atomes/mol}) \times (51.27 \text{ mol}) \Rightarrow N = 3.1 \times 10^{25} \text{ atomes.}$$

Taille des atomes L'atome a une structure complexe. C'est un ensemble de particules en mouvement et en interaction. Il est constitué d'un noyau très petit et très dense entouré par un nuage d'électrons et il est électriquement neutre. Le noyau est une "boule" d'un diamètre 10^4 à 10^5 fois plus petit que celui de l'atome. Constituée de protons chargés positivement et de neutrons neutres qui se déplacent rapidement, liés par la force nucléaire.

Vers la fin des années 1880, plusieurs expériences ont déterminé grossièrement la taille des atomes et des molécules. Une des plus faciles à analyser consiste à prendre un volume connu d'huile et de le laisser s'étaler sur la surface de l'eau. Il y a de bonnes raisons pour supposer que la couche s'amincit jusqu'à l'épaisseur d'une molécule. En mesurant la superficie de la couche, nous pouvons déterminer son épaisseur et donc le diamètre de la molécule. Aujourd'hui, nous savons que les atomes de toutes sortes sont presque de même taille, de diamètre variant grossièrement entre $1 \times 10^{-10} \text{ m}$ à $3 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Nous pouvons obtenir une estimation des dimensions des atomes et des molécules dans un solide ou un liquide, en négligeant l'espace vide entre eux, et en supposant qu'ils 'remplissent' tout le volume du corps. En fait ce n'est pas exactement le cas; mais il ne peut pas y avoir un grand espace interatomique, car ni les solides ni les liquides ne peuvent être notablement comprimés. Si nous supposons que chaque atome est un petit cube de volume L^3 , le volume V d'une mole serait alors $N_A L^3$. Si la masse de cette mole est M_m , la masse volumique est:

$$\rho = \frac{M_m}{V} = \frac{M_m}{N_A L^3}$$

d'où $L = \left(\frac{M_m}{N_A \rho}\right)^{1/3}$. La taille d'une molécule d'eau, par exemple, serait alors:

$$L = \left(\frac{18 \text{ g}}{(6.022 \times 10^{23} \text{ atomes/mole})(1.0 \text{ g/cm}^3)}\right)^{1/3}$$

soit $3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ou 0.3 nm .

7.2 États de la matière

Toute substance peut en principe exister dans quatre états physiques distincts. L'état du système est déterminé par une compétition entre l'énergie de cohésion et l'énergie thermique.

- **Le solide** conserve la forme et le volume.
- **Le liquide** coule et prend la forme du récipient dans lequel il est placé, mais conserve un volume constant (si incompressible).
- **Le gaz**: coule et se disperse prenant la forme et occupant tout le volume du récipient.
- **Le plasma** est un fluide conducteur, un mélange d'atomes, ions et électrons, crée si certains atomes d'un gaz sont ionisés (c'est à dire des électrons sont enlevés ou ajoutés).

Les solides Les atomes d'un solide sont en mouvement, mais se déplacent avec une très faible amplitude autour de leur position d'équilibre en petites vibrations.

On distingue les types de solides suivants:

- **solide cristallin** (minéraux, tous les métaux et sels): les atomes forment une structure ordonnée à trois dimensions qui se répète dans toutes les directions.
- **solide amorphe** (caoutchouc, résine, plastiques et divers matériaux vitreux): substances composées d'atomes qui ne sont pas disposés d'une façon ordonnée et répétitive (pas de réseau régulier).
- **solide quasi-cristallin** (forme de matière découverte en 1983): les atomes sont disposés dans une configuration ordonnée à trois dimensions mais qui ne se répète pas avec une périodicité régulière.
- **solides composites** tels que le bois, les fibres de verre, les os et les vaisseaux sanguins sont composés de plusieurs matériaux différents liés ensemble.

Les liquides L'eau et les liquides organiques (pétrole, huile etc..) sont les seuls liquides existant en grande quantité dans la nature. Beaucoup de liquides familiers, comme le sang, le vin et les jus de fruits sont essentiellement composés d'eau. L'eau est un solvant et peut contenir de nombreux autres composants chimiques dilués (sels, alcool, colorants, etc).

Le liquide est un état intermédiaire entre la violence aléatoire du gaz et le calme relatif du solide: il faut trouver le bon équilibre entre l'énergie thermique et l'énergie de liaison. L'aptitude à s'écouler est la propriété caractéristique des liquides. Elle varie avec la force de cohésion qui est différente pour chaque substance (acétone, eau, huiles, goudron). La viscosité est la résistance interne (frottement) qui s'oppose au mouvement d'un objet immergé dans un liquide.

Les gaz L'alchimiste van Helmont (~ 1620) a transposé le mot grec *chaos* en flamant, obtenant le mot **gaz**. Un gaz est effectivement un sacré chaos:

- Chaque cm^2 de peau reçoit un flux de 3×10^{23} molécules d'air par seconde puisant leur énergie dans le rayonnement solaire.
- La masse volumique de l'air est 800 fois plus faible que celle de l'eau.
- L'air sous CNTP (0°C et 10^5 Pa) contient $\sim 3 \times 10^{19}$ molécules par cm^3 . La distance moyenne entre ces molécules est 3 nm soit 10 fois la taille de la molécule.
- La vitesse moyenne, sans vent, est 450 m/s (1620 km/h - à partir du théorème d'équipartition). Chaque molécule ne parcourt que 8×10^{-8} m avant d'entrer en collision.

Transformations d'état

Lorsqu'on chauffe un **solide** (e.g. la glace), ses molécules reçoivent de l'énergie cinétique qui se manifeste par un mouvement désordonné (vibration thermique): elles oscillent plus vigoureusement autour de leur position d'équilibre. Le solide fond dès que l'énergie reçue est suffisante pour surmonter les forces intermoléculaires.

A l'état **liquide**, de petits groupements de molécules associées persistent, mais ils se font et se défont au gré des déplacements de l'échantillon. Il y a de l'ordre, mais il est local et changeant. Il subsiste des forces de cohésion intermoléculaires de portée assez longue; mais les molécules ont assez d'énergie pour se mouvoir aisément malgré cette force. Elles restent relativement proches une à l'autre et interagissent sensiblement, mais la liaison puissante et rigide du solide a disparu.

En élevant la température, le liquide se rapproche de son point d'ébullition où les liens entre molécules finissent par céder. L'énergie cinétique thermique aléatoire de certaines molécules dépasse l'énergie potentielle de cohésion; elles s'échappent alors en groupe du liquide. Les agrégats locaux se désintègrent et le liquide s'évapore: il devient un **gaz**.

Les fluides

Nous allons regrouper l'étude des **liquides** et **gaz**, car tous deux sont des substances qui peuvent s'écouler et se conforment aux limites données par le récipient. On les regroupe sous le terme de **fluides**.

L'application des principes de la mécanique newtonienne aux fluides permet de décrire les phénomènes régissant leur comportement. Nous traiterons d'abord les fluides parfaits, c'est-à-dire incompressibles et non-visqueux (l'eau peut être considérée comme telle), puis les fluides réels.

Nous allons étudier des concepts de base de la **statique** et de la **dynamique** des fluides.

7.3 Hydrostatique

7.3.1 Pression hydrostatique

Au lieu de forces ponctuelles, nous considérons des forces qui agissent sur une surface étendue. La pression P est la manifestation d'une force répartie sur une surface et qui agit perpendiculairement à cette surface.

Elle est définie comme le quotient de la force par la surface :

$$P = \frac{F_{\perp}}{A}$$

Les unités SI de P sont $[\text{N}/\text{m}^2]$ ou pascal $[\text{Pa}]$:

$$1 \text{ N}/\text{m}^2 = 1 \text{ Pa}$$

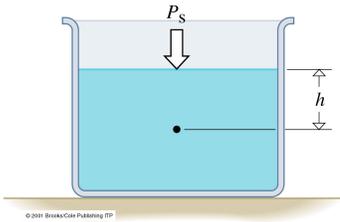
Le bar, multiple du pascal, est une unité de pression courante: $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} = 1000 \text{ mbar}$.²

La pression est une grandeur *scalaire*, ce n'est pas un vecteur: en chaque point, elle a une valeur, mais pas de direction.

Considérons un récipient contenant un liquide au repos (une tasse de thé ou un tonneau de vin, par exemple). Le fluide exerce une force de pression vers l'extérieur sur la base et les parois latérales du récipient: c'est cette force de pression qui fait couler le liquide si le récipient a un trou latéral ou au fond. Les parois du récipient réagissent avec une contre-force. La pression est la même dans toutes les directions en un point précis. La force F exercée par un fluide au repos sur toute surface rigide est toujours perpendiculaire à cette surface (cette force est un vecteur, pas la pression). Il ne peut pas en être autrement: le fluide n'a aucune rigidité et quand il est au repos ne peut exercer sur une surface qu'une force normale.

La pression hydrostatique est une conséquence de la pesanteur. Elle correspond au poids de la colonne de fluide au-dessus d'une surface A donnée.

²Le mot *bar* provient du grec: $\beta\alpha\rho\sigma$ (baros) qui signifie poids.



Considérons maintenant un réservoir ouvert, avec un timbre-poste d'aire A immergé parallèlement à la surface d'un liquide de masse volumique ρ à une profondeur h . La face supérieure du timbre est soumise, de la part du liquide, à une force normale vers le bas égale au poids d'une colonne de fluide de volume $V = Ah$, de masse $m = \rho Ah$ et d'un poids $F_W = mg = \rho Ahg$ au dessus du timbre.

Cette colonne exerce une pression:

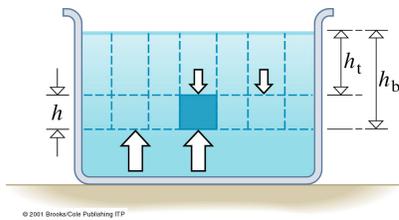
$$P = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{F_W}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg$$

La pression P due au liquide seulement est proportionnelle à la profondeur h et à la masse volumique du fluide ρ .

Exemple 7.3.1. Quelle est la pression (due seulement à l'eau) subie par un nageur à 20 m au-dessous de la surface de l'océan? Pour l'eau de la mer, $\rho = 1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Solution. Données: $h=20 \text{ m}$, $\rho = 1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. À trouver P . Nous trouvons $P = \rho gh = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$. C'est environ deux fois la pression atmosphérique, soit, approximativement, la pression dans les pneus de la voiture. Pour obtenir la pression réelle, il faut ajouter la pression atmosphérique à la surface de l'eau.

7.3.2 Variation de la pression avec la profondeur



Prenons un élément de volume dV de petite hauteur dh immergé à une profondeur h dans un fluide, ayant une surface d'aire A . P est la pression qui agit sur la face supérieure et $P + dP$ celle sur la face inférieure. La pression du fluide sur le volume exerce une force $F = PA$ vers le bas et une force $F = (P + dP)A$ vers le haut. La seule autre force qui agit sur dV est la force de gravitation, dF_W , qui correspond au poids de l'élément de volume:

$$dF_W = dm g = \rho dV g = \rho Adh g = \rho g Adh$$

où ρ est la masse volumique du fluide à la profondeur h . Si le volume choisi est en équilibre: $\sum \vec{F} = 0$, on obtient:

$$PA - (P + dP)A + \rho g Adh = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dh} = +\rho g \quad (7.1)$$

Le signe positif indique que la pression augmente avec la profondeur h .

Cas: ρ constant

Les fluides incompressibles sont caractérisés par ρ constant, i.e. le nombre d'atomes par unité de volume est constant. L'équation 7.1 devient donc

$$\frac{dP}{dh} = \rho g \Rightarrow dP = \rho g dh \Rightarrow \int_{P_b}^{P_t} = \rho g \int_{h_b}^{h_t} dh \Rightarrow P_t - P_b = \rho g(h_t - h_b) \Rightarrow$$

$$P_b = P_t + \rho g(h_b - h_t)$$

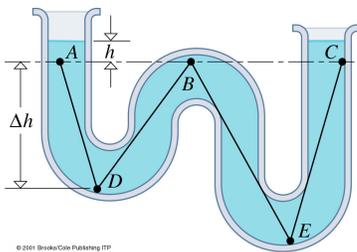
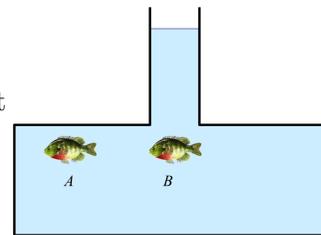
Cette équation dit que si la surface du liquide est soumise à une pression extérieure P_t , celle-ci doit être ajoutée à la pression du fluide $\rho g h_b$. Si P_t désigne la pression atmosphérique P_{atm} et P la pression à la profondeur h :

$$P = \rho g h + P_{atm}$$

P est appelée *pression absolue*, h mesure la profondeur depuis la surface. La pression $P - P_{atm}$ est appelée *pression de jauge* ou *pression manométrique*.

Question pour réfléchir.

Imaginez le récipient à coté. Est-ce qu'un poisson ressent une pression différente en B comparé à la pression en A ?

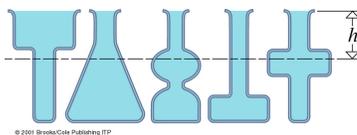


La pression est la même en tout point situé à une même profondeur h d'un fluide donné au repos. Par exemple, considérons le récipient à coté. On aura:

$$P_A = P_{atm} + \rho g h; \quad P_D = P_A + \rho g \Delta h; \quad P_B = P_D - \rho g \Delta h = P_A$$

Et donc:

$$P_A = P_B = P_C = P_{atm} + \rho g h \quad \text{et} \quad P_A < P_D < P_E$$



La pression à une profondeur donnée est indépendante de la forme du récipient. Elle dépend que de la masse volumique du liquide ρ et de la profondeur h . NB: h est mesuré parallèlement à la direction de la pesanteur.

Cas: ρ non constant

On veut déterminer la variation de pression de l'atmosphère terrestre en fonction de la hauteur y mesuré au-dessus du niveau de la mer avec les hypothèses que g est constant

et que la masse volumique de l'air est proportionnelle à la pression, soit $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0}$, où les indices 0 indiquent le niveau de la mer.

Sachant que la pression diminue avec la hauteur au-dessus de la mer, on peut écrire l'équation 7.1 comme:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

Cela donne:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} = -P\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)g &\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)g dy \Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)g \int_0^y dy \Rightarrow \\ \ln \frac{P}{P_0} &= -\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)gy \Rightarrow P = P_0 e^{-(\rho_0 g/P_0)y} \end{aligned}$$

ce qui montre que *la pression décroît exponentiellement avec l'altitude.*

Exemple 7.3.2. A quelle altitude la pression de l'air équivaut-elle à la moitié de sa valeur au niveau de la mer? La pression au niveau de la mer est $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, la masse volumique de l'air au niveau de la mer, $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ et $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Solution. On cherche la hauteur y pour la quelle $P = P_0/2$, sachant que $P = P_0 e^{-(\rho_0 g/P_0)y}$. D'après les valeurs de l'énoncé, la quantité $\rho_0 g/P_0$ vaut $1.25 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Ainsi:

$$1/2 = e^{-(1.25 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1})y} \Rightarrow y = (\ln 2.00)/(1.25 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}) = 5500 \text{ m}$$

Il faut monter à 5500 m pour trouver une pression atmosphérique diminuée de moitié. ◀

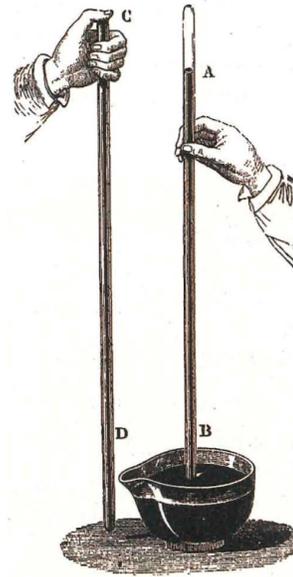
7.3.3 Pression atmosphérique

Le baromètre

Un énorme problème a longtemps tourmenté les communautés minières européennes du XVII^e siècle: par un étrange mystère, il était impossible de pomper les eaux d'infiltration profondes de plus de 10 mètres, même avec les pompes les plus puissantes de l'époque. On consulta Galilée, en Italie, au sujet de ce phénomène étrange. Ce n'est qu'après la mort de Galilée que son assistant, Torricelli, fut capable de reconnaître que les forces à vaincre pour pomper un liquide à 10 m de profondeur dépendaient non seulement de la hauteur mais de la densité de liquide. Il eut alors l'idée de remplacer l'eau par du mercure liquide 13.6 fois plus dense.

Torricelli scella adroitement l'une des extrémités d'un tube en verre de 2 m de long, le remplit de mercure, boucha avec son doigt l'autre bout du tube, le retourna, le plongea dans une cuve pleine de mercure et retira alors son doigt (figure 7.2). Au début, du mercure coula du tube dans la cuve mais s'arrêta lorsque le niveau du mercure dans le tube fut environ 76 cm plus haut que celui dans la cuve, laissant le haut du tube apparemment vide.

Figure 7.2: L'atmosphère, exerçant une force vers le bas sur la surface libre du mercure peut soutenir 76 cm de mercure dans la colonne. Le tube est d'abord rempli, puis renversé dans un bol de mercure. La colonne descend, laissant un vide partiel dans l'espace au-dessus.



La hauteur du mercure dans le tube apparaît donc à l'évidence comme une mesure directe de la **pression atmosphérique**. Torricelli a construit ainsi le premier *baromètre* à mercure. “*Nous vivons immergés au fond d'un océan d'air*”, observa-t-il. Environ 5×10^{18} kg d'air pèsent sur la surface de la planète, produisant au niveau de la mer une pression atmosphérique moyenne P_A de 1.01324×10^5 N/m², ou, en unités SI, 1.01324×10^5 Pa, ce qui correspond à une “*atmosphère*” (atm). L'atmosphère standard ou pression atmosphérique normale est la pression que produit à 0°C une colonne de mercure d'exactement 760 mm. L'unité dite: *millimètre de mercure*, appelée aussi *torr*, en hommage à Torricelli, est surtout utilisée par les médecins et les spécialistes de l'ultra-vide. Les mécaniciens utilisent le *bar*, valant 10^5 Pa. Les météorologues et marins utilisent le *millibar* (10^2 Pa, soit 1 *hectopascal*, unité des bulletins météo: la pression atmosphérique normale est 10.13 millibars ou hectopascals).

Question pour réfléchir. L'air humide est moins dense que l'air sec $\rho_{vap} < \rho_{air}$. C'est la baisse ou la hausse du baromètre qui annonce en général de la pluie?

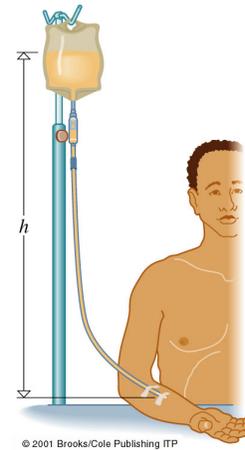
Le manomètre

Le manomètre est un appareil de mesure de pression. Il mesure une différence de pression entre la pression recherchée (la pression réelle, ou pression absolue P) et la pression atmosphérique P_A . On appelle parfois cette surpression *pression manométrique* (P_M) ou pression relative. Ces deux pressions sont liées par la relation:

$$P = P_A + P_M$$

Pour que le fluide de perfusion de la figure 7.3 coule dans la veine du patient, il faut que la pression manométrique de la poche plastique (égale à ρgh) excède celle du sang dans la veine (environ 2 kPa ou 15 mm Hg). La poche doit donc être placée à une hauteur h d'au moins 20 cm au-dessus de l'aiguille.

Figure 7.3: La pression manométrique du liquide au niveau de l'aiguille de la perfusion est $P_M = \rho gh$ où ρ est la masse volumique du fluide injecté.



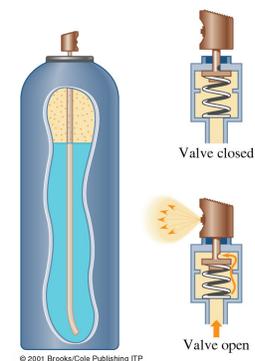
7.3.4 Principe de Pascal

Vers 1651, Pascal écrit un ouvrage qui contenait le premier énoncé précis de ce qui sera connu comme le **Principe de Pascal**: Une pression externe appliquée à un fluide confiné à l'intérieur d'un récipient fermé est transmise intégralement à travers tout le fluide. Quand une pression est exercée sur une certaine région d'un liquide confiné (comme, par exemple, en poussant un piston sur un liquide dans un cylindre), le fluide se comprime légèrement et la pression augmente uniformément partout dans le liquide. Ce processus est assez différent de la pression interne générée par la pesanteur et existerait même dans un liquide en apesanteur. La seringue de Pascal (figure 7.4) et le pulvérisateur aérosol (figure 7.5) sont des illustrations de ce principe.

Figure 7.4: La seringue de Pascal est une bouteille percée de trous et fermée par un piston. Quand la pression sur le fluide augmente, il jaillit alors des trous avec la même force dans toutes les directions. Ce phénomène suggère que la pression appliquée est transmise uniformément à tous les points du liquide.



Figure 7.5: Un pulvérisateur aérosol contient un gaz sous pression appelé propulseur. Il pousse vers le bas sur la surface du liquide à pulvériser. Quand la soupape est ouverte, l'extrémité supérieure du long tube est à la pression atmosphérique et son extrémité inférieure est à une pression bien supérieure. La différence de pression propulse le liquide vers le haut et de là vers l'extérieur.

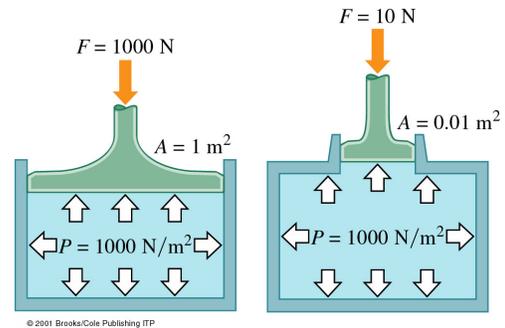


7.3.5 Les machines hydrauliques

Une même pression peut être produite au sein d'un liquide par des pistons de sections différentes qui exercent des forces qui diffèrent en proportion (figure 7.6). Plus la section du piston est grande, plus la force nécessaire pour produire la même pression est grande.

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow \frac{F_i}{A_i} = \frac{F_0}{A_0} \quad (7.2)$$

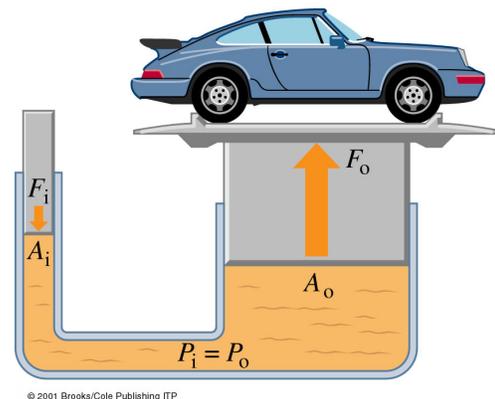
Figure 7.6: Une même pression peut être produite au sein d'un liquide par des pistons de sections différentes qui exercent des forces qui diffèrent en proportion de leur section.



C'est là que Pascal a vu l'importance pratique de son principe. Pour la première fois un nouveau type de multiplicateur de forces, connu sous le nom de *machines hydrauliques*, est devenu réalisable, bien qu'un instrument pratique n'ait été fabriqué qu'en 1796.

Si deux enceintes communicantes (c'est-à-dire partageant le même fluide) sont munies de deux pistons de différentes sections (figure 7.7), la pression générée par l'un des pistons est transmise intégralement à l'autre.

Figure 7.7: Un élévateur hydraulique. La force appliquée F_i crée une pression F_i/A_i , qui est transmise au cylindre de l'élévateur d'aire A_f . Celui-ci peut alors exercer une force utile $F_f = F_i S_f/S_i$.



NB: On parle d'un multiplicateur de force et non d'un multiplicateur de travail. Il y a conservation de l'énergie mécanique: le travail de la force F_i est égal au travail de la force F_0 . Ça veut dire que pour un déplacement dl_i du piston i et un déplacement dl_0 du piston 0 :

$$W_i = F_i dl_i; \quad W_0 = F_0 dl_0 \quad \Rightarrow \quad W_i = W_0$$

On peut prouver ça: sachant que l'eau est incompressible, pour un déplacement dl_i du piston i et un déplacement dl_0 du piston 0 : $dl_i A_i = dl_0 A_0 \Rightarrow dl_i = (A_0/A_i) dl_0$. Donc (en utilisant l'équation 7.2):

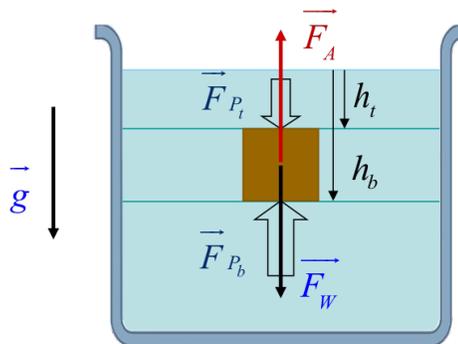
$$W_0 = F_0 dl_0 = F_i (A_0/A_i) dl_0 = F_i dl_i = W_i$$

7.3.6 Poussée d'Archimède

Un corps totalement plongé dans un liquide déplace un volume de ce liquide égal à son propre volume. L'expérience montre aussi qu'un objet immergé semble plus léger: l'eau le pousse vers le haut, le soutenant partiellement d'une manière ou d'une autre. Cela paraît évident à quiconque tente d'immerger un ballon gonflé. Archimède a précisé quantitativement le phénomène en énonçant ce qui sera appelé **principe d'Archimède**: un objet immergé dans un fluide paraît plus léger; il est poussé vers le haut avec une force égale au poids du fluide qu'il déplace. Cette force ascendante exercée par le fluide est connue sous le nom de **poussée d'Archimède**.

La poussée d'Archimède est causée par la pesanteur agissant sur le fluide. Elle a son origine dans la différence de pression entre la partie supérieure et la partie inférieure de l'objet immergé, une différence qui existe toujours si la pression varie avec la profondeur, comme c'est le cas d'un fluide dans le champ gravitationnel de la Terre.

Figure 7.8: La poussée d'Archimède sur un cube est la différence entre la force de pression ascendante sur sa base et la force de pression descendante sur la face supérieure, inférieure à la première.



Considérons un cube immergé dans l'eau, comme montré à la figure 7.8. Considérons que le cube a une surface A et hauteur Δh . La face supérieure de l'objet est soumise à une pression $P_t = \rho_l g h_t$, où ρ_l est la masse volumique du liquide. La face inférieure est soumise à une pression $P_b = \rho_l g h_b$. On sait qu'une pression P génère une force $F = PA$ sur une surface A . Donc la force nette F_A sur l'objet due à l'action de la pression est:

$$F_A = P_t A - P_b A = \rho_l g h_t A - \rho_l g h_b A = \rho_l g (h_t - h_b) A = -\rho_l \Delta h A g$$

Or, $\Delta h A$ est le volume du cube, égal aussi au volume du fluide déplacé, si le cube est complètement immergé. Comme la masse du fluide déplacé est $m_l = \rho_l V$, nous pouvons écrire:

$$F_A = -\rho_l V_l g = -m_l g$$

Donc la poussée d'Archimède est égale au poids du fluide déplacé par l'objet, c'est-à-dire égal au poids du fluide qui serait contenu dans le volume de l'objet.

La force résultante qui agit sur l'objet (de masse m et masse volumique ρ) est:

$$\vec{F} = \vec{F}_W + \vec{F}_A \Rightarrow F = F_W - F_A = mg - m_l g = \rho V g - \rho_l V g = (\rho - \rho_l) V g$$

On voit donc que si $\rho > \rho_l$, la force résultante est dirigée vers le bas et l'objet coule. Par contre si $\rho < \rho_l$, la force est dirigée vers le haut et l'objet flotte. La force totale F sera toujours plus petite que le poids, ce qui implique que le poids apparent d'un objet immergé, même partiellement, est toujours réduit.

Question pour réfléchir. Flottabilité: Comment faire flotter sur l'eau un objet de densité plus élevée que celle de l'eau (par exemple, un bateau)?

Exemple 7.3.3. On parle souvent de la partie visible de l'iceberg sous-entendant que la plus grande partie de l'iceberg est cachée sous l'eau. Quelle est la fraction visible? La masse volumique de la glace est $\rho_0 = 917 \text{ kg/m}^3$ et celle de l'eau de la mer $\rho_l = 1025 \text{ kg/m}^3$.

Solution. Définissons V comme le volume total de l'iceberg, F son poids ($F = \rho_0 V g$) et V_{im} le volume immergé de l'iceberg. Le poids de l'eau déplacée est $F_A = \rho_l V_{im} g$. Pour que l'iceberg flotte, il faut que $\rho_0 V g = F = F_A = \rho_l V_{im} g$, d'où $\frac{V_{im}}{V} = \frac{\rho_0}{\rho_l}$. La fraction visible de l'iceberg donc est:

$$f_{vis} = \frac{V - V_{im}}{V} = 1 - \frac{V_{im}}{V} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_l} = 0.1$$

La fraction visible de l'iceberg vaut 10%. ◀

7.3.7 Tension superficielle

Plongeons un fil métallique plié en U dans un liquide; si on le soulève lentement une couche mince confinée entre les deux branches du fil se forme. Certains insectes peuvent marcher sur l'eau. Un trombone plastifié peut "flotter" sur la surface de l'eau à cause de la tension de surface bien qu'il soit beaucoup plus dense que l'eau. Ces exemples sont des manifestations de la **tension superficielle**: la surface d'un liquide se comporte comme une membrane sous tension. La tension superficielle γ est définie comme la force par unité de longueur exercée par la surface. Elle a la même valeur en tout point de la surface et elle s'exprime, dans le système SI, en N/m. Dans ce cas, la couche limitée par le fil a effectivement deux surfaces (correspondant aux deux faces du film), la force peut être écrite: $F_t = 2\gamma L$, où la longueur L est l'intersection de la couche et de la surface du liquide.

Ce phénomène a lieu à la surface de séparation (interface) entre un liquide et un gaz. Donc la tension de surface dépend des deux substances formant l'interface.

Une molécule entourée de liquide est soumise à des forces intermoléculaires (forces de Van der Waals) symétriques qui s'équilibrent mutuellement. Une molécule en surface est sollicitée de façon dissymétrique, la résultante des forces étant dirigée vers le liquide. Cette compression amène le liquide à minimiser son aire de surface. Pour augmenter l'aire de la surface d'un liquide, il faut exercer une force et effectuer un travail afin d'amener les molécules de l'intérieur à la surface. Ce travail augmente l'énergie potentielle des molécules en surface, appelée *énergie superficielle*.

7.4 Hydrodynamique

À tout moment nous interagissons d'une manière ou d'une autre avec des fluides en mouvement. Nous marchons, nous conduisons une voiture, le sang circule dans nos vaisseaux sanguins, nous sommes en fait des *systèmes hydrodynamiques*. On va étudier comment le liquide coule dans des tubes, des pompes et des artères, quel est l'effet de la pression de

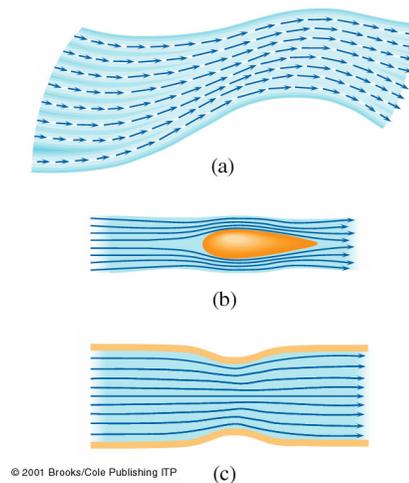
l'air sur les ailes d'un avion et la face d'un gratte-ciel, comment évaluer quantitativement l'écoulement d'un fluide et quelles sont ses lois.

7.4.1 Écoulement d'un fluide

Les expériences menées par O.Reynolds en 1883 sur le mouvement des fluides dans des tubes ont montré qu'il y avait deux régimes d'écoulement distincts: *laminaire* et *turbulent*.

Écoulement laminaire Si vous soufflez doucement l'air entre vos lèvres, vous obtenez le cas extrême d'un écoulement régulier et précis. Si un fluide se déplace tel que sa vitesse en un point donné reste constante en module et en direction, on a un écoulement régulier (figure 7.9). La vitesse peut être différente en différents points. Les trajectoires suivies par les particules définissent des lignes de courant. La tangente à ces lignes est dans la même direction que la vitesse, si bien que deux lignes de courant ne peuvent se croiser. La densité des lignes est proportionnelle à la vitesse d'écoulement du fluide.

Figure 7.9: (a) L'écoulement laminaire est illustré ici en traçant les vecteurs vitesse aux différents points d'un fluide. (b) Les lignes de courant dans un écoulement laminaire autour d'un obstacle et (c) dans un conduit. Notons que plus les lignes de courant sont serrées, plus la vitesse est grande. En chaque point, on peut imaginer un vecteur vitesse et ce *champ de vitesse* nous rappelle le champ gravitationnel. En fait, ce dernier a été conçu justement sur le modèle d'un fluide.



Écoulement turbulent Si vous tousssez, vous obtenez l'autre cas extrême d'un éclatement de l'air en un mouvement complexe et tourbillonnant. L'écoulement turbulent correspond à un mouvement irrégulier, chaotique et variable du fluide. Un fluide réel ne peut pas toujours suivre la surface d'un solide; ils se forment alors des tourbillons à l'arrière de l'obstacle (figure 7.10). Plus la vitesse d'écoulement augmente, plus l'aptitude du fluide à suivre les contours d'un obstacle diminue. Il s'éloigne de la surface de l'obstacle et forme des turbulences qui dissipent de l'énergie à l'arrière de l'objet. L'écoulement d'un fluide réel dépend aussi de sa viscosité. La couche du fluide qui est en contact avec la paroi solide adhère et reste immobile par rapport à la paroi. La vitesse du fluide augmente alors de zéro sur la paroi jusqu'à la vitesse d'écoulement libre au sein du fluide. Ceci a lieu dans une région relativement mince, selon le milieu, appelée **couche limite** (figure 7.11).

Les fluides parfaits sont incompressibles, non visqueux et sont caractérisés par un écoulement laminaire.

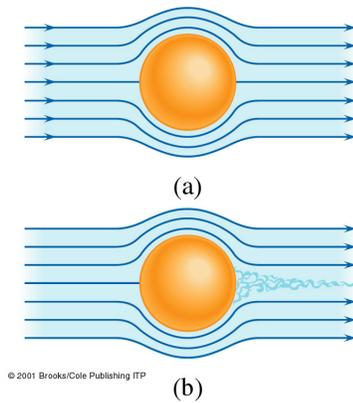


Figure 7.10: (a) Un fluide parfait s'écoule doucement autour d'un obstacle. (b) Un fluide réel ne peut pas toujours suivre la surface solide; il forme alors derrière l'obstacle un fouillis de tourbillons qui constituent l'écoulement turbulent.

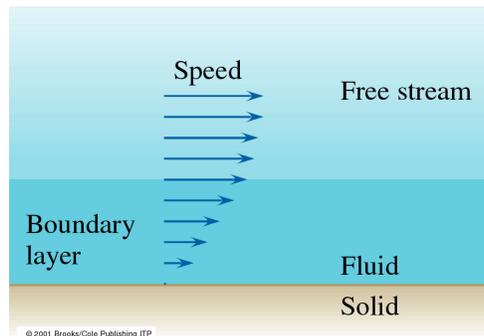


Figure 7.11: Le fluide en contact avec une surface solide est immobile. Sa vitesse augmente, selon un taux qui dépend de la viscosité du fluide, jusqu'à la vitesse d'écoulement libre. La région de transition est appelée couche limite.

7.4.2 Équation de continuité

La constance de la masse volumique d'un liquide est la base d'une relation fondamentale qui nous permet de comprendre comment un liquide s'écoule dans un volume confiné (tuyau, veine ..). Considérons un tube de courant arbitraire dans un fluide en écoulement laminaire. Le fluide entre par l'élément de tube 1 de section A_1 à vitesse v_1 et sort par l'élément de tube de section A_2 à vitesse v_2 . Sur un intervalle de temps Δt , les molécules qui entrent dans le tube parcourent une distance $l_1 = v_1 \Delta t$ et celles qui sortent une distance $l_2 = v_2 \Delta t$. Puisque les volumes entrant et sortant sont les mêmes, nous avons:

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

C'est l'**équation de continuité**. Si la section du tube augmente, la vitesse d'écoulement diminue et vice-versa. Le produit Av est le **débit volumique** J en m^3/s , et il est constant dans un tube de courant:

$$J = Av = A \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Exemple 7.4.1. Pourquoi la section d'un filet d'eau est-elle plus large juste au sortir d'un robinet (point A_0) comparé à quelques centimètres plus bas (point A)? Pour les besoins de l'exemple, prenons un débit volumique de $J = 34 \text{ cm}^3/\text{s}$, $A_0 = 1.2 \text{ cm}^2$ et A placé $h = 4.5 \text{ cm}$ plus bas.

Solution. Le débit volumique permet d'obtenir la vitesse de l'écoulement à la sortie du robinet:

$$J = A_0 v_0 \Rightarrow v_0 = J/A_0 = (34 \text{ cm}^3/\text{s})/(1.2 \text{ cm}^2) = 28.3 \text{ cm/s}$$

L'eau s'écoule librement sous l'effet de la gravitation, soit:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Selon l'équation de continuité:

$$A_0 v_0 = Av$$

Ces deux équations permettent donc de déterminer A :

$$A = \frac{A_0 v_0}{v} = \frac{J}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = 0.4 \text{ cm}^2 < A_0$$

7.4.3 Équation de Bernoulli

Considérons un fluide idéal et incompressible, dans le quel il n'y a pas de pertes dues à la conversion de l'énergie mécanique en énergie rotationnelle, thermique ou autre. La pression agissant sur un élément de volume de ce fluide en mouvement exerce un travail sur lui, qui se traduit par une variation de son énergie cinétique ou son énergie potentielle (gravitationnelle); donc:

$$\Delta W = \Delta E_C + \Delta E_P \quad (7.3)$$

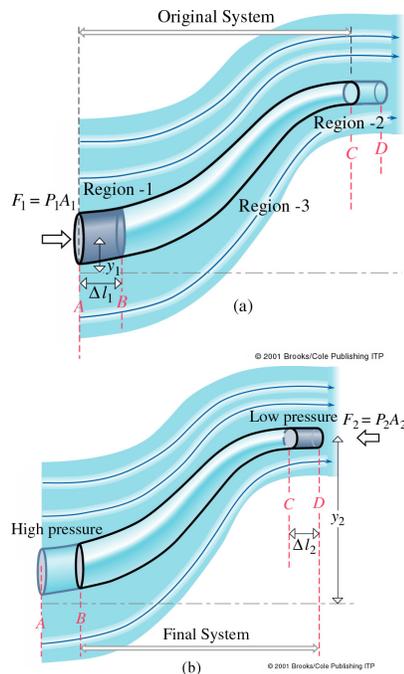


Figure 7.12: Calcul de l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible au plan de l'énergie. Pendant un intervalle de temps Δt , le tube de liquide s'est effectivement déplacé de sa position (a) à sa position (b). Dans ce processus, une masse de fluide Δm a été déplacée dans le champ gravitationnel. Il y a eu variation de pression et de vitesse.

Déterminons d'abord ΔW pour ce fluide. La figure 7.12 représente un tube de courant étroit, où les valeurs précisées de la pression, la vitesse, le déplacement et la hauteur doivent être considérées comme les moyennes de ces quantités pour les éléments de volume du fluide. Imaginons que le tube de courant soit limité à ses extrémités par des disques d'aires A_1 et A_2 qui se déplacent avec le fluide. La force de pression, $F_1 = P_1 A_1$ exercée par le milieu extérieur sur le disque d'aire A_1 , et qui le pousse dans la direction du

mouvement, effectuée sur lui un travail moteur $F_1\Delta l_1$. Dans ce processus, les molécules du tube de courant entier sont déplacées vers la droite, avec conséquence que le disque d'aire A_2 s'est déplacé de Δl_2 . Cette fois le fluide extérieur agit sur le disque avec une force $F_2 = P_2A_2$ dirigée vers la gauche, donc contre le mouvement. Il exerce donc sur le disque un travail résistant $-F_2\Delta l_2$. Le travail total exercé sur le fluide du tube est donc:

$$\Delta W = F_1\Delta l_1 - F_2\Delta l_2 = P_1A_1\Delta l_1 - P_2A_2\Delta l_2$$

Comme $\Delta l = v\Delta t$, nous pouvons écrire:

$$\Delta W = P_1A_1v_1\Delta t_1 - P_2A_2v_2\Delta t_2$$

et, utilisant l'équation de continuité, $A_1v_1 = A_2v_2 = Av$, nous trouvons:

$$\Delta W = vA\Delta t(P_1 - P_2)$$

Considérant une masse m de l'élément de volume déplacé: $m = \rho\Delta V = \rho(A\Delta l) = \rho(Av\Delta t)$, d'où on prend: $vA\Delta t = m/\rho$. Donc le travail total exercé sur le fluide devient:

$$\Delta W = \left(\frac{m}{\rho}\right)(P_1 - P_2)$$

Ce travail modifie l'énergie cinétique:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

ainsi que l'énergie potentielle gravitationnelle:

$$\Delta E_P = mg\Delta h = mg(y_2 - y_1)$$

où y est mesuré parallèlement à l'action de la force de pesanteur.

Ces trois dernières équations permettent d'explicitement l'équation 7.3 comme:

$$\left(\frac{m}{\rho}\right)(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) + mg(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

D'où on constate que:

Le long d'une ligne de courant, un fluide parfait en écoulement régulier et laminaire obéit à l'équation de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte$$

Chaque terme a les dimensions d'une énergie par unité de volume.

Ce résultat vérifie que la pression est la même en tous les points situés à la même profondeur dans un fluide, quelles que soient la forme et le volume du récipient. Si ce n'était pas le cas, le fluide se mettrait en mouvement.

Exemple 7.4.2. Expérience de Torricelli: Un réservoir rempli d'un liquide est percé d'un trou à sa base. Quelle est la vitesse à la quelle le liquide jaillit par ce trou? Voir figure 7.13.

Solution. Le liquide qui jaillit à l'air libre est à la pression atmosphérique $P_2 = P_A$ et l'équation de Bernoulli devient:

$$P + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh = P + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0 \Rightarrow$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(P - P_A)}{\rho} + 2gh$$

L'équation de continuité implique que si $A_1 \gg A_2$ alors $v_2 \gg v_1$ et v_1^2 est négligeable par rapport à v_2^2 . Si de plus le réservoir est à l'air libre, $P = P_A$ et: $v_2 = \sqrt{2gh}$. Si le frottement est négligeable, le liquide jaillit de l'ouverture avec une vitesse égale à celle qu'il aurait gagnée en chute libre à partir de la hauteur h .

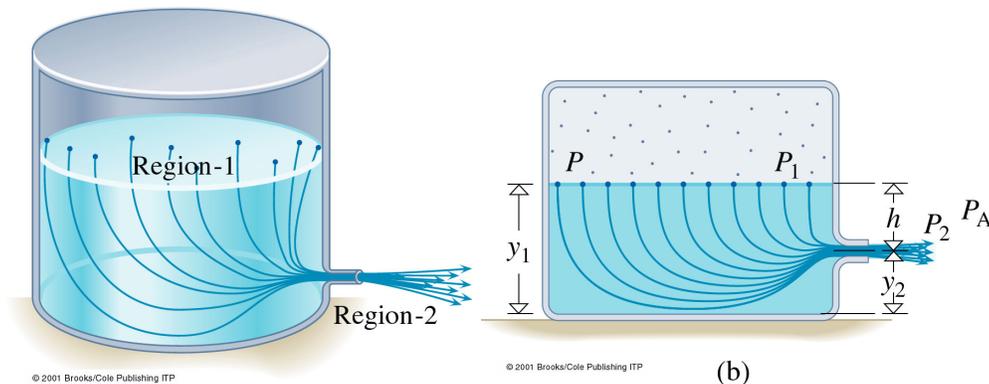


Figure 7.13: (a) Lignes de courant d'un fluide coulant d'un réservoir fermé, où la pression sur la surface du liquide est P . (b) Pour appliquer l'équation de Bernoulli, nous prenons la surface du liquide comme région 1, l'ouverture libre de l'orifice comme région 2 et nous suivons une ligne de courant de 1 à 2.

L'effet Venturi

Certaines applications pratiques de la dynamique des fluides résultent de l'interdépendance de la pression et de la vitesse. Il y a une catégorie de situations dans lesquelles la variation d'énergie potentielle gravitationnelle est négligeable; l'équation de Bernoulli relie alors la différence de pression à la différence d'énergie cinétique, donc la variation du carré de la vitesse. Considérons, par exemple, un segment de tuyau ayant une section droite S_1 , qui se rétrécit à un certain endroit jusqu'à avoir une section S_2 , puis il retrouve sa section normale S_1 (figure 7.14). Nous savons que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

qui veut dire, comme nous l'avons vu, qu'une diminution de la section traversée par le fluide se traduit par une augmentation de sa vitesse.

Dans toute situation où le flux entrant est environ au même niveau que le rétrécissement ($y_1 \approx y_2$), l'équation de Bernoulli s'emploie pour exprimer la différence de pression:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

devient: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$. En utilisant l'équation de continuité pour éliminer v_1 , nous obtenons:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \frac{(A_1^2 - A_2^2)}{A_1^2}$$

Comme $A_1 > A_2$, le second membre de l'équation est positif et $P_1 > P_2$; il y a donc une chute de pression dans la région étroite. En arrivant à la région 3, la pression du fluide augmente de nouveau et la vitesse reprend sa valeur initiale. Cette diminution de la pression qui accompagne l'augmentation de la vitesse est appelé effet Bernoulli, ou *effet Venturi* après les travaux du chercheur italien qui l'a étudié en 1791.

Il est possible d'augmenter mécaniquement la vitesse d'un fluide en utilisant une pompe, par exemple. L'énergie cinétique ajoutée vient du travail effectué sur le fluide. Alors, la pression au niveau de l'orifice d'un jet libre de vitesse élevée produit par une pompe, est égale à la pression atmosphérique. Cela ne doit pas être confondu avec l'effet Venturi, où aucune énergie supplémentaire n'est transmise au système et l'accroissement de l'énergie cinétique est dû uniquement à la diminution de l'énergie de pression et vice versa. Dans le cas de l'effet Venturi, **une partie du fluide, forcée à se déplacer plus rapidement, est le siège d'une pression inférieure à celle d'une partie du fluide qui se déplace lentement.**

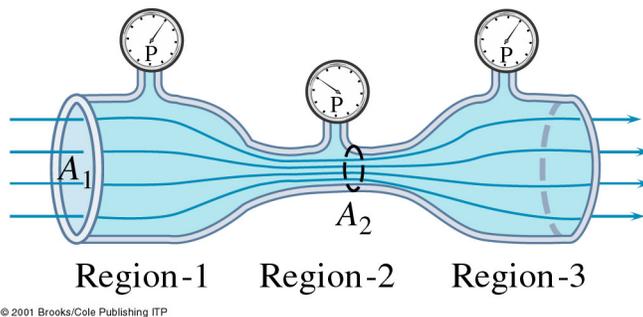


Figure 7.14: Dans la région 1, la section est grande, la vitesse est faible et la pression est élevée. Dans la région 2, la section est petite, la vitesse est grande et la pression est basse. Dans la région 3, la section est de nouveau grande, la vitesse est faible et la pression est élevée.

Exemples

- La déflexion des lignes de courant entre deux navires amarrés dans un courant ou voguant côte à côte produit une chute de pression. Les deux navires éprouvent une force qui les pousse l'un vers l'autre.
- Le même phénomène se produit quand un camion passe à côté d'une voiture; le conducteur de la voiture a l'impression d'être aspiré vers le camion.
- Un vent qui souffle à une vitesse de 198 km/h (55 m/s) sur le toit d'une maison peut générer une force capable de le soulever: La différence de pression entre l'intérieur

et l'extérieur vaut: $P_{atm} - P_{ext} = \frac{1}{2}\rho v_2 = 1815 \text{ N/m}^2$ qui engendre une force de 163350 N sur un toit de 90 m^2 , force qui le soulèvera.

- L'effet Venturi produit aussi la principale composante de la portance d'une aile d'avion.
- L'artériosclérose survient quand une plaque se forme sur les parois intérieures des artères, gênant le flux sanguin. Il en résulte une chute de tension par effet Venturi (figure 7.15). L'artère peut à la longue se fermer momentanément. La tension artérielle du sang l'ouvre et elle se ferme à nouveau: il en résulte une palpitation vasculaire.

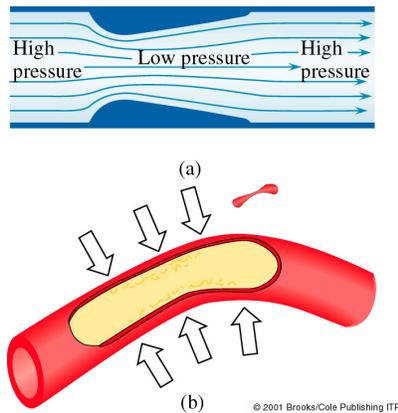


Figure 7.15: Écoulement d'un fluide dans un canal rétréci.

7.4.4 Tourbillons

Un tourbillon (ou vortex) est une masse tourbillonnante d'un fluide, entourée par une zone qui n'est pas en mouvement de rotation. Les tornades et les ouragans sont des tourbillons puissants et à grande échelle. La spirale d'eau tournoyante coulant d'une baignoire et le grand nuage en forme de champignon d'une explosion atomique ont aussi des structures de tourbillons.

Un tourbillon est formé quand il y a une discontinuité dans la forme de l'écoulement, souvent due à la présence d'un obstacle. Lorsque deux courants de vitesses différentes s'approchent l'un de l'autre, une région de transition existe où la couche en mouvement rapide progresse devant et autour de la couche plus lente qui tend à ralentir la couche rapide.

7.4.5 Les fluides réels: la viscosité

Les fluides réels (liquides et gaz) en mouvement présentent toujours des effets liés aux forces de frottement interne caractérisées par la viscosité du fluide. Même si l'écoulement s'effectue à vitesse constante, une force \vec{F} de frottement agit entre les différentes couches d'un fluide quand elles glissent les unes contre les autres. Cette force produit du travail et fait perdre de l'énergie au fluide.

Pour les liquides, cette force est attribuable aux forces de cohésion qui existent au niveau moléculaire tandis que pour les gaz, elle provient de collisions entre les molécules. Le degré de viscosité varie selon les fluides (le sirop est plus visqueux que l'eau). Cette propriété des fluides s'exprime de façon quantitative par le *coefficient de viscosité* η .

Soit une mince couche de fluide d'épaisseur dy de surface A entre deux plaques dont l'une est mobile et l'autre immobile. Le fluide en contact avec les plaques s'attache à leur surface à cause des forces adhésives qui s'exercent entre ses molécules et celles de chaque plaque. Appliquons une force constante F : La plaque accélère d'abord, puis atteint une vitesse constante limite v_x lorsque la force appliquée est contrebalancée par la force de viscosité. Les couches supérieures du liquide se déplacent à la même vitesse v_x que la plaque. Les couches inférieures restent fixes et ralentissent l'écoulement de la couche juste au-dessus et ainsi de suite. La vitesse à l'intérieur du liquide varie donc de 0 à v_x . Cette variation divisée par la distance sur laquelle elle s'effectue s'appelle *gradient de vitesse*: dv_x/dy . La force de viscosité F_v vaut:

$$F_v \propto A \frac{dv_x}{dy} \Rightarrow F_v = \eta A \frac{dv_x}{dy}$$

où η est le coefficient de viscosité introduit en haut. Il s'exprime en $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ou $\text{Pa} \cdot \text{s}$.

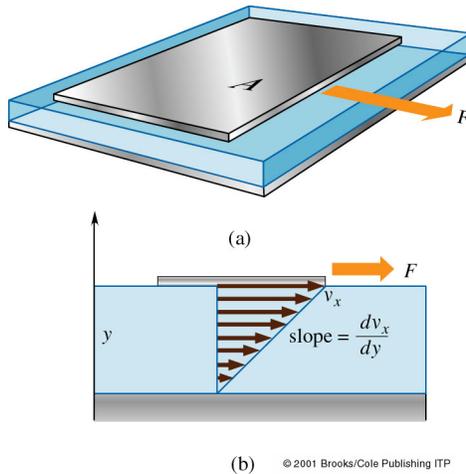


Figure 7.16: Une plaque d'aire A que l'on traîne sur une couche de liquide visqueux. La plaque se déplace à une vitesse constante et entraîne le liquide avec elle. Les couches différentes du liquide se déplacent à des vitesses décroissantes à partir de la plaque.

Les liquides sont en général plus visqueux que les gaz. La viscosité des liquides augmente en général quand la température diminue. Par contre, les gaz deviennent moins visqueux lorsque la température diminue. Quelques exemples sont données au tableau 7.1.

Temp ($^{\circ}\text{C}$)	η_{Ricin} ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)	η_{Eau} ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)	η_{Air} ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)	η_{Sang} ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)
0	5.3	1.792×10^{-3}	1.71×10^{-5}	
20	0.986	1.005×10^{-3}	1.81×10^{-5}	3.015×10^{-3}
37		0.695×10^{-3}	1.87×10^{-5}	2.084×10^{-3}
80	0.030	0.357×10^{-3}	2.09×10^{-5}	
80	0.017	0.284×10^{-3}	2.18×10^{-5}	

Tableau 7.1: Viscosité de certains fluides

Chapitre 8

Élasticité et oscillations

Galilée a commencé son livre, *Deux Nouvelles Sciences* (1638), par une discussion “traitant de la résistance que les corps solides opposent à la fracture”. Jusqu’au milieu du dix-septième siècle, il y eut plusieurs autres tentatives pour étudier les forces des cordes et des tiges, mais il fallut attendre que le simple, génial et sensuel Robert Hooke inventât “la science de l’élasticité”, qui est l’analyse du comportement des matériaux et des structures sous l’influence de forces appliquées.

Contenu

8.1 La loi de Hooke	129
8.2 Déformation et contrainte; le module de Young	132
8.3 Les oscillations	133
8.3.1 Mouvement sinusoïdal	133
8.4 Exemples des Mouvements Harmoniques Simples	137
8.5 Amortissement, oscillations forcées, résonance	141

8.1 La loi de Hooke

L’élasticité étudie le comportement de matériaux et de structures sous contraintes. Un solide soumis à une force extérieure (contrainte) peut être comprimé, étiré ou cisailé. Un *solide élastique* revient rapidement à sa configuration initiale dès que la contrainte est supprimée (e.g. acier, os, verre, caoutchouc). Par contre, les *plastiques* ne reviennent pas à leur configuration initiale quand la contrainte est supprimée (e.g. chewing gum, cire, plomb).

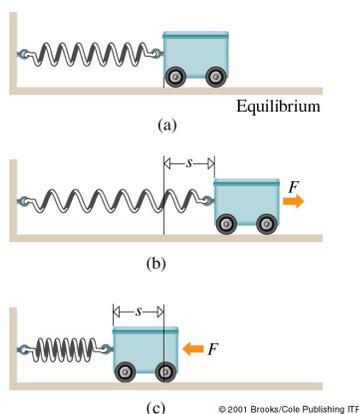
Ce que Hooke a trouvé, c’est que beaucoup de matériaux se déforment proportionnellement à la force appliquée. La loi de Hooke s’écrit:

$$F = ks$$

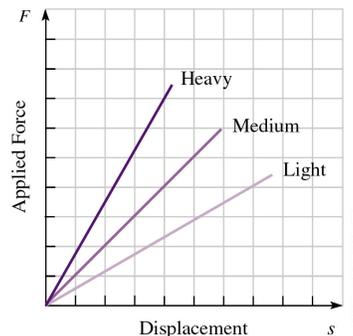
où k est la *constante d’élasticité* et mesure la rigidité de l’objet et s mesure la déformation du solide. Les dimensions de k sont d’une force divisée par une distance; k s’exprime donc en N/m.

La loi de Hooke est l’expression de la force qui doit être appliquée au ressort pour produire le déplacement s : Si la force F est positive, le déplacement s est positif. La force

du ressort tend toujours à ramener le système à sa position d'équilibre; elle est dite une *force de rappel*.



- (a) Un ressort en équilibre (b) Une force F de traction produit un allongement s
(c) Une force F de compression produit une contraction s . Dans tous les cas, on a $F = ks$.



Une force F appliquée à un ressort l'étire et déplace son extrémité de s . La figure est une représentation graphique de F en fonction de s pour trois ressorts différents. La pente de chaque courbe est la constante d'élasticité, k , du ressort. Plus le ressort est rigide, plus la valeur de k est grande.

Exemple 8.1.1. Un dynamomètre est un dispositif à ressort qui permet de mesurer des forces.

- (a) Quelle est la constante du ressort d'un dynamomètre qui permet de lire des masses allant de 0 à 500 g sur une échelle graduée longue de 10 cm?
(b) Quel est le déplacement si on tire avec une force de 10 N?
(c) Pourrait-on utiliser ce dynamomètre comme balance sur la lune?

Solution. Données: masse variant de 0 à 500 g, déplacement variant de 0 à 10 cm et une charge de 10 N. À trouver: k et s pour 10 N.

(a) Une masse de 500 g produit un déplacement de 10 cm. Son poids est: $F_W = mg = (0.5 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 4.9 \text{ N}$. Donc le k du ressort doit valoir: $k = F_W/s = (4.9 \text{ N})/(0.1 \text{ m}) = 49 \text{ N/m}$.

(b) Si on tire avec une force de 10 N, de déplacement est:

$$s = F/k = (10 \text{ N})/(49 \text{ N/m}) = 0.20 \text{ m}$$

C'est donc impossible à lire, car l'échelle ne mesure que 10 cm.

(c) Non, car la valeur de g est différente sur la Lune. Pour l'utiliser comme balance sur la Lune, il faut calibrer le dynamomètre.

Énergie potentielle élastique L'une des utilités d'un ressort est d'emmagasiner de l'énergie. Le ressort d'une montre (dispositif inventé par Hooke) remplace l'énergie potentielle gravitationnelle d'un balancier ou d'un poids qui descend par l'énergie potentielle élastique d'un ressort. Plus k est grand, plus un ressort est rigide et plus il faut appliquer une force intense pour une déformation s donnée.

Le travail effectué sur un système contre une force variable, telle que la force d'un ressort, est l'aire comprise entre la courbe de traction (i.e. $F(s)$) et l'axe du déplacement (abscisse). Cette aire A définit l'énergie restituable (la résilience). Pour une force conservative, le travail de F pour un déplacement s correspond à la variation de l'énergie potentielle ΔE_p du système:

$$\Delta E_p = \int F ds = \int k s ds = k \int s ds = \frac{1}{2} k s^2$$

qui est d'ailleurs égal à l'aire entre la courbe de traction et l'axe du déplacement.

Exemple 8.1.2. Quatre personnes, chacune de masse 70 kg montent dans une voiture de masse 1100 kg, deux devant et deux derrière. Le véhicule s'affaisse légèrement sur ses quatre ressorts identiques, les comprimant de 2.5 cm. Déterminer la constante d'élasticité de chaque ressort et l'énergie emmagasinée dans chacun. Quelle est la constante d'élasticité équivalente de la suspension, prise dans son ensemble? D'où vient cette énergie?

Solution. Données: la masse de chaque personne, 70 kg, la masse de la voiture, 1100 kg et $s=2.5$ cm. À trouver: la constante k , l'énergie potentielle E_p de chaque ressort et la constante k' équivalente.

Le système de ressorts peut être considéré à l'équilibre quand la voiture est vide, sa masse n'a alors aucun effet. La masse totale des personnes supportée par les quatre ressorts est 4×70 kg et leur poids est:

$$F_W = (280 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 2744 \text{ N}$$

Chaque ressort est comprimé de la même quantité (0.025 m) et supporte la même charge; la force exercée vers le haut par chacun est donc égale au quart de la charge totale:

$$F = \frac{1}{4} F_W = k s \Rightarrow k = \frac{F_W}{4 s} \Rightarrow k = 2.7 \times 10^4 \text{ N/m}$$

Assimilant les quatre ressorts à un seul, exerçant une force totale de $F_W = 2744$ N, la constante d'élasticité équivalente est

$$k' = \frac{F_W}{s} = 1.1 \times 10^5 \text{ N/m}$$

c'est à dire quatre fois la constante de chaque ressort.

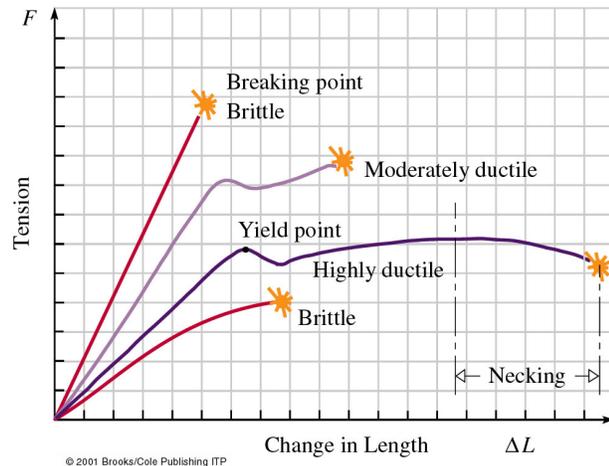
L'énergie potentielle emmagasinée dans chaque ressort est: $\Delta E_p = \frac{1}{2} k s^2 = 8.4$ J, tandis que le système entier emmagasine quatre fois cette énergie. L'énergie élastique emmagasinée est une fraction de la diminution de l'énergie potentielle gravitationnelle; le reste est dissipé en énergie thermique.

Matériaux élastiques Si une force de traction croissante F est appliquée à un échantillon d'un certain matériau, son allongement ΔL varie. Pour un matériau élastique, une relation linéaire entre F et ΔL se manifeste, caractéristique de la loi de Hook. Cependant, l'allongement n'est linéaire que si la force appliquée ne dépasse pas une certaine limite dépendant de la nature du matériau, c'est à dire des liaisons interatomiques du corps.

Le comportement du matériau par rapport à la force appliqué est indiqué graphiquement à la figure 8.1. On définit plusieurs zones dans le graphique de la tension en fonction de l'élongation:

- zone d'élasticité, réversible;
- limite d'élasticité;
- zone plastique (au-delà du régime élastique), non réversible. Les liaisons interatomiques commencent à se rompre et la déformation est permanente;
- limite de rupture.

Figure 8.1: Variation de la charge, c'est-à-dire la traction, avec l'élongation pour certains matériaux de construction. Les substances cassantes subissent la rupture avant d'avoir atteint une grande élongation. Les substances ductiles subissent de grandes élongations par glissement plastique. Un métal ductile peut être considéré comme hookéen jusqu'à une élongation de 0.25% à 0.5% et subit une fracture à 50%. Quelques matériaux non-métalliques, comme le bois et la fibre de verre subissent la rupture dès une élongation de 1% à 3%.



8.2 Déformation et contrainte; le module de Young

La **contrainte** est une mesure de la répartition des forces à l'intérieur d'un solide. Elle indique comment l'interaction des atomes à l'intérieur d'un corps est affectée par une force externe. C'est le rapport du module de la force appliquée à la surface sur laquelle elle agit:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

et elle s'exprime en N/m^2 .

La **déformation** est une mesure du déplacement relatif des atomes, c'est-à-dire, la variation relative de la distance interatomique: $\epsilon = \Delta L/L$, où L est la longueur originale du corps concerné.

Les problèmes étudiés par les ingénieurs correspondent au cas où les contraintes sont proportionnelles aux déformations: $\sigma = E \cdot \epsilon$. La constante de proportionnalité E s'appelle *module d'élasticité*. Son unité SI est en Newton/m^2 .

Quand on parle de traction et compression, le module de proportionnalité est alors appelé **Module de Young** Y :

$$Y = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{A} \frac{L}{\Delta L}$$

D'ici on retrouve la loi de Hook: $F = Y \cdot A \Delta L/L = k \Delta L$, avec $k = Y \cdot A/L$.

N.B. Le module de Young de traction peut être différent de celui de compression.

8.3 Les oscillations

Un mouvement qui se répète à intervalles de temps consécutifs et égaux est dit *périodique*. La nature nous offre couramment quantités d'exemples de ces phénomènes qui semblent inhérents à la nature même de l'Univers: la rotation de la Terre autour du Soleil, l'oscillation d'une balançoire, les vagues sur l'eau, les molécules d'air qui transmettent la sensation de son, les atomes dans un solide, les électrons dans les antennes de radio et TV.

Nous pouvons distinguer deux types de mouvements répétitifs:

1. Les mouvements sur une trajectoire fermée, qui peuvent être repérés par la rotation périodique d'un angle autour d'un point à l'intérieur de la trajectoire (mouvement de la Terre autour du soleil) et les mouvements de va-et-vient sur un même axe. Nous avons étudié ce type de mouvement au chapitre 7 (mouvement de rotation).
2. Les mouvements vibratoires ou oscillatoires, mouvements périodiques dont la forme la plus simple est le mouvement sinusoïdal ou Mouvement Harmonique Simple (MHS).

Nous étudions dans ce chapitre le mouvement vibratoire ou oscillatoire, une étude qui conduit naturellement, dans les chapitres à suivre, à une discussion des ondes produites par des systèmes mécaniques vibrants et, en particulier, les ondes sonores.

8.3.1 Mouvement sinusoïdal

Dans un mouvement périodique, un cycle est la plus petite séquence qui se répète. Pendant un cycle, le système évolue mais finit toujours par revenir à la configuration et au mouvement qu'il avait au début du cycle.

Le temps qu'il faut pour que le système accomplisse un cycle est la **période** (T). L'inverse de la période, c'est-à-dire le nombre de cycles par unité de temps, est la **fréquence**:

$$f = \frac{1}{T}$$

L'unité SI de fréquence est le hertz (Hz): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ cycle/s} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Considérons un objet qui décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse constante (figure 8.2); sa vitesse angulaire ω est alors constante. Chaque fois qu'il fait un tour complet, il tourne d'un angle 2π rad. Comme il fait un tour complet en temps T , la vitesse angulaire ω sera également:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

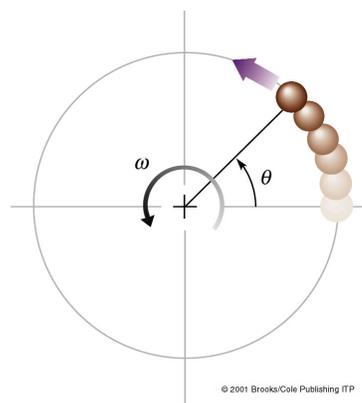
Il est courant d'appeler ω fréquence angulaire ou pulsation.

À tout instant, la position de l'objet est définie par l'angle θ . Comme la vitesse linéaire v est constante, la vitesse angulaire correspondante ω l'est aussi (nous avons appris au chapitre 7 que $v = r\omega$). La position angulaire à l'instant t est $\theta = \omega t$ (comme on a aussi appris au chapitre 7). La projection Q de la position P de l'objet sur l'axe x (figure 8.3) sera:

$$x(t) = x_{\max} \cos \theta = x_{\max} \cos \omega t = x_{\max} \cos 2\pi f t \quad (8.1)$$

Le point Q suit alors un mouvement sinusoïdal, aussi appelé **mouvement harmonique simple** (MHS). Le déplacement x est appelé *élongation*; x_{\max} est l'*amplitude* des oscillations, qui est constante et positive.

Figure 8.2: Un objet, qui décrit un cercle avec une vitesse angulaire ω constante, a une position angulaire $\theta = \omega t$ qui varie à un taux constant.



L'élongation de Q' à partir de O est donnée par:

$$y(t) = y_{\max} \sin \omega t = y_{\max} \sin 2\pi f t$$

À noter que $x(t)$ est maximal pour $t = 0$ tandis que $y(t)$ est minimal pour $t = 0$, si on considère que le mouvement commence ($t = 0$) quand $\theta = 0$.

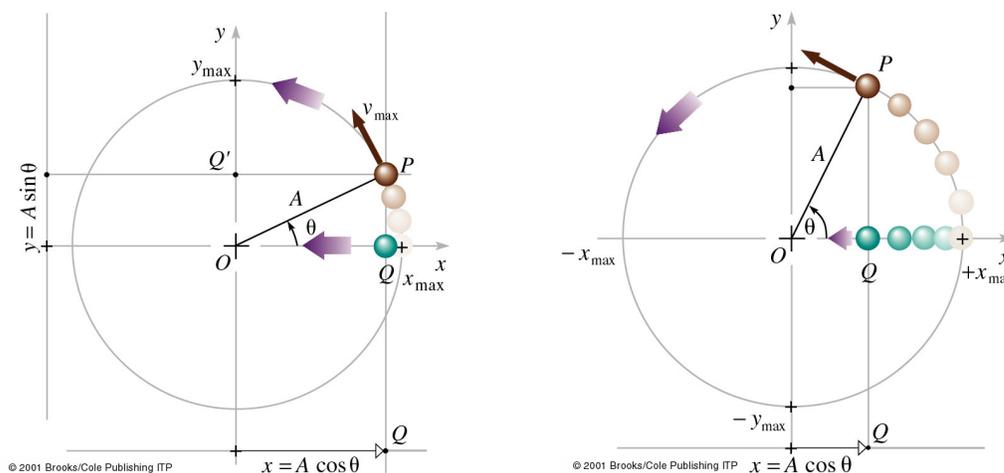


Figure 8.3: Un objet P décrivant un cercle de rayon A à vitesse v_{\max} constante. Sa projection Q sur l'axe des x a une élongation $x = A \cos \theta$ avec O pris comme origine. Pendant que P décrit le cercle, Q oscille entre $+x_{\max}$ et $-x_{\max}$ d'un mouvement sinusoïdal.

Que devient l'équation 8.1, si l'objet commence le mouvement pas à $\theta = 0$ mais à un autre point? L'argument des fonctions sinus et cosinus est la **phase** du mouvement. Dans l'équation 8.1, la phase est $\theta = \omega t$. Plus généralement, à l'instant $t = 0$, la phase a une valeur non nulle, ϕ , appelée **phase initiale**. Alors, la phase devient $\omega t + \phi$, et:

$$x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi) = x_{\max} \cos(2\pi f t + \phi)$$

C'est l'expression la plus générale de l'élongation d'un objet en mouvement sinusoïdal. Pour récapituler, à cette équation généralisée:

- x_{\max} est l'amplitude de l'oscillation;
- $\omega t + \phi$ est la phase du mouvement;

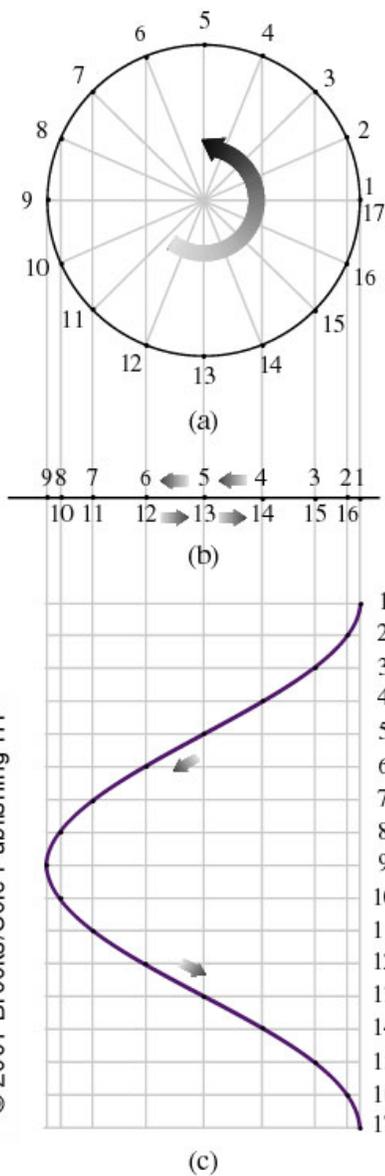


Figure 8.4: (a) Mouvement circulaire uniforme. (b) Sa projection sur un axe fixe est un mouvement sinusoïdal. (c) Représentation graphique de ce mouvement sinusoïdal en fonction du temps.

- ϕ est la phase initiale, qui dépend du déplacement et de la vitesse à $t = 0$, pourtant sa valeur n'influence pas la forme de $x(t)$;
- ω est la vitesse angulaire, aussi appelée fréquence angulaire ou pulsation.

Nous avons trouvé que l'élongation d'un système en mouvement sinusoïdal est une fonction sinusoïdale du temps. *Quelle sont alors la vitesse et l'accélération de ce système?*

Vitesse d'un mouvement sinusoïdal

Concentrons nous sur la composante v_x . La dérivée de $x(t)$ par rapport au temps est:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_{\max}\omega \sin(\omega t + \phi)$$

La vitesse a aussi un comportement sinusoïdal. Elle varie entre les limites $\pm v_{\max} = \pm\omega x_{\max}$. La vitesse est en avance de phase de $\pi/2$ sur l'élongation. Elle est nulle à l'amplitude maximale du déplacement et elle est maximale à l'amplitude minimale (nulle) du déplacement.

Accélération d'un mouvement sinusoïdal

La dérivée de $v(t)$ par rapport au temps est:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -x_{\max}\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

L'accélération est proportionnelle au déplacement et de signe opposé. Ceci est la caractéristique d'un mouvement harmonique simple. L'accélération varie entre les limites $\pm a_{\max} = \pm\omega^2 x_{\max}$; elle est en avance de phase de $\pi/2$ sur la vitesse. Elle est maximale pour un déplacement maximale et nulle pour un déplacement nulle.

Le déplacement, vitesse et accélération en fonction du temps est indiqué à la figure 8.5.

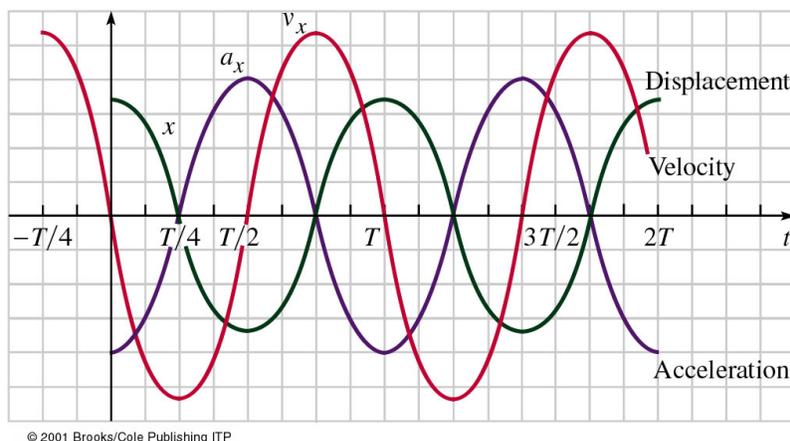


Figure 8.5: Représentation graphique de la vitesse, de l'élongation et de l'accélération d'un oscillateur harmonique en fonction du temps. Notez que la vitesse est en avance de phase de $\pi/2$ sur l'élongation et que l'accélération est en avance de $\pi/2$ sur la vitesse, donc en avance de π (ou en retard de π) sur l'élongation.

Exemple 8.3.1. Une tache lumineuse sur l'écran d'un ordinateur oscille le long d'une ligne droite horizontale d'un mouvement sinusoïdal à la fréquence de 1,5 Hz. La longueur totale de la ligne parcourue est 20 cm et la tache commence le mouvement à droite de l'écran. Déterminer: (a) sa pulsation, (b) sa période, (c) sa vitesse maximum et (d) son accélération maximum. (e) Exprimer x en fonction du temps et trouver la position de la tache à l'instant $t = 0.40$ s.

Solution. Données: $f = 1.5$ Hz et $x_{\max} = 10$ cm. À trouver: (a) ω , (b) T , (c) $v_x(\max)$, (d) $a_x(\max)$, (e) x en général et x à $t = 0.40$ s.

$$(a) \omega = 2\pi f = 2\pi(1.5 \text{ Hz}) = 9.4 \text{ rad/s} = 3.0\pi \text{ rad/s}$$

$$(b) T = 1/f = 0.67 \text{ s}$$

$$(c) v_x(\max) = \omega x_{\max} = 0.94 \text{ m/s}$$

$$(d) a_x(\max) = \omega^2 x_{\max} = 8.9 \text{ m/s}^2$$

$$(e) x = x_{\max} \cos \omega t = (0.10 \text{ m}) \cos(9.4 \text{ rad/s } t). \text{ À l'instant } t = 0.40 \text{ s}, x = -8.1 \text{ cm.}$$

Force de rappel élastique

Lorsqu'un système oscille librement (sans être soumis à une source externe d'énergie), il se déplace car il est soumis à une force, la *force de rappel*, qui tend à le ramener à sa position d'équilibre.

Si on déforme légèrement un système, initialement en équilibre stable, une quantité supplémentaire d'énergie potentielle y est emmagasinée. Lorsqu'on le lâche, il tend à revenir à sa configuration d'équilibre. Mais, arrivé là, cette énergie potentielle supplémentaire est déjà transformée en énergie cinétique; il a alors une quantité de mouvement qui le force à continuer le déplacement au-delà de la position d'équilibre, dans le sens opposé au déplacement initial. Il se déforme donc de nouveau; son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et le processus recommence. *Pendant l'oscillation, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique et vice versa*, indéfiniment (s' il n'y a pas de perte d'énergie).

La deuxième loi de Newton, $F = ma$, où l'accélération est donnée par $a = -\omega^2 x$, montre que la force est proportionnelle au déplacement, mais de signe opposé. Nous avons déjà vu cette proportionnalité à la loi de Hooke. Le signe négatif indique ici que la force est une force de rappel interne au système.

Cette force, $F = -kx$ correspond à l'action d'un ressort dont la constante élastique est $k = m\omega^2$. On en déduit une définition alternative du mouvement harmonique simple: **Une particule de masse m soumise à une force de rappel proportionnelle à son déplacement suit un mouvement harmonique simple.**

8.4 Exemples des Mouvements Harmoniques Simples

Mouvement associé avec une force de rappel

Si une masse reliée à un ressort est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée, en étirant ou comprimant le ressort, elle se comporte comme un oscillateur harmonique. Beaucoup de systèmes élastiques (bâtiments, ailes d'avion, ponts, etc) se comportent d'une façon semblable; le ressort oscillant mérite donc une étude détaillée.

Prenons un bloc de masse m attaché à un ressort. On tire sur le ressort et on amène la masse en position x_{\max} , d'où on le lâche. On néglige les frottements. Le ressort exerce une force de rappel $F = -kx$. D'après la deuxième loi de Newton, $F = ma$, donc:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Comme on a vu plus haut, $a = -\omega^2 x$, donc $F = ma = -m\omega^2 x = -kx$ d'où on déduit que

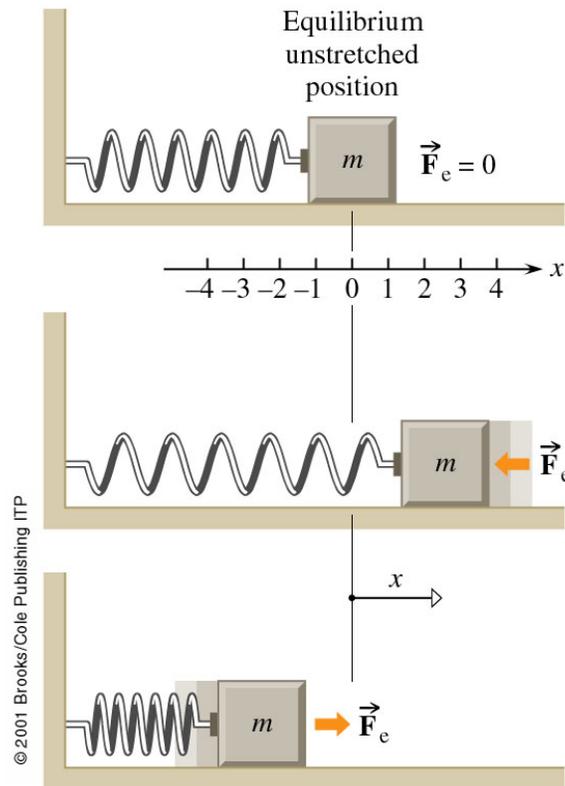


Figure 8.6: Une masse attachée à un ressort vibrant horizontalement d'un mouvement sinusoïdal. Ici, F est la force exercée par le ressort et il n'y a aucune force de frottement.

$k = m\omega^2$. Alors l'équation devient:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x \quad (8.2)$$

qui est une équation différentielle du deuxième degré dont la solution générale est:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Pour décrire le mouvement de la masse, il faut déterminer A , ω et ϕ .

On peut vérifier que $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ est une solution de l'équation du mouvement, équation 8.2. Cette équation est satisfaite pour $m\omega^2 = k$ (à prouver!). Ainsi, $x(t)$ est une solution de l'équation du mouvement. On appelle la quantité $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la fréquence angulaire naturelle. La période du mouvement sera $T = 2\pi/\omega$. La vitesse du mouvement sera donnée par: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$.

Les conditions initiales permettent de décrire complètement le mouvement de la masse m sur le ressort. On sait que pour $t = 0$: $x(t = 0) = x_{\max}$ et $v(t = 0) = 0$. Donc:

$$x(t = 0) = A \cos(\phi) = x_{\max}$$

$$v(t = 0) = -A\omega \sin \phi = 0$$

Ces deux équations résultent à déterminer que $\phi = 0$ ou 2π et que $A = x_{\max}$. Donc:

$$x(t) = x_{\max} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Force de rappel gravitationnelle: le pendule

Un pendule simple consiste en une corde de masse négligeable et de longueur L constante à laquelle est attachée une masse ponctuelle m .

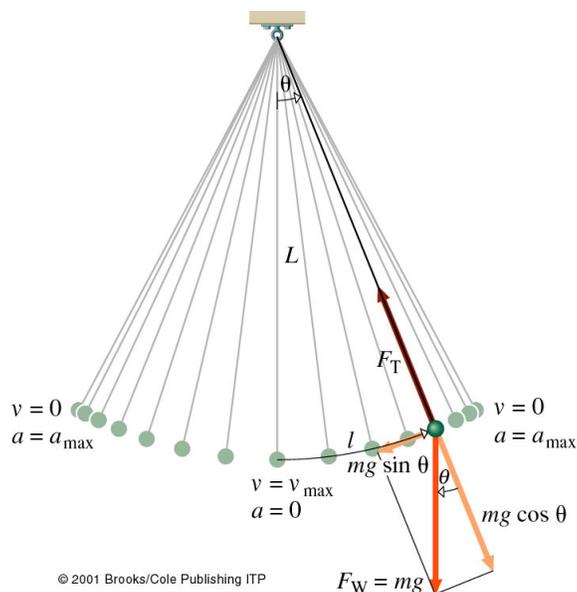


Figure 8.7: Un pendule oscille sous l'effet de la composante presque horizontale de son poids, $mg \sin \theta$. À condition que θ reste faible, le mouvement est sinusoïdal.

Le pendule simple de la figure 8.7 est représenté en mouvement au moment où le fil de longueur L s'écarte de la verticale d'un angle θ . La boule est alors distante de sa position d'équilibre d'une longueur l (mesurée sur l'arc de cercle qu'elle décrit). Si θ est mesurée en radians, $l = L\theta$. À cet instant, les forces en jeu sont la tension du fil F_T et le poids mg de la masse que l'on décompose en une force radiale $mg \cos \theta$ et une force tangentielle $mg \sin \theta$. Cette dernière s'oppose au déplacement et tend à ramener la masse à sa position d'équilibre ($\theta = 0$). Pour des petits angles:

$$F = -mg \sin \theta \approx -mg\theta = -mg \frac{l}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)l = -kl$$

d'où on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique avec:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left(\frac{mg}{L}\right)\left(\frac{1}{m}\right)} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \text{et}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{m}{mg/L}\right)} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Alors: *La période ne dépend que de la longueur du fil, pas de la masse suspendue!*

Exemple 8.4.1. Le chariot de la figure 8.8 a une masse de 1.0 kg. On le déplace de 5.0 cm vers la droite avec une force horizontale de 10.0 N, puis on le lâche.

- Quelle est la période d'oscillation de ce chariot en l'absence de frottement?
- Quelle est la position du chariot 0.20s après le lâcher.
- Que devient la constante d'élasticité si on supprime un des deux ressorts?

(d) Quelle sera alors la fréquence d'oscillation du système?

Solution.

Données: $m = 1$ kg, $A = 0.050$ m et $F = 10.0$ N. À trouver: T et x à $t = 0.200$ s, k et f pour le système avec un seul ressort.

(a) La force appliquée F produit un déplacement x , tel que $F = kx$. On calcule: $k = \frac{F}{x} = 200$ N/m pour le système entier. C'est la constante d'élasticité du système, celle d'un ressort équivalent qui produirait le même mouvement oscillant. La période de cette oscillation est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.44 \text{ s}$$

(b) Le déplacement au temps $t = 0.2$ s s'obtient à partir de l'équation du mouvement: $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Au temps $t = 0$, $v(t) = 0$ et donc $\phi = 0$. Avec $x_m = 0.05$ m et $\omega = 2\pi/T$, on trouve: $x(t = 0.2 \text{ s}) = -0.048$ m.

(c) Si on supprime l'un des 2 ressorts, il suffit de la moitié de la force précédente pour induire le même déplacement. Donc $k = 100$ N/m. (d) $f = 1/T \propto \sqrt{k}$, alors la nouvelle fréquence sera $1/\sqrt{2}$ de l'ancienne valeur, soit 1.6 Hz.

Figure 8.8: Pour déplacer horizontalement le chariot, on doit lui fournir de l'énergie. Cette énergie est théoriquement conservée et se transforme sans perte, d'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa, pendant que le chariot oscille sinusoidalement. En réalité, l'oscillation est amortie; son amplitude diminue progressivement jusqu'à ce que toute l'énergie soit transformée en énergie thermique par les frottements et les pertes internes dans les ressorts.



Énergie du MHS L'énergie mécanique totale d'un système en mouvement harmonique simple est constante. Il se produit un échange continu entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique horizontal est entièrement déterminée par le ressort. Elle dépend de l'état d'allongement ou de compression du ressort:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

L'énergie cinétique est entièrement déterminée par la vitesse de la masse:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

L'énergie mécanique totale: $E_M = E_P + E_C$, est égale à

$$E_M = \frac{1}{2}kx_m^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}kx_m^2$$

Alors: *L'énergie mécanique totale de l'oscillateur est constante et proportionnelle au carré de l'amplitude de l'oscillation.*

8.5 Amortissement, oscillations forcées, résonance

Jusque là, nous n'avons considéré que des systèmes oscillant librement, sans forces externes; mais, c'est une situation idéale. Dans la réalité, il y a toujours des forces externes agissant sur l'oscillateur en même temps que la force de rappel. Ces forces peuvent soit entraver le mouvement (c'est-à-dire l'amortir), soit l'aider de façon que son amplitude soit maintenue ou même augmentée. Parfois ce dernier effet peut causer des catastrophes, comme dans les cas des séismes.

Mouvement oscillatoire amorti

Considérons un oscillateur harmonique simple caractérisé par une force de rappel $F = -kx$. A cette force s'ajoute une force d'amortissement, qui provient en général de la résistance de l'air et des frottements internes du système oscillant. On observe que l'amplitude des oscillations va diminuer progressivement jusqu'à l'arrêt complet. C'est un **mouvement oscillatoire amorti** (figure 8.9).

Si l'amortissement est faible, le système peut continuer à osciller pendant un temps relativement long avant de s'arrêter à sa position d'équilibre. Un tel système est **sous-amorti** (figure 8.10). C'est le cas d'un pendule ordinaire, dont l'amplitude diminue lentement, ou d'un diapason qui s'éteint lentement, en perdant de l'énergie à cause du frottement.

Si le frottement augmente, le système déplacé peut revenir lentement à sa position d'équilibre sans jamais la dépasser; dans ce cas, il n'y aura pas d'oscillations. Les amortisseurs d'une voiture, par exemple, doivent étouffer toute oscillation en moins d'un cycle. Quand le système revient à l'équilibre dans le temps le plus court, sans jamais osciller, on dit que l'**amortissement est critique**.

Si l'on augmente davantage l'amortissement, le système n'oscille plus, mais il met plus de temps pour revenir à l'équilibre. On dit dans ces cas que l'oscillateur est apériodique et qu'il a un **amortissement sur-critique**.

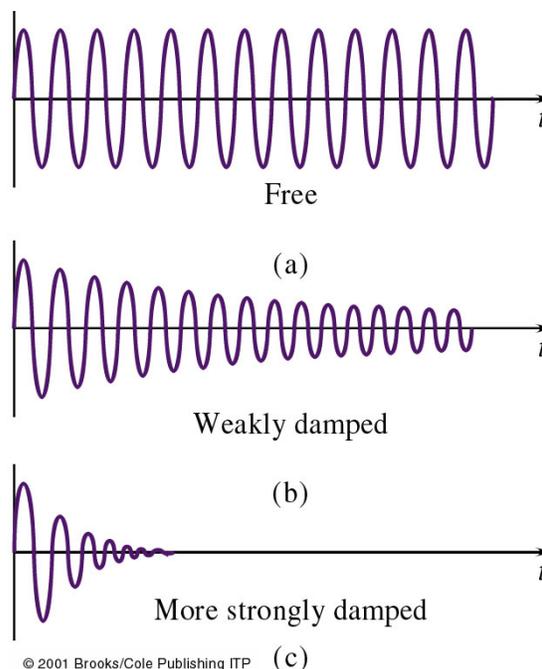
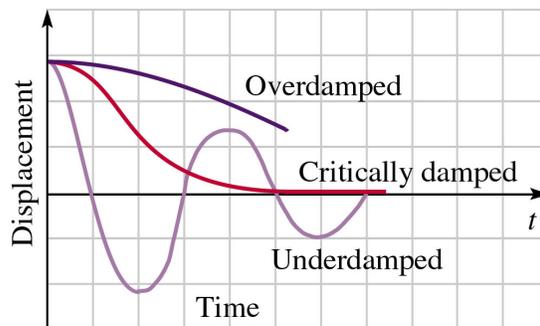


Figure 8.9: (a) Un oscillateur harmonique idéal, sans aucune perte d'énergie, oscille indéfiniment sans diminution d'amplitude. (b) Avec des frottements, l'oscillateur est amorti; son amplitude diminue avec le temps. (c) Plus grand est l'amortissement, plus rapidement les oscillations sont réduites.

Figure 8.10: Lorsqu'un système oscillant subit un frottement très important et n'oscille pas en revenant lentement à l'équilibre, le système est alors sur-amorti et l'amortissement est sur-critique. Si le corps revient à l'équilibre dans le temps minimum sans jamais osciller, l'amortissement est critique. Si le corps revient à l'équilibre dans le temps minimum sans jamais osciller, l'amortissement est critique.



Oscillations forcées et résonances

Pour maintenir les oscillations malgré l'amortissement, il faut apporter continuellement de l'énergie au système. Une force effectue un travail moteur sur le système pour compenser la perte d'énergie due aux frottements.

Si on pousse un enfant sur une balançoire, il peut osciller malgré les frottements; pour être efficace, il faut pousser la balançoire quand elle atteint le maximum de hauteur et commence à descendre, la force que vous exercez est alors parallèle au déplacement et le travail est moteur.

Soit un ressort ou une masse suspendue à un long élastique: donnez au système une courte impulsion et observez sa fréquence propre f_0 . Arrêtez les vibrations et faites monter et descendre votre main avec une amplitude de ~ 2 cm et une basse fréquence $f_e \sim 0.3$ Hz ($\ll f_0$). Le système suit votre mouvement, il se déplace en phase avec votre mouvement mais avec une amplitude plus faible. On a un comportement semblable quand f_e est beaucoup plus grande que f_0 . Mais quand f_e approche f_0 , l'amplitude des oscillations résultantes est très grande: il y a une **résonance**.

L'application d'une force externe périodique $F_{ext} = F_e \cos \omega_e t$ à un système qui peut osciller, produit des oscillations. Le mouvement résultant est une oscillation forcée de forme $x(t) = X_m \cos(\omega_e t + \phi')$, i.e. une oscillation à la fréquence angulaire de la force extérieure. L'amplitude X_m est une fonction compliquée de ω_e et ω_0 . Elle est maximale pour $\omega_e = \omega_0$. C'est le phénomène de résonance. Si l'amortissement est faible, l'amplitude peut devenir considérable et entraîner la rupture du système mécanique (e.g. pont de Tacoma, voir dessous).

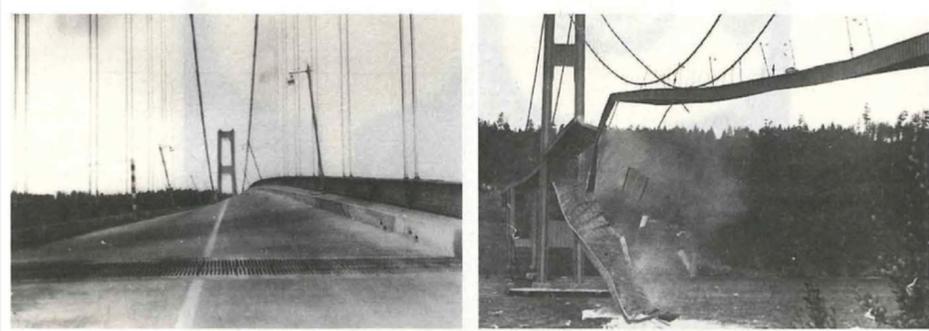
Toute structure mécanique a une ou plusieurs fréquences propres, et si la structure est soumise à une force extérieure dont la fréquence correspond à l'une de ces fréquences propres, il peut y avoir des oscillations tellement violentes que la structure se rompt.

Pont de Tacoma

Le premier pont franchissant le détroit de Tacoma à Puget Sound, Washington, avait un tablier principal de longueur de 853 m et de largeur de 11,9 m avec des poutres d'acier de 2,4 m pour le soutenir. Il a été ouvert à la circulation le 1er juillet 1940 et on s'est aperçu qu'il oscillait beaucoup lorsque le vent soufflait. Le matin du 7 novembre 1940, un vent de 70 km/h l'a fait vibrer, comme d'habitude, à 36 vibrations par minute. L'amplitude est devenue si grande que le pont a été fermé à la circulation. Vers 10 h, le câble nord s'est relâché et le pont principal s'est mis brutalement à osciller en mode résonant de 0.2 Hz autour de ligne jaune centrale de la route.

Bien qu'il y ait encore des questions restées sans réponse, le mécanisme fondamental qui a causé la catastrophe semble avoir été la formation de tourbillons, qui ont produit des vibrations auto-excitées. En se précipitant vers la grande poutre de soutien, l'air s'est partagé en deux courants suscitant des tourbillons alternativement au-dessus et au-dessous du pont. Une fois que la structure a commencé à osciller, ce mouvement a conduit à la formation d'autres tourbillons. Ces tourbillons induits se formaient avec la montée et la descente du pont; ils avaient donc la fréquence de vibration propre du pont.

L'énergie qu'apportait le vent au pont dépassa rapidement celle perdue par frottements et il apparut un régime d'oscillations de plus en plus amples. Peu après 11 heures du matin, heure locale, le tablier central se déchira comme un ruban de coton.



Chapitre 9

Ondes mécaniques et le son

Le transport de l'énergie et de la quantité de mouvement se fait uniquement par deux mécanismes fondamentaux: des particules qui se déplacent ou des ondes qui se propagent. Et même ces deux conceptions apparemment différentes sont subtilement liées; il n'y a pas d'onde sans particules et pas de particule sans ondes. Une onde est une perturbation qui transporte de l'énergie en se propageant de proche en proche dans un milieu. Les types de perturbations et de milieux peuvent être très différents. Quelques exemples:

- **onde de surface:** le milieu est la surface libre d'un liquide, la perturbation correspond au déplacement des particules du liquide par rapport à leur position de repos (les vagues).
- **onde sonore:** le milieu est un solide, liquide ou gaz, la perturbation est une variation de pression ou une déformation.
- **onde électromagnétique:** le milieu est la matière ou le vide. La perturbation est due à l'accélération des charges électriques résultant d'une variation du champ électromagnétique (la lumière, les ondes radio et TV, micro-ondes).

Dans ce chapitre, nous examinons les ondes dans des milieux matériels; ce sont des **ondes mécaniques** car elles sont dues aux déplacements des constituants du milieu. Le son est l'une de ces ondes; nous le traitons dans la fin de ce chapitre.

Contenu

9.1	Caractéristiques des ondes	145
9.2	Ondes sinusoïdales	145
9.3	Vitesse d'onde	147
9.4	Énergie d'onde	150
9.5	Réflexion, absorption et transmission	151
9.6	Le son	154
9.6.1	Les ondes sonores	154
9.7	Superposition des ondes	157
9.8	Les ondes stationnaires	159
9.9	Niveau d'intensité	163
9.10	Effet Doppler	164

9.1 Caractéristiques des ondes

On peut distinguer deux types d'ondes: les ondes longitudinales et les ondes transversales. Lorsque le mouvement des éléments du milieu de propagation est parallèle à la direction de propagation, l'onde est dite **longitudinale**. L'onde de compression dans une tige, les ondes sonores dans les gaz et les liquides, et certaines ondes sismiques sont de ce type. Quand les éléments du milieu de propagation se déplacent perpendiculairement à la direction de propagation, l'onde est **transversale**. Les cordes d'une guitare oscillent comme une onde transversale. Les ondes longitudinales et transversales sont des ondes **progressives** car elles voyagent d'un point à un autre (d'un bout d'une corde à l'autre).

N.B.: Seule la déformation se propage entre deux points, la matière du milieu (support de l'onde) ne fait que osciller autour de sa position d'équilibre selon un mouvement harmonique. La vitesse des particules de matière n'est pas égale à la vitesse de l'onde.

Vitesse des ondes La **période temporelle** (T) d'une onde périodique et progressive est le temps nécessaire pour que l'onde retrouve sa configuration initiale en un point donné ou, plus formellement, le temps qu'il faut à un profil pour défiler complètement devant un point donné. L'inverse de la période ($1/T$) est la **fréquence** f , qui correspond au nombre de profils qui traversent un point donné pendant une seconde. Si l'on fige l'onde à un instant donné, la distance spatiale sur laquelle l'onde exécute un cycle complet, c'est-à-dire la longueur du profil, est la **période spatiale** ou **longueur d'onde**, λ . Ce qu'on appelle **vitesse de l'onde** (v) est la vitesse (en m/s) avec laquelle elle progresse. Autrement dit, puisque une longueur d'onde λ met un temps T pour défiler, la vitesse est $\lambda/T = f\lambda$. Nous avons maintenant une expression pour la vitesse de toute onde progressive et périodique, qu'elle soit un son, une onde à la surface de l'eau ou de la lumière:

$$v = f\lambda$$

Historiquement, c'est Newton qui établit cette relation dans son ouvrage *Principia* (1687) dans une partie appelée "Pour trouver la vitesse des ondes".

9.2 Ondes sinusoïdales

L'ébranlement le plus simple à analyser mathématiquement est l'**onde sinusoïdale**. C'est une onde qui augmente et diminue comme une fonction sinusoïdale et se répète indéfiniment. Bien qu'elle soit une notion théorique, nous verrons que toute onde réelle peut être décomposée en une superposition d'ondes sinusoïdales.

Considérons une corde dans laquelle on lance une perturbation. En un temps t_0 donné, la corde oscille à la manière d'un ressort.

$$y(x) = y_m \sin(kx) \tag{9.1}$$

En plus de cette oscillation, on observe que pour chaque point x_0 , la position verticale de la corde oscille aussi à la manière d'un ressort:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t) \tag{9.2}$$

Un maximum d'amplitude se déplace le long de la corde (direction x) avec une vitesse $v = dx/dt$. Dans un intervalle de temps T (une période), ce maximum s'est déplacé d'une distance $\lambda \equiv v T$, qui correspond à la **longueur d'onde**.

En généralisant l'équation 9.1 pour tout temps t , on doit 'corriger' la position x de l'onde par sa propagation pendant le temps t , une correction qui est égale à vt : $x \rightarrow x - vt$. On obtient:

$$y(x, t) = y_m \sin[k(x - vt)] = y_m \sin(kx - kv t) \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)} \quad (9.3)$$

avec

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Notez que le signe ' $-$ ' assure que l'onde se déplace vers la droite, la direction des x positifs.

L'équation 9.3 est une solution de l'équation d'Alembert (équation d'onde):

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} \quad \text{avec} \quad v = \omega/k$$

Une forme généralisée de l'équation des ondes doit inclure une phase initiale, ϕ . Cette phase initiale est égale à zero si $y(x = 0, t = 0) = 0$.

$$\boxed{y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)}$$

La fonction d'onde oscille entre les valeurs $-y_m$ et $+y_m$. L'énergie associée à une onde est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde, y_m (similaire à l'énergie d'une oscillation).

L'onde se propage le long de l'axe x avec une vitesse $v = \lambda/T$, mais chaque point de la corde reste à la même position x_0 pendant la propagation de l'onde. Ce point de la corde bouge aussi, mais seulement le long de l'axe y . Sa vitesse, qu'on appelle la vitesse transversale de l'onde, est:

$$v_t = \frac{dy}{dt} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t + \phi)$$

La vitesse transversale devient zero quand le déplacement y est maximal, et est maximale quand $y(x) = 0$ (voir figure 9.2).

Exemple 9.2.1. Considérons une onde sinusoïdale le long d'une corde:

$$y(x, t) = 0.00327 \sin(72.1x - 2.72t)$$

- Déterminer l'amplitude y_m , la longueur d'onde λ , la période T , la fréquence f , la phase initiale ϕ et la vitesse d'onde v .
- Que vaut y au point $x = 22.5$ cm en $t = 18.9$ s?
- Calculer la vitesse transversale v_y de ce point.
- Quelle est l'accélération d'une particule de l'onde en ce point?

Solution. Données: la forme exacte de l'onde: $y(x, t) = 0.00327 \sin(72.1x - 2.72t)$.

(a) Nous connaissons que la forme générale d'une onde est $y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$. Alors:

$y_m = 0.00327$ m, $k = 72.1$ rad/m, $\omega = 2.72$ rad/s, $\phi = 0$ et donc:

$\lambda = 2\pi/k = 0.0871$ m, $T = 2\pi/\omega = 2.31$ s, $f = 1/T = 0.433$ Hz, $v = \omega/k = 0.0377$ m/s.

PROPAGATION D'UNE ONDE...

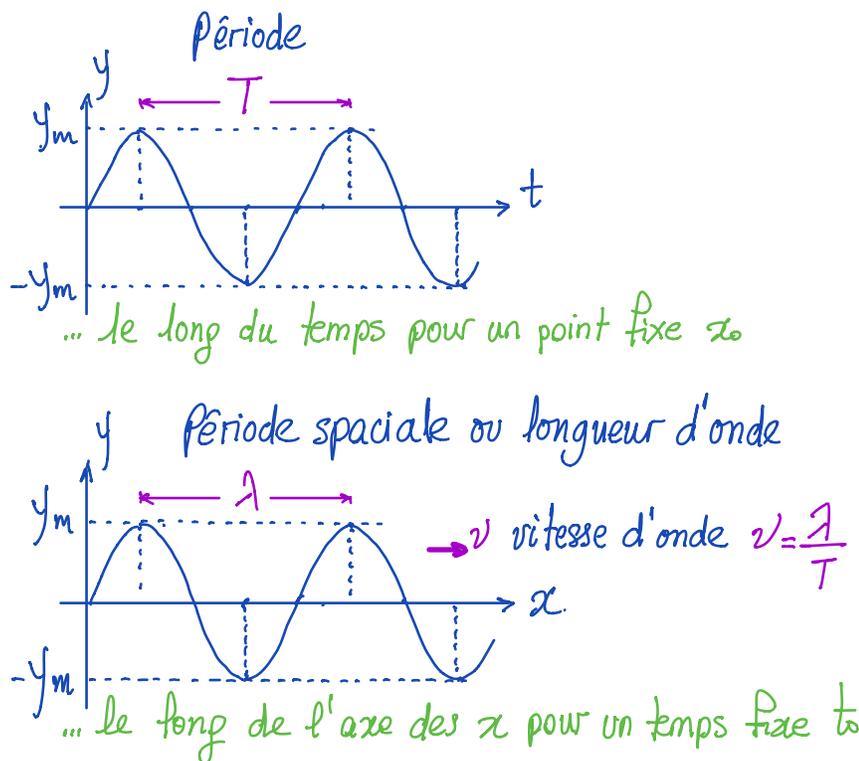


Figure 9.1: Représentation d'une onde sinusoïdale, en fonction du temps et du déplacement; caractéristiques de cette onde.

(b) $y = 0.00327 \sin(72.1 \times 0.225 - 2.72 \times 18.9) \text{ m} = 0.00192 \text{ m}$.

(c) Prenons la dérivée partielle de y par rapport au temps:

$$v_y = dy/dt = -\omega y_m \cos(kx - \omega t + \phi)$$

et avec peu de calcul, v_y au point $x = 22.5 \text{ cm}$ en $t = 18.9 \text{ s}$ est 7.1 mm/s . (d) La dérivée partielle de la vitesse transversale par rapport au temps donne:

$$a_y = dv_y/dt = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t + \phi) = -\omega^2 y = -14.2 \text{ mm/s}^2$$

9.3 Vitesse d'onde

Onde sur une corde tendue

Considérons une corde tendue de longueur infinie, dont la masse par unité de longueur (masse linéique) vaut μ : On cherche à établir l'équation du mouvement d'un élément de corde de masse Δm et de longueur $\Delta l \sim 2\Delta x$, comme indiqué sur la figure 9.3. Cet élément oscille et l'onde correspondante se propage avec une vitesse v . Comme le segment

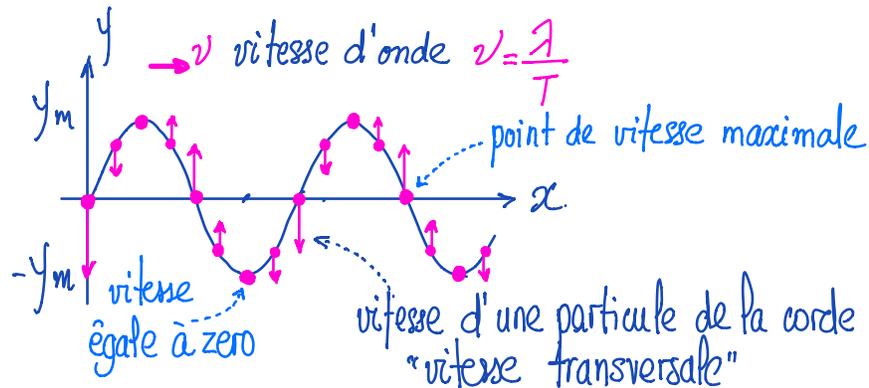


Figure 9.2: Représentation d'une onde sur une corde; les flèches indiquent la vitesse de la corde à des points divers.

se déplace à une vitesse constante, la résultante des forces agissant sur lui est radiale, dirigée vers le centre de la courbure de ce segment (C) et égale à la force centripète nécessaire $F_C = \Delta m(v^2/r)$.

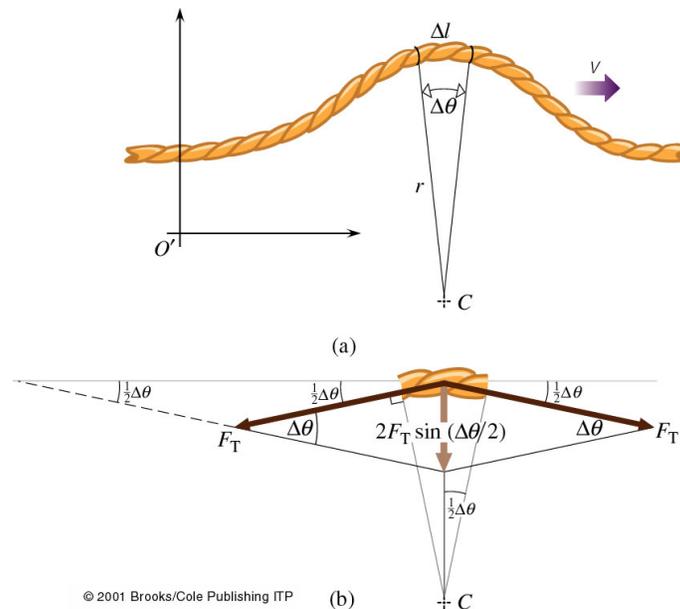


Figure 9.3: (a) Une impulsion ondulatoire sur une corde tendue se déplaçant à la vitesse v . (b) La vitesse v est déterminée par la tension de la corde, F_T et sa masse linéique μ .

De la figure, nous déduisons que chaque extrémité du segment est soumise à une force égale à F_T et tangente à la corde. La somme de ces deux vecteurs force de tension est un vecteur radial de module $2F_T \sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)$, tandis que les composantes tangentielles s'éliminent, car il n'y a aucune accélération tangentielle. Cette somme vectorielle est égale

à la force centripète et nous trouvons:

$$\Delta m \left(\frac{v^2}{r} \right) = 2F_T \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\theta\right)$$

Le segment étant petit comparé à r , nous pouvons écrire $\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta) \approx \frac{1}{2}\Delta\theta$ et alors:

$$\Delta m \left(\frac{v^2}{r} \right) \approx F_T \Delta\theta \approx \frac{F_T \Delta l}{r}$$

où $\Delta\theta = \Delta l/r$. Puisque par définition $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta l}$, nous trouvons:

$$v^2 \approx \frac{F_T}{\mu}$$

À condition que l'impulsion soit faible, de façon que la déformation de la corde reste faible, on peut écrire:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad (9.4)$$

On constate alors que *la vitesse de l'onde dépend seulement de la tension de la corde (F_T) et de ses caractéristiques inertielles (μ)*. Si μ est grande, la corde a beaucoup d'inertie et la vitesse est faible et si F_T est grande, la corde tend à revenir à sa position d'équilibre plus rapidement et la vitesse est plus grande.

Généralisation

On peut généraliser cette constatation sur la vitesse de l'onde aux ondes de compression qui se propagent dans les fluides et les solides (par exemple, les ondes acoustiques et les ondes sismiques). Ces ondes de pression sont des ondes longitudinales dont l'amplitude est parallèle au sens de propagation de l'onde. Dans les liquides leur vitesse peut s'exprimer comme:

$$v_{\text{liquide}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

où B est une constante qui exprime la compressibilité du liquide (et dépend des propriétés du liquide) et ρ est sa masse volumique. Dans les solides, la vitesse d'onde peut s'exprimer comme:

$$v_{\text{solide}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

où E est le module d'élasticité, une constante qui représente la déformabilité d'un solide (et dépend des propriétés du solide) et ρ est sa masse volumique. Dans un gaz un trouve que d'onde acoustique se propage avec une vitesse

$$v_{\text{gaz}} \propto \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

où P est la pression, qui dépend à la température du gaz, et ρ est sa masse volumique. Notons qu'il faut une grande augmentation de pression pour diminuer le volume d'un solide comparé à celui d'un liquide et B ainsi que E sont généralement d'autant plus grands que

Milieu	Vitesse (m/s)
Air (0°C)	331
Air (20°C)	343
Helium (0°C)	970
Ethyl alcohol	1170
Eau (20°C)	1480
Granite	6000
Aluminium	6420

Tableau 9.1: La vitesse du son.

le milieu est plus dense (plus grands si le milieu est plus rigide).

En résumé, la vitesse de propagation d'une onde mécanique est déterminée par les propriétés élastiques et inertielles du milieu, et d'une manière générale on trouve que:

$$v = \sqrt{\frac{\text{facteur de force élastique}}{\text{facteur d'inertie}}}$$

Exemple 9.3.1. Une corde horizontale de 40 g et 2.0 m de long passe autour d'une poulie de masse négligeable et sans frottement. Elle porte à son extrémité libre une masse de 2.0 kg. Calculer la vitesse de propagation d'une impulsion ondulatoire sur cette corde. Négligez le poids de la partie de la corde en suspension.

Solution. Données: une corde de $l = 2.0$ m, $m = 40$ g et portant une charge de 2.0 kg. À trouver: v .

La vitesse de l'onde est $v = \sqrt{F_T/\mu}$. Nous devons déterminer F_T et μ . La tension est exactement la charge en Newtons, soit $(2.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 19.62 \text{ N}$. La masse linéique $\mu = (0.040 \text{ kg})/(2.0 \text{ m}) = 0.020 \text{ kg/m}$. D'où: $v = \sqrt{F_T/\mu} = \sqrt{19.62 \text{ N}/0.02 \text{ kg/m}} = 31 \text{ m/s}$. ◀

Exemple 9.3.2. Une explosion a eu lieu à une faible profondeur au-dessous de la surface de l'océan. Calculer la vitesse de l'onde de compression résultante mesurée par des instruments placés à quelques mètres au-dessous d'un navire. La masse volumique de l'eau de la mer est $1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $B = 2.2 \text{ GPa}$.

Solution. On a : $v = \sqrt{B/\rho} = 1.46 \times 10^3 \text{ m/s}$. C'est quatre fois la vitesse du son dans l'air (tableau 9.1). ◀

9.4 Énergie d'onde

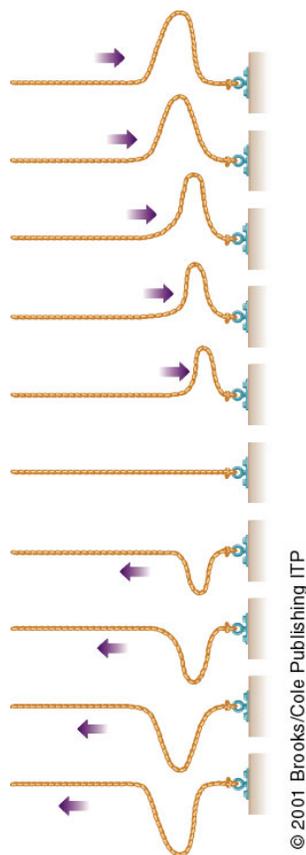
Quand on envoie une onde dans une corde tendue, on fournit de l'énergie pour le mouvement de la corde. En se déplaçant, l'onde transporte cette énergie sous forme d'énergie cinétique E_C et d'énergie potentielle élastique E_P . L'énergie cinétique d'un élément de corde à chaque position dépend de sa vitesse transversale $v_y = dy/dt$, tandis que l'énergie potentielle dépend de l'étirement de l'élément de corde. On aura aux deux cas extrêmes:

- En $y = 0$: L'élément de corde de masse $dm = \mu dx$ a un déplacement minimum. La vitesse transverse est maximale, donc E_C est maximale. L'élément est étiré au maximum, dont $E_P = 0$.
- En $y = y_{max}$: Le déplacement est maximal, dont E_P est maximale et $E_C = 0$, puisque la vitesse est zero.

On peut montrer que l'énergie transmise par une onde élastique est proportionnelle au carré de l'amplitude (y_m^2) et au carré de la fréquence angulaire (ω^2).

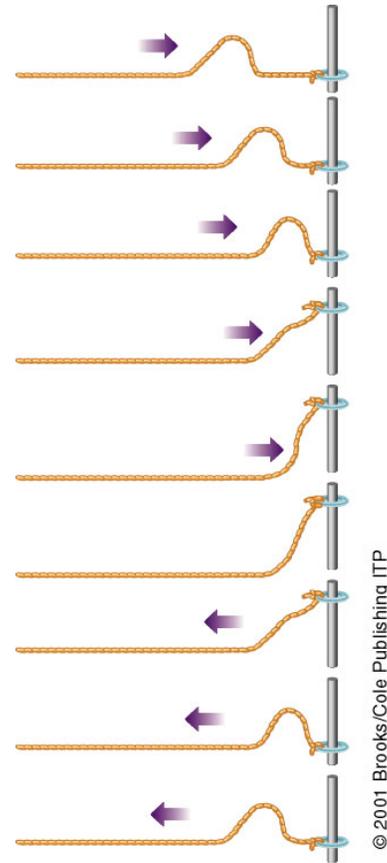
9.5 Réflexion, absorption et transmission

Chaque type d'ondes peut subir des réflexions, des absorptions et des transmissions en interagissant avec les milieux matériels. Considérons une corde de longueur finie, dont une des extrémités est tenue fixe (figure 9.4) ou complètement libre (figure 9.5).



© 2001 Brooks/Cole Publishing ITP

Figure 9.4: Réflexion d'une impulsion d'onde sur l'extrémité fixe d'une corde. En arrivant à cette extrémité, l'impulsion exerce une force verticale sur le point d'ancrage. Celui-ci exerce, par réaction, une force opposée sur la corde. Quand la corde tire vers le haut, la fixation tire vers le bas. C'est cette force vers le bas, exercée par la fixation sur la corde, qui engendre l'onde réfléchie renversée par rapport à l'onde incidente et qui se propage dans le sens opposé.



© 2001 Brooks/Cole Publishing ITP

Figure 9.5: Réflexion d'une impulsion sur l'extrémité libre d'une corde. Cette extrémité monte jusqu'à ce que toute l'énergie du segment extrême soit emmagasinée élastiquement. Elle s'arrête à un déplacement vertical maximum égal au double de la hauteur de crête de l'onde incidente. Ainsi transportée vers le haut par son inertie, le segment final tire la corde vers le haut, générant une impulsion réfléchie non renversée par rapport à l'onde incidente, et qui se propage en sens opposé.

En rencontrant un **obstacle fixe**, l'énergie ne peut que se réfléchir. L'onde réfléchie transporte toute l'énergie incidente. À l'extrémité fixe, nous devons avoir $y_i + y_r = 0$, alors $y_r = -y_i$. L'onde réfléchie est donc de même amplitude, de même longueur d'onde **mais** de signe opposé. Elle est déphasée de 180° .

L'extrémité de la **corde libre** monte jusqu'à ce que toute l'énergie soit emmagasinée élastiquement. La corde descend ensuite, produisant une onde réfléchie de même amplitude, même longueur d'onde et de même signe. Il y a alors réflexion sans changement de phase. Un effet similaire a lieu quand les vagues à la surface de l'eau viennent frapper un mur.

Si l'extrémité d'une corde dissipe de l'énergie par frottement ou autre processus, l'impulsion réfléchie a moins d'énergie, donc l'amplitude est plus petite; nous disons qu'il y

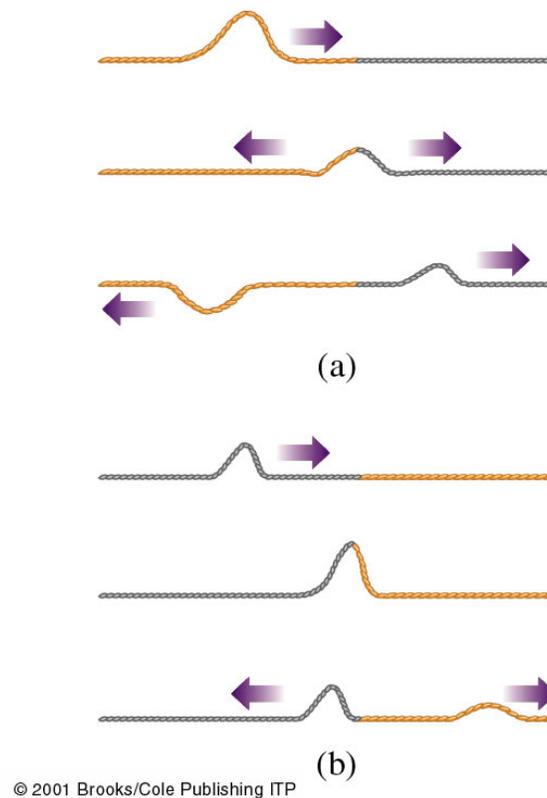


Figure 9.6: Réflexion et transmission d'une impulsion ondulatoire en un point séparant deux milieux. La corde la plus sombre a une plus grande masse linéique.

a une **absorption**. Quand une onde passe d'un milieu à un autre avec des caractéristiques différentes, il y a redistribution de l'énergie; dans ce cas, nous parlons de **transmission**. Discutons les deux cas suivants (figure 9.6):

- Cas (a): Soit une impulsion ondulatoire se propageant sur une corde de faible masse linéique μ qui arrive sur l'interface avec une deuxième corde de masse linéique plus grande. La plus grande inertie de la deuxième corde gêne le mouvement à l'interface. Le second milieu exerce une force de réaction qui s'oppose au mouvement et produit une onde réfléchie renversée (déphasage 180°).
- Cas (b): Si le premier milieu est plus dense que le second, la situation ressemble à celle d'une extrémité libre. Il n'y a alors aucun changement de phase de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente.

Si l'onde incidente est périodique, l'onde transmise aura la même fréquence mais une vitesse différente, donc λ différent ($v = \lambda f$). Plus un milieu est dense, plus la longueur d'onde est courte. Le fait que les fréquences des ondes incidente, réfléchie et transmise soient les mêmes est vrai quelle que soit la nature de la perturbation (mécanique, lumineuse...).

Une fraction de l'énergie incidente est transmise dans le second milieu. Les vitesses des impulsions dans les deux cordes sont différentes (analogie avec chocs élastiques) car les deux cordes ont la même tension mais des masses linéiques différentes.

9.6 Le son

L'idée que le son est un phénomène ondulatoire est très ancienne. L'onde sonore est longitudinale car elle se propage dans des fluides qui n'ont aucune raideur. Une onde mécanique transversale ne peut donc pas s'y propager car un fluide ne donne pas prise au cisaillement. Comme la matière ne se déplace pas avec l'onde, la vitesse de cette dernière peut être très grande. Le son se propage dans tout milieu qui peut réagir élastiquement. La région entre source et détecteur doit contenir une quantité de matière suffisante pour transmettre la modulation: Le son ne se propage pas dans le vide mais seulement dans un milieu matériel.

Dans la suite, l'accent est mis sur la notion physique du son, onde élastique longitudinale. Les idées de base s'appuient quand même sur notre expérience sensorielle. Nous allons alors relier à des grandeurs physiques les notions physiologiques de hauteur, intensité et timbre des sons.

9.6.1 Les ondes sonores

Considérons un haut-parleur soumis à un signal sinusoïdal. Le cône flexible du haut-parleur vibre sinusoïdalement et produit dans l'air environnant, un *son simple*; c'est une série de couche de condensation et de raréfaction (figure 9.7). La variation résultante de pression à partir de la pression d'équilibre ou **pression acoustique** qui constitue les ondes sonores est assez faible.

Contrairement aux ondes se propageant le long d'une corde, les ondes de compression sont difficiles à visualiser directement. Cependant, dans le cas d'une onde qui se propage dans une direction O_x , nous pouvons représenter graphiquement le déplacement des particules du milieu (positif s'il est dans le sens de propagation et négatif dans le cas contraire) en fonction de la position x du point du milieu. Dans le cas d'une onde de compression d'une seule fréquence, la courbe représentative est une sinusoïde. Nous aurions pu aussi représenter graphiquement la masse volumique ou la pression acoustique dans le milieu en fonction de x et les courbes seraient aussi sinusoïdales (figure 9.8). Cette représentation est utile quand il s'agit d'instruments à vent.

Comme la pression acoustique P_G , en un point donné du milieu, peut être détectée par un microphone et observée facilement à l'aide d'un oscilloscope, une représentation graphique de P_G serait préférable. À titre d'exemple, la figure 9.8 montre le son engendré par un diapason.

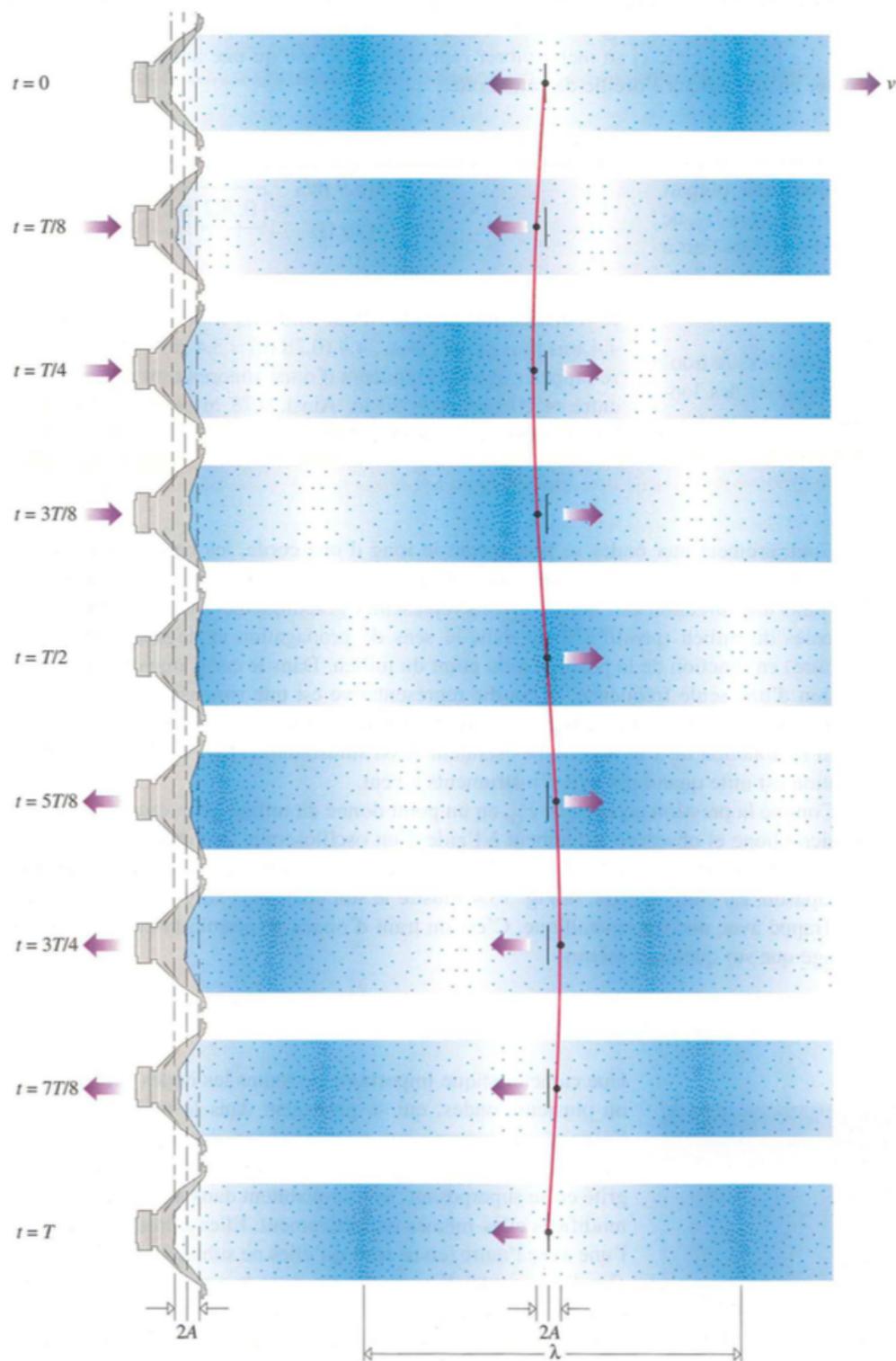


Figure 9.7: Onde sonore engendrée par un haut-parleur. Noter que le cône du haut-parleur balaie une distance totale égale à $2A$. Chaque atome d'air oscille aussi sur un segment de longueur $2A$. Comparer cette distance à la longueur d'onde λ .

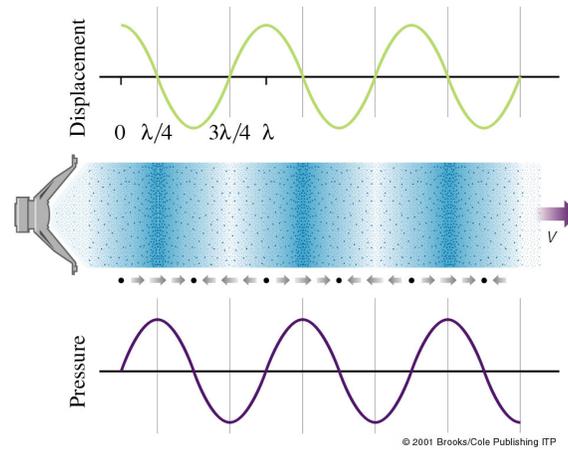


Figure 9.8: Dans le cas d'une onde sonore sinusoïdale, là où la pression acoustique est extremum, le déplacement est nul. Quand la pression acoustique est positive (là où il y a condensation) les atomes se déplacent dans la direction de propagation de l'onde.

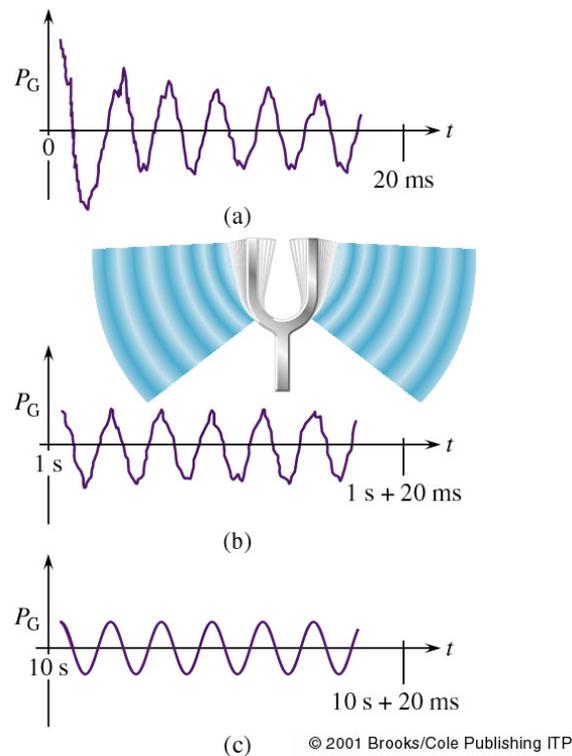


Figure 9.9: Pression acoustique engendrée par un diapason et observée à l'aide d'un oscilloscope: (a) immédiatement après avoir frappé le diapason; (b) après avoir oscillé pendant 1 s; (c) après avoir oscillé pendant 10 s. Lorsque le temps s'écoule, les vibrations du diapason de hautes fréquences sont amorties, laissant finalement une courbe régulière presque sinusoïdale.

La vitesse du son La vitesse du son dans un gaz parfait est égale à

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

où P est la pression et ρ la masse volumique. La variable γ est caractéristique du moyen de transmission (comme nous verrons plus tard dans ce cours); pour les gaz diatomiques, $\gamma = 1.4$. Cette équation ne prévoit aucune variation de la vitesse du son avec sa fréquence. Ce fait est confirmé chaque fois vous écoutez de la musique dans une grande salle ou un stade; tous les sons arrivent ensemble, les hautes fréquences atteignent votre oreille en même temps que les basses fréquences.

Matériau	Vitesse (m/s)
Air (20°)	343
Air (0°)	331
Hélium	1005
Hydrogène	1300
Eau	1440
Fer et Acier	~ 5000
Verre	~ 4500
Aluminium	~ 5100

Tableau 9.2: Vitesse du son

9.7 Superposition des ondes

Une caractéristique importante de toutes les ondes est que deux ou plusieurs ondes qui se propagent dans la même région de l'espace se superposent pour produire des effets caractéristiques facilement observables. *Dans la région où deux ou plusieurs ondes du même type se superposent, l'onde résultante est la somme algébrique des contributions de ces ondes en chaque point.* C'est le **principe de superposition**, un des principes fondamentaux de la théorie des ondes. Les ondes continuent à se déplacer indépendamment l'une aux autres. L'onde résultante n'est pas en général une onde sinusoïdale simple mais une onde composite.

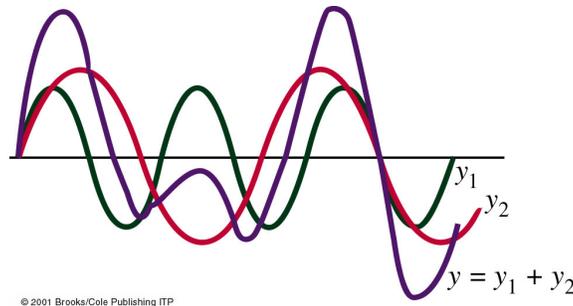


Figure 9.10: Superposition de deux ondes sinusoïdales de fréquences différentes. On voit que l'onde résultante $y = y_1 + y_2$ n'est pas sinusoïdale.

Analyse de Fourier Une utilisation très astucieuse du principe de superposition fut introduite par Jean-Baptiste Fourier (1786-1830) pour analyser des ondes non sinusoïdales.

Selon Fourier, toute fonction périodique de fréquence f (fonction dont la structure est reproductible à intervalles réguliers) peut être décomposée en une somme de sinus et cosinus avec des amplitudes et des phases appropriées:

$$y'(x, t) = a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

avec $\omega = 2\pi f$. Le premier terme a la même fréquence f : c'est le **fondamental** ou le **premier harmonique** ($f_1 = f$). Le terme suivant, de fréquence $f_2 = 2f$ est appelé **deuxième harmonique**, et ainsi de suite. Notons que pendant le temps $1/f_1$ que met le fondamental pour décrire un cycle complet, le deuxième harmonique a décrit deux cycles et le $n^{\text{ème}}$ harmonique n cycles. La fréquence de l'onde résultante est donc la fréquence f du fondamental (figure 9.11).

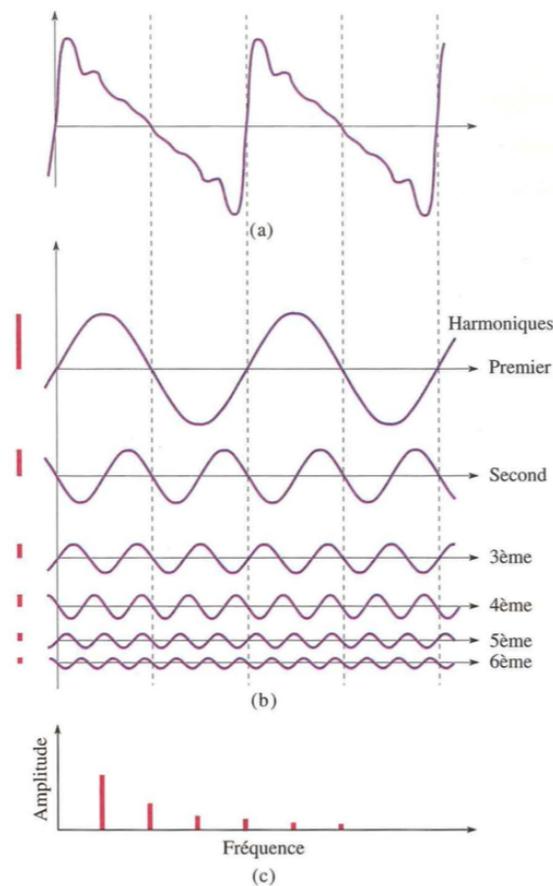


Figure 9.11: (a) Synthèse d'une onde en 'dents de scie'. (b) Ici, les six premiers harmoniques se combinent pour former une courbe qui ressemble clairement à la courbe en dents de scie. En ajoutant une douzaine d'autres termes on obtient une meilleure approximation. (c) Une représentation des amplitudes des différents harmoniques qui contribuent à l'analyse de Fourier. C'est ce qu'on appelle *spectre de fréquence*.

Interférence d'ondes Supposons qu'on envoie 2 sinusoïdes cohérentes (ondes qui sont synchrones, même ω) dans la même direction le long d'une corde tendue. Le résultat va dépendre du déphasage (décalage) des deux sinusoïdes.

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Selon le principe de superposition:

$$y'(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \Rightarrow$$

$$y'(x, t) = (2y_m \cos \frac{1}{2}\phi) \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi)$$

car: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. L'onde résultante est aussi une sinusoïde voyageant dans la même direction, mais qui diffère des ondes originales par sa phase et son amplitude. Pour $\phi = 0^\circ$: l'interférence de deux ondes est **totale constructive** et dans ce cas l'amplitude d'oscillation double. Pour $\phi = 180^\circ$: l'interférence de deux ondes est **totale destructive** et la corde n'oscille pas.

NB: On réserve le terme interférence à la superposition d'ondes *cohérentes*, ondes qui sont synchrones (même ω) et dont le déphasage relatif ne varie pas avec le temps.

Battements Lorsque des ondes de fréquences voisines f_1 et f_2 se superposent, elle produisent des battements. Ceci est valable aussi bien pour les ondes sonores que pour les ondes lumineuses. L'intensité augmente et diminue à la fréquence $(f_1 - f_2)$, la *fréquence des battements*. Ce qu'on entend est la note de l'onde porteuse dont l'intensité passe par des maxima à la fréquence des battements. Un exemple illustratif est donné sur la figure 9.12.

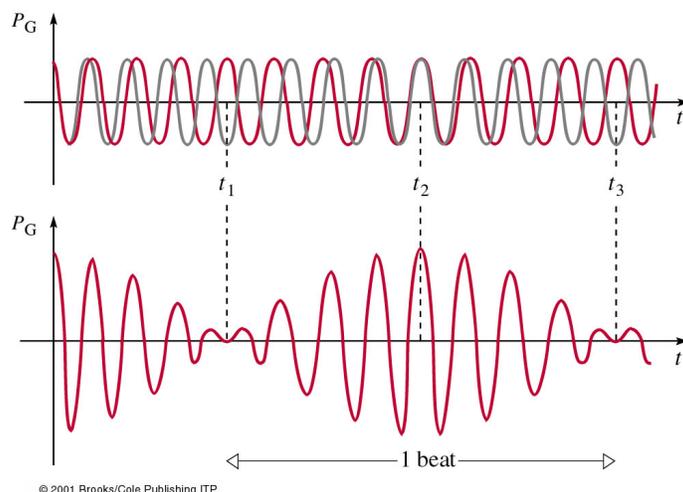


Figure 9.12: Le battement. Notons qu'en t_1 et t_3 , les deux ondes sont en opposition de phase tandis qu'en t_2 , elles sont en phase.

9.8 Les ondes stationnaires

Lorsqu'un train d'ondes de type quelconque est produit dans un milieu fini (une corde ou un tambour), il se propage jusqu'à ce qu'il rencontre la frontière du milieu où, en général, une certaine fraction de l'énergie de l'onde se réfléchit. Si la perturbation est entretenue, le milieu s'emplit rapidement des ondes qui se propagent dans un sens et dans l'autre.

Ces ébranlements se superposent (interfèrent) pour former une distribution stationnaire d'énergie appelée, un peu paradoxalement, *onde stationnaire*.

Ondes stationnaires sur une corde Prenons une corde de longueur L fixée à une extrémité. Si une onde sinusoïdale rencontre cette extrémité, il y aura une onde réfléchie qui sera l'image symétrique inversée de l'onde incidente; deux ondes sont donc présentes sur la corde et se propagent dans des directions opposées. Les ondes incidente et réfléchie se combinent pour produire une onde stationnaire caractérisée par des positions fixes ayant un déplacement nul, **les nœuds**, et des positions fixes ayant un déplacement maximal, **les ventres**.

Pour les deux ondes on peut écrire:

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

D'après le principe de superposition:

$$y'(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Le terme entre crochets peut être interprété comme l'amplitude de l'oscillation d'un élément de corde à la position x . Cette fonction ne représente pas une onde progressive ($y = f(kx \pm \omega t)$) mais une onde stationnaire.

L'amplitude de cette onde sera strictement nulle pour certaines valeurs de k telles que $\sin kx = 0$ en tout temps t . Ces valeurs définissent des nœuds qui se trouvent à $kx = n\pi$, avec $n = 0, 1, 2, \dots$, d'où $x = n\frac{\lambda}{2}$, où λ est la longueur d'onde. On aura les ventres aux positions où $|\sin kx|$ se maximise, soit $|\sin kx| = 1 \Rightarrow kx = \frac{\pi}{2} + n\pi$, d'où $x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$, avec $n = 0, 1, 2, \dots$

Le tableau suivant fait le résumé des positions des nœuds et ventres pour les ondes stationnaires sur une corde.

	kx	$x = f(\lambda)$
Nœuds	$n\pi$	$n\frac{\lambda}{2}$
Ventres	$\frac{\pi}{2} + n\pi$	$(n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

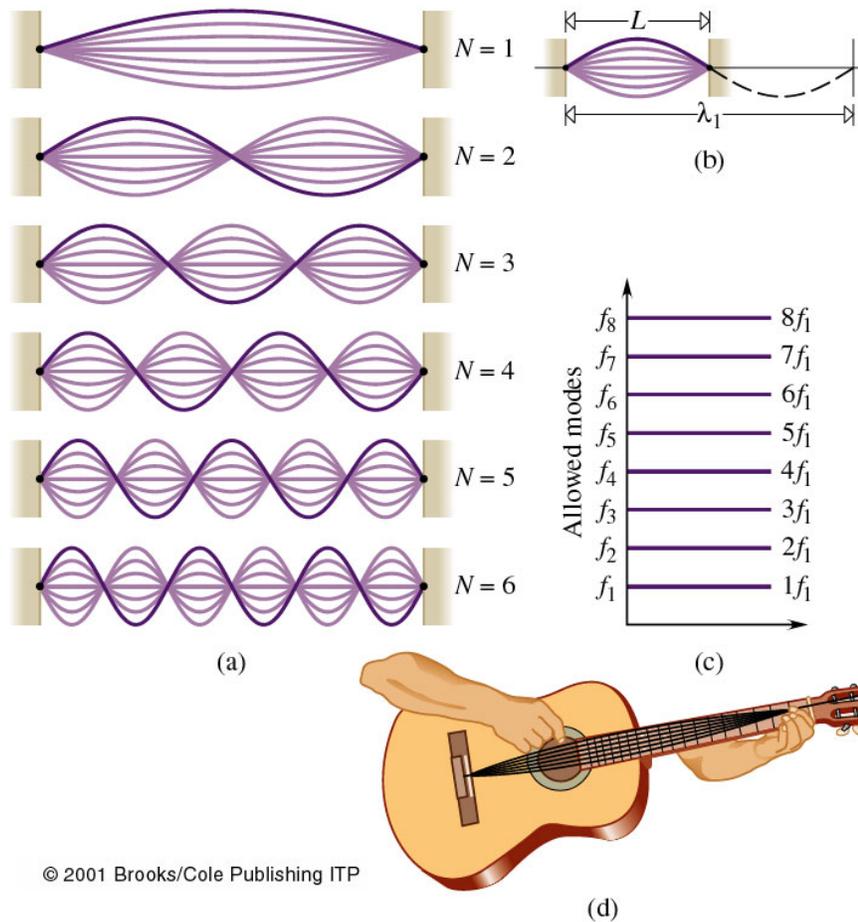
Pour une corde fixée aux 2 extrémités, il doit y avoir au moins 2 nœuds, un à chaque extrémité. Ceci limite les fréquences d'une onde stationnaire le long d'une corde; seule les ondes dont L est un multiple entier de $\lambda/2$ peuvent exister. On a alors la condition $L = \frac{1}{2}N\lambda$ où N est un entier (figure 9.13). Les fréquences possibles correspondantes ($f = v/\lambda$) sont:

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1$$

La fréquence la plus basse f_1 , correspond au **mode fondamental** ou première harmonique et la fréquence f_n à l'harmonique d'ordre n :

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

La longueur d'onde λ est déterminé uniquement par la longueur de la corde. La fréquence f dépend aussi de la vitesse v , qui est donnée par la tension et la masse linéique.



© 2001 Brooks/Cole Publishing ITP

Figure 9.13: (a) Modes d'une onde stationnaire sur une corde avec un nœud à chaque extrémité. (b) La longueur d'onde du mode fondamental ($N = 1$) est $2L$. (c) Quelques premiers modes d'oscillation (harmoniques). (d) Une application importante des ondes stationnaires.

Application aux instruments de musique à cordes: Pour la guitare et le violon, toutes les cordes ont la même longueur, mais des masses linéiques différentes (on accorde en réglant la tension). Pour le piano et la harpe, les cordes ont en plus des longueurs différentes (note basse provient d'une corde longue et lourde). Galilée comprit qu'une corde vibrante "fait vibrer l'air qui l'entoure", produisant un son de même fréquence que la corde. Les cordes vibrantes ne peuvent pas ébranler une grande quantité d'air, car elles n'émettent pas elles-mêmes des sons de grande intensité. À cause de cela, elles sont toujours couplées à des caisses de résonance (comme dans les pianos, violons et guitares).

Ondes stationnaires dans un tuyau sonore Une colonne d'air peut être excitée de plusieurs façons pour se mettre à osciller: la plupart des bois sont excités par une anche vibrante, pour les cuivres ce sont les vibrations des lèvres du musiciens, l'orgue et la flûte reçoivent un jet d'air. La cavité d'air oscille initialement avec une large bande de fréquences, mais seules les fréquences stationnaires de la cavité subsistent et s'amplifient.

- **Pour un tuyau fermé aux deux extrémités:** les configurations d'ondes stationnaires sont les mêmes que pour une corde aux extrémités fixes:

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

où v est la vitesse du son dans l'air.

- **Pour un tuyau ouvert à une extrémité:** il peut être considéré comme la moitié d'un tuyau fermé aux deux extrémités:

$$f_n = n \frac{v}{4L} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

Ici on a seulement des harmoniques impairs. Les ondes sonores de compression subissent un déphasage de 180° quand elles se réfléchissent sur une extrémité ouverte. Tous les instruments en cuivre sont fermés à une extrémité par la bouche de l'instrumentiste. Dans le cas d'une trompette, quand on presse les pistons, on ouvre une boucle supplémentaire; cela augmente la longueur du tuyau et la trompette joue plus bas.

- **Pour un tuyau ouvert aux 2 extrémités:** on a le même résultat que pour un tuyau fermé aux 2 extrémités à l'exception de l'emplacement des noeuds et ventres.

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

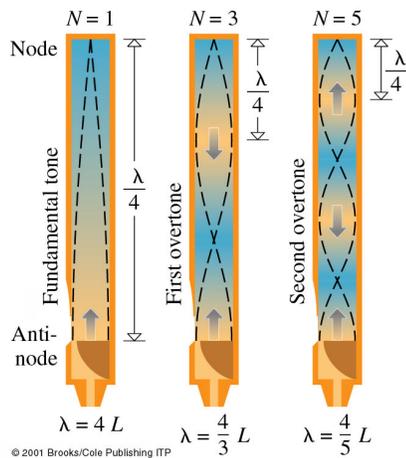


Figure 9.14: Quelques ondes stationnaires dans un tuyau d'orgue ouvert à son extrémité inférieure. Les flèches indiquent la direction de déplacement de l'air pendant la moitié d'un cycle. Les lignes tiretées indiquent les positions des noeuds et des ventres de déplacement. Tous les instruments en cuivre sont fermés à une extrémité par la bouche de l'instrumentiste.

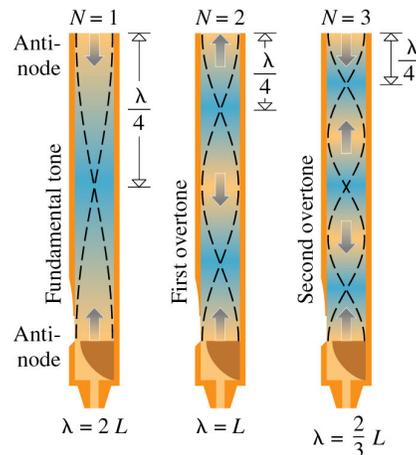


Figure 9.15: Les premières ondes stationnaires dans un tuyau sonore ouvert à ses deux extrémités. Les flèches indiquent la direction du mouvement de l'air pendant la moitié d'un cycle. Ici, les deux extrémités du tuyau sont à la pression atmosphérique ($P_m = 0$); ce qui correspond à un noeud de pression.

Audition des sons - la musique

En musique, on définit les grandeurs suivantes:

- **Un intervalle:** Le rapport des fréquences fondamentales de deux sons, ω/ω' .
Si $\omega/\omega' = 2$ on a un octave.
- **Un accord:** Un intervalle dont le rapport des fréquences est donné par deux petits nombres entiers. Par exemple: Quinte do-sol: $\omega/\omega' = 3/2$.
- **Le timbre:** Nous permet de distinguer les sons d'une flûte, un saxophone ou un violon. Il est donné par les composantes de Fourier.
- **Le volume sonore:** Dépend du spectre de fréquence, de la durée et surtout de l'intensité du son.

9.9 Niveau d'intensité**Intensité sonore**

Une des caractéristiques importantes des ondes est l'énergie qu'elle transporte par unité de temps et par unité de surface. C'est ça qu'on appelle **l'intensité sonore**. Si une surface S placée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde reçoit une puissance moyenne P_m , l'intensité (I) de l'onde est définie comme le rapport

$$I = \frac{P_m}{S}$$

L'intensité s'exprime en W/m^2 . Si une surface de 2 m^2 reçoit une puissance de 1 W , lorsqu'elle est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, l'intensité de l'onde est $0.5 \text{ W}/\text{m}^2$.

Sensibilité de l'oreille humaine

L'oreille est un détecteur sonore incroyable:

- La plage de fréquence s'étend de 20 Hz à $20'000 \text{ Hz}$.
- L'intensité audible minimale est de $10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$.
- L'intensité maximale admise (*seuil de douleur*) est en général $1 \text{ W}/\text{m}^2$.

Notre perception sonore n'est pas directement proportionnelle à l'intensité. Pour que le volume sonore perçu double, il faut que l'intensité de l'onde sonore soit multipliée par 10. L'oreille est sensible au logarithme de l'intensité. C'est la loi de Fechner: *Un être humain perçoit le volume sonore d'une onde d'intensité $10^{-2} \text{ W}/\text{m}^2$ comme environ deux fois plus élevé que celui d'une onde sonore d'intensité $10^{-3} \text{ W}/\text{m}^2$ et comme environ 4 fois plus élevé que celui d'une onde sonore d'intensité $10^{-4} \text{ W}/\text{m}^2$.*

A cause de cette relation entre la sensation subjective du volume sonore et l'intensité qui est une quantité mesurable, on exprime en général le niveau d'intensité sonore à l'aide d'une échelle logarithmique.

Le niveau d'intensité (ou niveau sonore, β) d'une onde acoustique se définit comme le nombre de multiplications par 10 nécessaires pour obtenir sa valeur à partir de seuil d'audibilité $I_o = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

$$\beta = 10 \log_{10} I/I_o$$

Il s'exprime en utilisant l'unité bel en hommage à Alexander Graham Bell qui mena d'importantes recherches en acoustique. Si $I = 10^n I_o$, le niveau sonore est de n bels. On exprime la performance d'un amplificateur acoustique, un récepteur, un haut-parleur etc. en une unité plus petite, le décibel (dB), le dixième du bel. Le seuil audible est $\beta = 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$. L'étendue totale de niveau sonore audible correspond à 120 dB ('concert de Rock'), valeur qui correspond à une intensité de $I = 1 \text{ W/m}^2$.

Exemple 9.9.1. Considérons 10 violons identiques, jouant chacun à un niveau sonore de 70 dB. Quel sera le niveau sonore s'ils jouent ensemble?

Solution. Données: 10 sources à 70 dB chacune. À trouver: le niveau sonore de l'ensemble. L'intensité varie de I , à $2I$, à $3I$, ... jusqu'à $10I$. Pour calculer β pour deux violons nous avons:

$$10 \log_{10} \frac{2I}{I_o} = 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} \frac{I}{I_o}$$

et le niveau sonore est 3 dB + 70 dB. Ainsi en doublant l'intensité, le niveau sonore augmente de 3 dB. Avec 3 instruments jouant, le niveau sonore s'élève à 75 dB; avec 4, il s'élève à 76 dB; et ainsi de suite jusqu'à 10 il atteint alors 80 dB. Dix violons produisent une intensité 10 fois celle d'un seul violon et donc 1 bel (10 dB) en plus et ceci correspond à doubler le volume sonore perçu.

9.10 Effet Doppler

Chaque sorte d'onde se propage dans un milieu homogène à une vitesse constante qui dépend seulement des propriétés physiques du milieu. Cela est vrai quelque soit le mouvement de la source: la source émet l'onde qui se propage. Cependant, la perception de la fréquence d'une onde et de sa longueur d'onde peut être modifiée considérablement par un mouvement relatif entre l'observateur et la source. Nous avons tous observé un changement dans la fréquence quand une ambulance s'approche puis s'éloigne. La hauteur du son est plus aigu lorsque l'ambulance s'approche et plus grave lorsqu'elle s'éloigne. Ce phénomène est appelé **effet Doppler**.

Nous envisagerons les 3 situations suivantes: Source en mouvement, observateur au repos; Source au repos, observateur en mouvement; et, Source et observateur en mouvement.

Source en mouvement, observateur au repos La situation la plus simple à analyser est celle d'une onde émise par une source qui se déplace vers un observateur immobile. Essentiellement le mouvement de la source réduit l'écart entre les fronts d'onde successifs avançant dans le sens de ce mouvement. Ainsi l'observateur trouve une longueur d'onde plus petite et une fréquence plus grande.

Supposons qu'à l'instant initial ($t = 0$), la source était au point 0. À l'instant t , elle s'est déplacée d'une distance $v_s t$. Dans un temps T , la première crête parcourt une

distance $d = \lambda_s = vT$. Dans le même temps, la source parcourt une distance $d_s = v_s T$. La distance entre deux crêtes d'ondes successives, qui est la nouvelle longueur d'onde λ_o , en est réduite:

$$\lambda_o = d - d_s = \lambda_s - v_s \frac{\lambda_s}{v} = \lambda_s \left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_s = -v_s \lambda_s / v$$

La variation de la longueur d'onde est proportionnelle à la vitesse v_s de la source. La fréquence entendue par l'observateur vaut:

$$f_o = \frac{v}{\lambda_o} = \frac{v}{\lambda_s(1 - v_s/v)} = f_s \frac{v}{v - v_s}$$

Comme le dénominateur est plus petit que v , on a $f_o > f_s$. Si la source s'éloigne de l'observateur, on trouve:

$$f_o = f_s \frac{v}{v + v_s}$$

et $f_o < f_s$.

Source au repos, observateur en mouvement L'effet Doppler se produit aussi quand l'observateur bouge par rapport à une source au repos. Si l'observateur se rapproche de la source, le son est plus aigu. Si, au contraire, il s'en éloigne, le son devient plus grave. Quantitativement, la variation de fréquence est légèrement différente de celle correspondant à la source en mouvement. Dans ce cas, la distance entre les crêtes, la longueur d'onde λ_s , ne change pas, mais la vitesse de défilement des crêtes vue par l'observateur change. Si l'observateur se rapproche de la source, cette vitesse est $v' = v + v_o$ où v_o est la vitesse de l'observateur. La fréquence perçue par l'observateur est donc:

$$f_o = \frac{v'}{\lambda_s} = \frac{v + v_o}{\lambda_s} = f_s \frac{v + v_o}{v}$$

Si l'observateur s'éloigne de la source, la vitesse relative est: $v' = v - v_o$ et

$$f_o = f_s \frac{v - v_o}{v}$$

Effet Doppler - cas général On peut combiner les résultats précédents en une seule formule valable dans le cas où soit la source soit l'observateur est en mouvement, ou dans le cas où les deux bougent:

$$f_o = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \quad (9.5)$$

où v_o est la vitesse de l'observateur et v_s est la vitesse de la source.

Les signes supérieurs s'appliquent si la source et l'observateur se rapprochent l'un de l'autre, les signes inférieurs s'ils s'éloignent. L'effet Doppler n'est perceptible que si v_o ou v_s n'est pas négligeable par rapport à v et si aucune de ces vitesses n'excède v .

Applications Lorsqu'un obstacle en mouvement réfléchit une onde sonore, la fréquence de l'onde réfléchie est, à cause de l'effet Doppler, différente de l'onde incidente. La combinaison de l'onde incidente et de l'onde réfléchie produit une interférence qui cause des battements. La fréquence des battements est égale à la différence des deux fréquences.

Il existe plusieurs applications de l'effet Doppler en médecine où on utilise généralement des ondes ultrasoniques dans un domaine de fréquences se situant dans le mégahertz; par exemple, les ondes réfléchies par les globules rouges permettent de déterminer la vitesse du sang.

Le même phénomène s'applique aux ondes électromagnétiques, et en particulier à la couleur (partie visible du spectre électromagnétique). On parle alors de "blue shift" et de "red shift" selon que la source lumineuse se rapproche ou s'éloigne, respectivement.

Exemple 9.10.1. Une voiture roule à 20.0 m/s en émettant un son de sirène de fréquence $f_s = 600$ Hz. Déterminez la fréquence perçue par un observateur immobile lorsque la voiture s'approche et quand elle s'éloigne. Prendre la vitesse du son égale à 340 m/s.

Solution. Données: $v_s = \pm 20$ m/s, $v = 340$ m/s et $f_s = 600$ Hz. À trouver: f_o . Nous utilisons l'équation 9.5. Nous posons $v_o = 0$ et nous calculons f_o lorsque la voiture s'approche ($v_s = -20.0$ m/s) et lorsqu'elle s'éloigne ($v_s = 20.0$ m/s). Ainsi, lorsque la voiture s'approche, l'observateur perçoit la fréquence:

$$f_o = \frac{vf_s}{v + v_s} = 638 \text{ Hz}$$

et lorsque la voiture s'éloigne:

$$f_o = \frac{vf_s}{v + v_s} = 567 \text{ Hz}$$



Chapitre 10

Propriétés thermiques de la matière, énergie thermique et chaleur

Les derniers chapitres de ce cours sont consacrés à l'étude de l'énergie interne emmagasinée par le mouvement et l'interaction des atomes d'un système. Cette discipline est appelée *physique thermique* ou *thermodynamique* et elle traite dans ce chapitre la température, le transfert d'énergie et la transformation de l'énergie, dans les deux prochains chapitres.

La température est une grandeur fondamentale comme la masse et le temps. Elle est habituellement associée à la concentration d'énergie thermique dans un système matériel. L'énergie thermique est une forme d'énergie interne d'un système caractérisé par trois variables: pression (P), volume (V) et température (T). Macroscopiquement, on étudie les variations de (P,V,T) sous forme de chaleur au moyen des lois de la thermodynamique. Microscopiquement, les quantités (P,V,T) sont associées à la quantité de mouvement et l'énergie cinétique des molécules du système.

Dans la suite on se consacre à l'étude de l'énergie interne, de la chaleur et de leurs effets sur le comportement de la matière. Il pose une base pour l'étude de la Thermodynamique, qui sera traitée au prochain chapitre. Nous essaierons de répondre à des questions telles que: qu'est-ce que la chaleur? Quelle est la relation entre la température et la chaleur? Qu'arrive-t-il à la matière lorsqu'on lui fournit ou on lui prend de l'énergie? Comment l'énergie thermique est-elle transférée d'un endroit à un autre? Pour tout être vivant, les processus thermiques ont une importance vitale à chaque moment de sa vie. À un niveau plus grandiose, ces idées sont à la base d'une compréhension plus complète du concept d'énergie, donc d'une compréhension plus profonde des changements qui ont lieu partout dans l'Univers.

Contenu

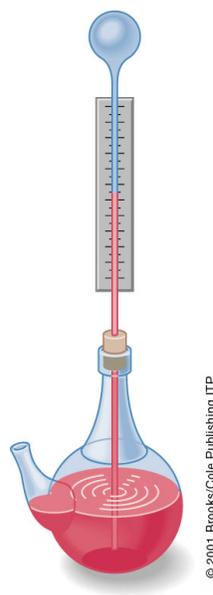
10.1	Température	168
10.2	Dilatation thermique des solides	169
10.3	Lois des gaz parfaits	172
10.4	Gaz réels	174
10.5	Diagramme des phases	175
10.6	Théorie cinétique	176
10.7	Énergie thermique	181

10.8 Changement de phase	187
10.9 Transfert d'énergie thermique	191

10.1 Température

Comme beaucoup d'autres grandeurs physiques, on a su mesurer la température avant de la comprendre. Galilée semble être le premier à avoir inventé (vers 1592) un dispositif pour indiquer le "degré d'échauffement" (figure 10.1).

Figure 10.1: Le thermoscope de Galilée n'est pas appelé thermomètre parce que l'échelle était arbitraire. La boule de la taille d'un oeuf est placée au sommet et joue le rôle d'un détecteur. Le volume du gaz qu'elle contient augmente ou diminue selon de degré d'échauffement et le niveau du liquide monte ou descend.



En explorant le comportement de la matière à l'aide du thermomètre, rapidement évolué par rapport à la première version de Galilée, on a trouvé que certains phénomènes survenaient à des températures fixes. Boyle, Hooke et Huygens remarquèrent indépendamment vers 1665 que ce fait pourrait fournir un point de référence fiable pour tout thermomètre. Hooke proposa d'utiliser le point de congélation de l'eau et Huygens son point d'ébullition.

L'échelle encore employée dans certains pays, comme les États-Unis, a été conçue par un fabricant d'instruments G.D.Fahrenheit (1717). Ne voulant pas utiliser des valeurs négatives, il a mis le 0 à la température la plus froide qu'il pouvait alors atteindre, celle d'un mélange d'eau, de glace et de sel de mer. Il mit le point de référence supérieur à la température normale du corps humain, qu'il prit à 96. La distance entre ces deux points est divisée en 96 parties égales, ce qu'on appelle aujourd'hui degrés Fahrenheit.

L'échelle qui est encore dans les travaux scientifiques modernes est associée au nom d'un homme qui ne fut pas le premier à la proposer. Anders Celsius (1742) utilisa les points de congélation et d'ébullition de l'eau comme points de référence et partagea cet intervalle en 100 parties égales. Mais étrangement, il mit le point de congélation à 100°C et le point d'ébullition à 0°C. Cette échelle était connue sous le nom de l'échelle centigrade de température, ou, de nos jours, échelle Celsius.

Comme l'échelle Fahrenheit va de 32°C à 212°C correspondant à un total de 180 divisions et l'échelle Celsius va de 0°C à 100°C, les relations de transformation de degrés

Celsius à degrés Fahrenheit, et vice-versa, sont:

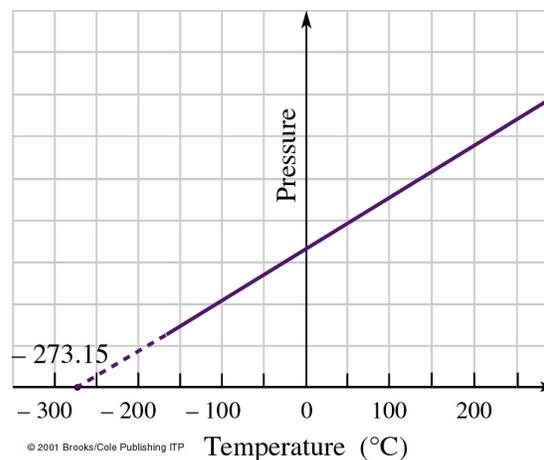
$$T_F = 32^\circ + (9/5)T_C \quad \text{ou} \quad T_C = (5/9)(T_F - 32^\circ)$$

Par exemple, la température du corps humain est 98.6°F que est équivalent à 37°C.

Température absolue et zéro absolu Les échelles de Fahrenheit et de Celsius n'ont que très peu de lien avec la nature fondamentale du concept de température. Est-ce qu'il y a un lien fondamental entre la notion de température, la matière et l'énergie? Est-ce qu'il y a un zéro universel de température? La réponse est oui. Ce zéro est appelé *zéro absolu de température*. Nous verrons dans la suite le lien entre ce zéro absolu de température, la matière et l'énergie.

Lorsqu'on diminue la température d'un gaz à volume constant, la pression varie linéairement jusqu'à la liquéfaction du gaz. Le processus s'arrête alors brusquement. Presque tous les gaz ont ce comportement. Quand on prolonge cette droite vers les basses températures, elle croise l'axe de pression nulle à une température qui est la même pour tous les gaz: -273.15°C . C'est le *zéro absolu* (voir sur la figure 10.2 pour une démonstration graphique).

Figure 10.2: Variation de la pression d'un gaz, à volume constant, en fonction de la température. Si le gaz se refroidit, ses atomes perdent une partie de leur énergie thermique; ils se déplacent alors plus lentement et entrent en collision avec les parois de l'enceinte moins fréquemment et moins énergiquement. Par conséquent, la pression dans l'enceinte diminue. Tous les gaz se comportent essentiellement de la même façon. Leurs graphiques de P en fonction de T sont tous des droites de pentes différentes, mais qui coupent toutes l'axe de la température ($P = 0$) au même point, le zéro absolu -273.15°C . La situation est similaire pour une variation du volume à pression constante.



William Thomson (devenu plus tard Lord Kelvin) proposa en 1848 une échelle absolue de température qui était en parfait accord avec les résultats du thermomètre à gaz à volume constant. Son évolution est la définition moderne de la *température thermodynamique* ou *absolue* en Kelvin (K):

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15$$

10.2 Dilatation thermique des solides

L'homme s'est très tôt aperçu que la plupart des matériaux se dilatent lorsqu'ils sont chauffés. Néanmoins, il fallut attendre la mesure de la température pour qu'une étude quantitative de la **dilatation thermique** devienne possible. Les premiers thermomètres, eux-mêmes, utilisaient le changement du volume des gaz et des liquides, ce qui a été une raison de plus pour étudier l'effet.

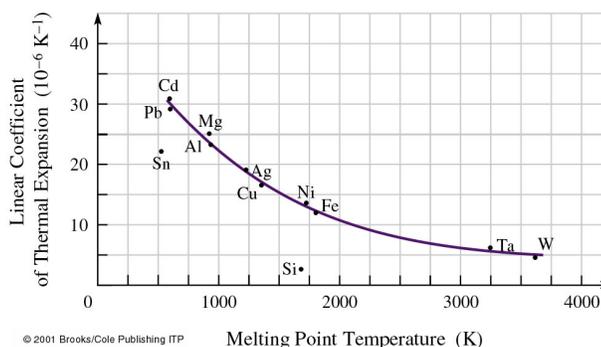
Dilatation linéique: Pour des solides longilignes, on trouve:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

Ici ΔT peut être exprimée soit en °C, soit en kelvin, car la variation de température est la même dans les deux échelles. Le coefficient α est le **coefficient de dilatation linéique**. L'expérience montre que c'est une grandeur caractéristique du matériau.

La dilatation est un résultat des propriétés atomiques des matériaux. En chauffant un corps, les amplitudes de vibration de ses atomes augmentent ainsi que les distances qui les séparent. Plus le point de fusion d'un matériau est élevé, plus la liaison interatomique est forte et plus le coefficient de dilatation linéique est petit (figure 10.3).

Figure 10.3: Plus le point de fusion d'un matériau est élevé, plus la liaison interatomique est forte et plus le coefficient de dilatation linéique est faible.



Dilatation volumique: Solides et liquides Utilisant la même procédure que plus haut, nous pouvons écrire une expression de la variation du volume ΔV d'une substance, lorsqu'elle subit une variation de température ΔT ; on trouve:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

Ici, V_0 est le volume initial et β est le coefficient de *dilatation volumique*. Notons que les valeurs de ce coefficient pour les liquides sont environ 50 fois plus grandes que pour les solides, ce qui est prévisible. La faible force intermoléculaire caractéristique de l'état liquide est la raison pour laquelle les liquides sont à la fois plus compressibles et se dilatent thermiquement plus que les solides. En règle générale, β diminue si la température absolue diminue et tend vers zéro lorsque T s'approche de 0 K.

On peut montrer qu'en général, $\beta \approx 3\alpha$. Si les cotés d'un volume varient de L à $(L + \Delta L)$, la variation de volume s'écrit (négligeant les termes en ΔL^2 et ΔL^3 dans ce développement:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (L_0 + \Delta L)^3 - L_0^3 \approx 3L_0 \Delta L = 3V_0 \Delta L / L_0 \Rightarrow \\ \Delta V &= 3V_0 \alpha \Delta T \end{aligned}$$

soit $\beta \approx 3\alpha$.

Exemple 10.2.1. Un tableau d'affichage dans un stade en plein air est soutenu par une poutre en acier. La poutre mesure 12 m de long au moment de la pose un jour d'hiver à 0°C. Quelle sera sa longueur un jour d'été à 32°C?

Solution.

Avec $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = 4.6 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Matériau	α (K ⁻¹)	β (K ⁻¹)	Temp. (°C)
Aluminium	22.1×10^{-6}		-23
Aluminium	23.0×10^{-6}	72×10^{-6}	20
Aluminium	33.5×10^{-6}		527
Ciment	$\sim 12 \times 10^{-6}$	$\sim 35 \times 10^{-6}$	20
Acier	12×10^{-6}	36×10^{-6}	20
Verre (Pyrex)	3×10^{-6}	9×10^{-6}	20

Tableau 10.1: Les coefficients de dilatation linéique (α) et volumique (β) pour certains solides à des températures différentes.

Matériau	β (K ⁻¹)	Temp. (°C)
Acétone	1487×10^{-6}	20
Mercure	181×10^{-6}	20
Ether	1630×10^{-6}	20
Eau	207×10^{-6}	20

Tableau 10.2: Les coefficients de dilatation volumique (β) pour certains liquides

Exemple 10.2.2. Un automobiliste fait le plein avec 56 litres d'essence à 10°C. Il rentre chez lui et gare sa voiture dans un garage à 20°C. Quelle quantité d'essence risque de s'échapper du réservoir? Supposez que le réservoir soit en acier. $\beta_{\text{essence}} = 950 \times 10^{-6}\text{K}$ et $\beta_{\text{acier}} = 36 \times 10^{-6}\text{K}$

Solution. Calculons d'abord la variation de volume de l'essence: Volume de 56 litres = $56 \text{ dm}^3 = 0.056 \text{ m}^3$. Le ΔT est de 10 degrés.

$$\Delta V_e = \beta_e V_e \Delta T = 5.32 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Le volume du réservoir en acier augment de:

$$\Delta V_r = \beta_r V_r \Delta T = 0.202 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

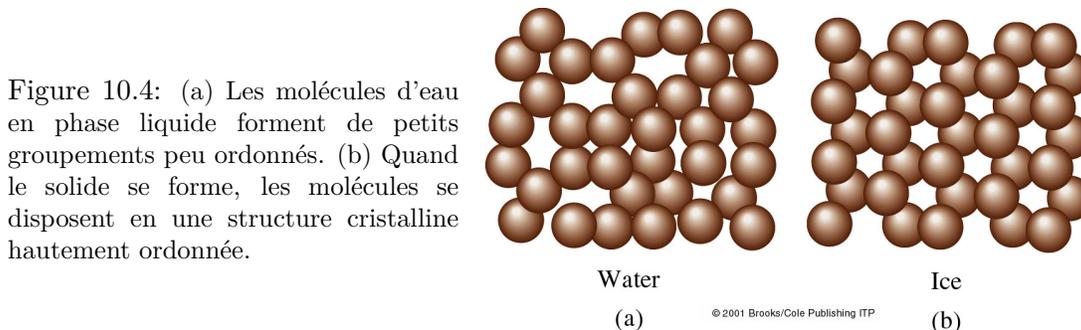
Ainsi le volume qui déborde vaut: $\Delta V_e - \Delta V_r = 0.51 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 0.51 \text{ litres}$. Quand un objet homogène se dilate ou se contracte, toutes les cavités ou déformations de l'objet se dilatent ou se contractent proportionnellement. ◀

Cas particulier de l'eau L'eau est spécialement importante pour nous; son comportement physique a donc un grand intérêt. Comme la majorité des liquides, l'eau se contracte légèrement en refroidissant, et de ce fait, devient un peu plus dense. Cependant, ceci est un comportement unique, la densité de l'eau augmente progressivement jusqu'à 277.13 K (3.98°C) où elle passe par un maximum, puis elle diminue légèrement jusqu'à la congélation à 0°C.

Ce phénomène s'explique en considérant la structure moléculaire de l'eau. L'eau se cristallise en une structure ordonnée qui prend plus d'espace que la structure en phase liquide. Ainsi, au-dessous de 3.98°C le volume du liquide augmente et la masse volumique diminue. La masse volumique de l'eau à 273 K (0°C) est 999.8 kg/m^3 tandis que celle de

la glace est seulement 917 kg/m^3 . C'est pour ça qu'un iceberg flotte. En baissant encore la température, la glace se contracte et elle continue à se contracter jusqu'à $\approx 75 \text{ K}$. Ce comportement de l'eau solide flottant dans l'eau liquide est une rareté. Il y a quelques autres substances, telles que le bismuth, l'antimoine et la fonte qui ont un comportement analogue; mais en règle générale, les substances à l'état solide sont plus denses qu'à l'état liquide.

Conséquences pour la vie aquatique: oxygénation des lacs en profondeur et tout plan d'eau gèle de haut en bas. Ainsi, la vie aquatique peut se maintenir par grand froid.



10.3 Lois des gaz parfaits

Parce qu'un gaz se répand pour remplir le récipient qui le contient, un gaz n'obéit pas à une simple loi de variation de volume avec la température. La quantité de gaz dans un récipient donné contribue à déterminer la pression à l'intérieur et c'est cette pression P , avec la température T , le volume V du récipient et la masse m du gaz qui sont les observables. Nous développons dans la suite une formule qui lie toutes ces variables en une *équation d'état*.

Les 3 lois suivantes décrivent le comportement des gaz sous des conditions bien définies. Ce sont des relations fondamentales établies expérimentalement:

- **Loi de Boyle-Mariotte:**

$$PV = \text{constante} \quad [T \text{ constante}]$$

P en fonction de V est une hyperbole.

- **Loi de Gay-Lussac:**

$$P/T = \text{constante} \quad [V \text{ constant}]$$

Quand le volume d'un gaz reste constant, la pression absolue d'une quantité de gaz varie proportionnellement à la température.

- **Loi de Charles:**

$$V/T = \text{constante} \quad [P \text{ constante}]$$

La loi de Charles reflète la relation $\Delta V = V_0 \beta \Delta T$; la pente $\Delta V / \Delta T$ est une constante.

NB: Dans ces lois, T est la température absolue, mesurée en K.

Les trois lois précédentes suggèrent que pour une quantité donnée du gaz:

$$\frac{PV}{T} = \text{constante}$$

Si la masse m du gaz varie aussi, la loi qui décrit le comportement du gaz est:

$$PV = b m T$$

Pourtant, la masse des particules individuelle joue un rôle moins important que le nombre total de particules. Ainsi, l'expérience montre que la constante b prend une valeur différente selon les gaz, sauf si on utilise le *nombre de moles* n plutôt que la masse:

$$PV = n R T \quad (10.1)$$

où R est la constante des gaz parfaits qui prend la même valeur pour tous les gaz:

$$R = 8.314510 \pm 0.000070 \text{ J/mol K}$$

appelée **la constante universelle des gaz**. Un gaz qui obéit à l'équation 10.1 est un *gaz parfait* et cette équation est connue comme la **loi des gaz parfaits**.

Le nombre total de molécules, N , est lié au nombre de moles, n , par le nombre d'Avogadro: $N = n N_A$. Alors:

$$PV = n R T = \frac{N}{N_A} R T = N k_B T$$

où k_B est la constante de Boltzmann:

$$k_B = \frac{R}{N_A} = (1.380658 \pm 0.000012) \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

et correspond à l'énergie par molécule par degré de température absolue. La loi des gaz parfaits s'écrit alors:

$$PV = N k_B T \quad (10.2)$$

Cette expression est une autre façon de dire la même chose et la constante de Boltzmann est, en fait, l'une des constantes fondamentales de la nature.

Exemple 10.3.1. Un réservoir de volume 1 m^3 est rempli d'air à 20 fois la pression atmosphérique à 0°C . Quel sera le volume occupé par ce gaz à 1 atm à 20°C ?

Solution. Comme $PV/T = \text{constante}$, on peut écrire:

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow V_f = \frac{P_i V_i T_f}{T_i P_f} = 21.5 \text{ m}^3$$

Notez: (a) Il faut utiliser les températures absolues (Kelvin). (b) L'augmentation de volume provient principalement de la diminution de pression.

Exemple 10.3.2. Déterminez le volume d'une mole de n'importe quel gaz qui se comporte comme un gaz parfait dans les Conditions Normales de Pression et de Température (CNTP).

Solution.

$$V = \frac{n R T}{P} = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Une mole de n'importe quel gaz parfait occupe 22.4 litres sous CNTP (0°C, 1 atm). ◀

Question pour réfléchir. Nous avons deux boîtes qui ont le même volume. Un de deux est rempli avec de hélium. L'autre a la même masse d'azote. On a la même pression dans les deux cas. Quelle est la relation entre les deux températures?

- (a) $T_{He} > T_N$
- (b) $T_{He} < T_N$
- (c) $T_{He} = T_N$

10.4 Gaz réels

Correction à la description d'un gaz parfait Dans un *gaz parfait* les molécules sont ponctuelles et sans interactions, sauf lors de collisions élastiques. Dans un *gaz réel*, les molécules ont un volume propre et interagissent à distance.

Il faut alors apporter deux corrections à la description d'un gaz parfait pour approcher celle d'un gaz réel:

- Les molécules ont une taille finie dont il faut tenir compte.
- Il existe une force d'interaction entre les molécules, donc elles ne se comportent pas comme des particules indépendantes.

Ces deux corrections résultent à deux équations suivantes:

- **L'équation d'état de Clausius** corrige le volume V pour la taille finie des molécules:

$$P(V - nb) = n R T, \quad \text{ou} \quad P(v - b) = R T$$

où $v = V/n$ le volume occupé par une mole. Le paramètre b tient compte du volume occupé par les molécules dans chaque mole, qui est égal au volume non disponible par mole de gaz.

- **L'équation d'état de van der Waals** corrige la pression P pour l'existence d'une force d'interaction entre les molécules:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R T$$

Le paramètre a tient compte des forces intermoléculaires dans le gaz. Les constantes a et b sont différentes pour chaque gaz.

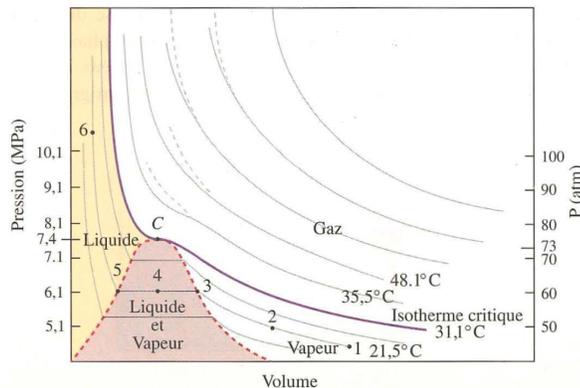
N.B.: Aucune des nombreuses équations d'état proposées à ce jour ne décrit exactement le comportement de tous les gaz.

Liquéfaction Une quantité donnée d'un gaz parfait à une température fixe obéit à la relation $PV = \text{constante}$. Le graphique de P en fonction de V pour une valeur de T donnée est une hyperbole. Les lignes qui correspondent aux différentes températures sont les isothermes. Quand on construit le même type de diagramme PV pour des gaz réels, on trouve certaines différences importantes. Nous pouvons voir cela sur la figure 10.5:

- Les courbes en pointillé représentent le comportement d'un gaz parfait.
- Les courbes en continu représentent le comportement d'un gaz réel.
- La courbe C illustre le comportement d'un gaz à une température critique et le point c porte le nom de **point critique**. C'est un point sous lequel un gaz devient liquide lorsqu'on lui applique une pression suffisante tandis qu'au-dessus, aucune pression ne peut le faire changer d'état.

À noter qu'il est impossible de liquéfier un gaz qui n'est pas refroidi sous sa température critique.

Figure 10.5: Isothermes du dioxyde de carbone. Au-dessous de l'isotherme critique (en pourpre) et à droite du point C , le CO_2 existe à l'état de vapeur non saturée. Le liquide et la vapeur saturée coexistent dans la région du milieu (en pourpre) et le liquide existe seul dans la région de gauche (en orange).



10.5 Diagramme des phases

La figure 10.6 est un diagramme typique dans le plan PT , appelé *diagramme des phases*; il résume les relations entre les phases solide, liquide et gazeuse d'une substance, ici l'eau. On identifie:

- La courbe de vaporisation ou d'ébullition, courbe OC (liquide-vapeur); elle correspond à la pression de vapeur saturante. Le point C est le point critique, le point où le liquide et le gaz coexistent à la même densité et ne peuvent pas être différenciés.
- La courbe de fusion, courbe solide-liquide; à toute pression au-dessus du point O correspond une température à laquelle un solide pur est en équilibre avec son état liquide.
- Le point triple, point O ; toutes les trois phases coexistent en équilibre.
- La courbe de sublimation, courbe solide-vapeur; en augmentant la température d'un solide soumis à une pression fixe au-dessous de celle du point triple, on le fait passer directement de l'état solide à l'état de vapeur. Les forces de liaison intermoléculaires

dans la glace sont si faibles que même à la température ambiante, elle peut se transformer directement en vapeur. Le processus inverse a lieu en abaissant la température à une pression fixe inférieure à celle du point triple: la vapeur se condense directement à l'état solide.

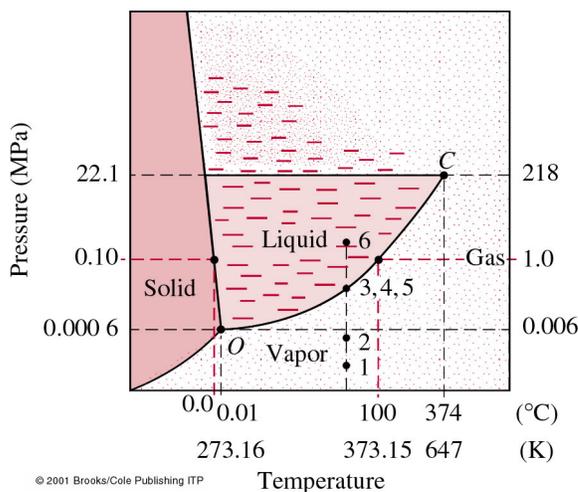


Figure 10.6: Diagramme des phases de l'eau. Si nous prenons un bloc de glace à la pression atmosphérique et si nous augmentons lentement sa température, il fond complètement à 273 K (0°C) et reste liquide jusqu'à 373 K (100°C), où il s'évapore complètement. La courbe de fusion de l'eau s'élève vers la gauche: Seules les substances qui se dilatent en atteignant le point de congélation, comme l'eau, présentent un tel comportement (e.g. celle du CO_2 s'élève vers la droite).

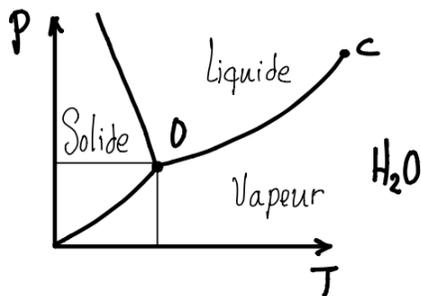
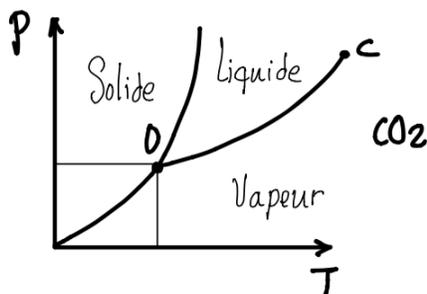


Figure 10.7: Comparaison qualitative entre les diagrammes de phase de CO_2 et de H_2O .

10.6 Théorie cinétique

Le fait que la matière soit constituée d'atomes qui se déplacent constamment dans toutes les directions a été établi à partir des lois de la mécanique classique et porte le nom de théorie cinétique. Cette théorie permet de relier l'énergie cinétique moyenne des molécules du gaz à la température en Kelvin.

Un gaz réel à faible pression et loin du point de liquéfaction se comporte en pratique comme un gaz parfait et peut être étudié en utilisant cette théorie qui repose sur les hypothèses suivantes:

- Le volume du récipient contient un très grand nombre N de molécules de masse m qui se déplacent sans direction précise avec des vitesses différentes.
- La distance moyenne d entre les molécules est très supérieure à leur diamètre D , $d \gg D$.
- Les molécules obéissent aux lois de la mécanique classique et n'interagissent que lorsqu'elles entrent en collision (on néglige les forces d'attraction entre elles en dehors des collisions).
- On considère que les chocs entre molécules ou avec les parois rigides du récipient sont parfaitement élastiques.

La pression exercée par le gaz sur les parois est attribuable aux collisions des molécules contre ces parois. Lors d'une collision, la grandeur de la force exercée équivaut au taux de variation de la quantité de mouvement: $F = \Delta p / \Delta t$.

La figure 10.8 représente un récipient de volume L^3 , fermé par un piston. La pression exercée sur le piston est due aux millions de chocs qu'il subit chaque seconde de la part des molécules du gaz.

Considérons une molécule seule. Le mouvement d'une molécule de masse m peut être décomposé selon les directions x , y et z . Lors d'une collision élastique d'une molécule sur la paroi normale à x , seule la composante x est renversée, les composantes y et z de sa vitesse restent inchangées.

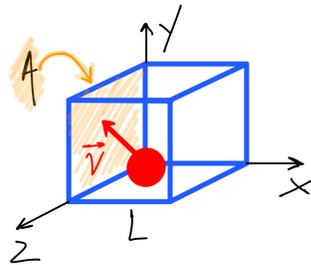


Figure 10.8: Une molécule; seule la composante v_x change de direction lors de la collision avec la surface.

Alors le changement à la quantité de mouvement à cause de cette collision est:

$$\Delta p_x = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

et le temps mis pour parcourir un volume de côté L et surface A est:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

Le taux de transfert de la quantité de mouvement au piston correspond à la force moyenne exercée par cette seule particule sur le piston.

Pour N molécules avec des vitesses différentes:

$$F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{m}{L} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \dots + v_{xN}^2) = \frac{m}{L} N \overline{(v_x^2)}$$

où $\overline{(v_x^2)} = (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \dots + v_{xN}^2)/N$.

D'après Pythagore, la vitesse moyenne exprimée en fonction des composantes s'écrit:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Puisque les particules se déplacent dans toutes les directions avec la même probabilité:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

d'où $\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$. Dès lors, la force s'écrit:

$$F = N \frac{m}{L} \overline{v_x^2} = N \frac{m}{3L} \overline{v^2}$$

et la pression devient:

$$P = \frac{F}{A} = N \frac{m}{3LA} \overline{v^2} = N \frac{m}{3V} \overline{v^2}$$

Cette dernière équation peut s'écrire:

$$PV = \frac{1}{3} N m \overline{v^2}$$

En nous rappelant que l'énergie cinétique de translation d'un objet est $E_C = \frac{1}{2} m v^2$, on peut écrire:

$$PV = \frac{1}{3} N m \overline{v^2} \Rightarrow PV = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} N \overline{E_C}$$

En comparant avec l'équation des gaz parfaits, $PV = N k_B T$, on trouve que la température peut être écrite en terme de l'énergie cinétique moyenne de translation des molécules du gaz:

$$T = \frac{2}{3} \frac{1}{k_B} \overline{E_C} \quad (10.3)$$

ce qui mène à la conclusion suivante:

La température d'un gaz parfait est proportionnelle à la moyenne de l'énergie cinétique de translation de ses molécules et ne dépend pas de la nature du gaz.

Vitesse des molécules dans un gaz

Nous déduisons de l'équation 10.3 et du fait que $\overline{E_C} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$:

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$$

C'est la moyenne du carré de la vitesse. Si nous prenons sa racine carrée, nous obtenons une quantité appelée *vitesse quadratique moyenne*:

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Cette vitesse ressemble à la vitesse moyenne, mais elle n'est pas la vitesse moyenne. En effet, une analyse statistique montre que

$$\bar{v} = 0.92 v_{qm}$$

Mais quelle distribution suivent ces vitesses? Les molécules d'un gaz réel subissent un très grand nombre de collisions les unes avec les autres, $\sim 10^5$ collisions par cm parcouru. L'effet de ce très grand nombre de collisions n'est pas de réduire les vitesses des molécules ou de les rendre égales, mais de les distribuer selon une loi de distribution particulière avec des vitesses allant de zéro à l'infini. C'est le physicien écossais J.C.Maxwell qui était le premier à trouver la distribution des vitesses des molécules d'un gaz. Son résultat, connu sous le nom de *distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann* est le suivant:

$$P(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (10.4)$$

Pour un gaz donné, la distribution de Maxwell dépend uniquement de la température. La surface sous ces courbes comprise entre 2 vitesses quelconques est égale au pourcentage du nombre total de molécules, N , qui ont une vitesse dans cet intervalle (la surface totale sous la courbe est 100%). Pour obtenir le nombre de particules dans cet intervalle de vitesse, il faut multiplier ce pourcentage par le nombre total de particules, N . La majorité des vitesses est concentrée autour de v_{qm} et seulement 1 molécule sur 10000 a une vitesse supérieure à $3v_{qm}$.

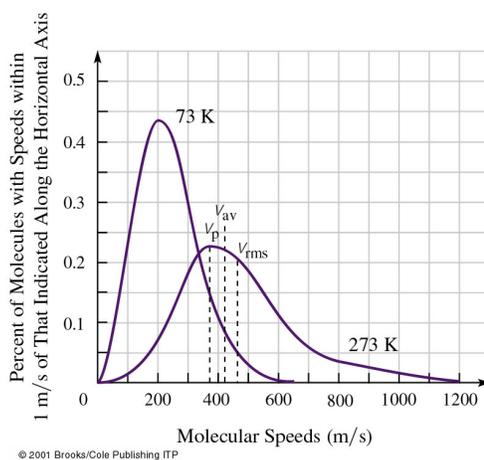


Figure 10.9: La distribution de Maxwell-Boltzmann de la vitesse des molécules de l'oxygène à $T = 73 \text{ K}$ et $T = 273 \text{ K}$. L'aire sous une courbe entre deux vitesses quelconques, disons 400 m/s et 600 m/s, est égale au pourcentage du nombre total N de molécules qui ont une vitesse dans cet intervalle. L'aire totale sous chacune de ces courbes est 100%. Si on multiplie le pourcentage dans tout intervalle de vitesse par le nombre total de molécules, on obtient le nombre de molécules dans cet intervalle de vitesse.

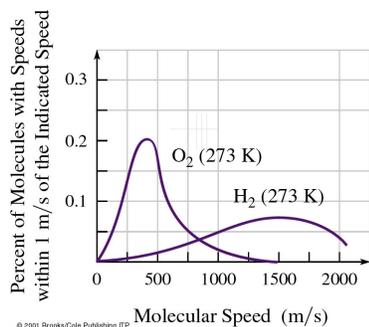


Figure 10.10: Aux mêmes températures, les molécules d'hydrogène et d'oxygène ont la même énergie cinétique moyenne; les molécules d'hydrogène moins lourdes se déplacent donc plus vite.

Question pour réfléchir. La vitesse de chaque molécule dans un gaz est augmentée par un facteur 4. Ça résulte à une augmentation de la température T du gaz par un facteur:

- (a) 2
- (b) 4
- (c) 16
- (d) T ne change pas

Le libre parcours moyen La distance parcourue par une molécule entre 2 collisions est variable: la moyenne sur un très grand nombre de chocs s'appelle le libre parcours moyen. Considérons un gaz constitué de molécules semblables de rayon r dans un cylindre de rayon $2r$. Supposons que toutes les molécules, dont la concentration est n_v , sont au repos sauf celle de gauche. Par conséquent, le nombre de celles dont le centre se trouve à l'intérieur du cylindre est égal à $n_v \times$ Volume du cylindre, ce qui donne aussi le nombre de collisions qui se produiront, soit:

$$n_v V = n_v A l = n_v \pi(2r)^2 \bar{v} \Delta t$$

Le libre parcours moyen λ , défini comme la distance moyenne entre les collisions, sera donc:

$$\lambda = \frac{\bar{v} \Delta t}{n_v V} = \frac{\bar{v} \Delta t}{n_v \pi(2r)^2 \bar{v} \Delta t} = \frac{1}{n_v 4\pi r^2}$$

On constate que λ est inversement proportionnel à l'aire de section (πr^2) des molécules et à leur concentration (nombre/volume), n_v . Le nombre total des collisions subies dans l'intervalle Δt dépend plutôt de la vitesse relative v_{rel} des molécules qui s'entrechoquent. Le nombre de collisions par seconde doit s'écrire avec v_{rel} plutôt que \bar{v} . Un calcul précis montre que $\overline{v_{rel}} = \sqrt{2} \bar{v}$, alors:

$$\lambda = \frac{1}{n_v 4\pi \sqrt{2} r^2}$$

Le libre parcours moyen des molécules d'air au niveau de la mer est $\sim 0.1 \mu\text{m}$. À une altitude de 100 km, la masse volumique de l'air a diminué si bien que $\lambda = 16 \text{ cm}$. À une altitude de 300 km, λ serait de 20 km.

Exemple 10.6.1. Calculer le libre parcours moyen pour les molécules d'air à CNTP. Le diamètre des molécules de O_2 et N_2 est d'environ $3 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Solution. Calculons d'abord la concentration (nombre de molécules par unité de volume) des molécules d'air. On a vu qu'une mole de gaz parfait occupe toujours un volume de 22.4 litres dans les conditions CNTP, donc par mole:

$$n_v = \frac{(1 \text{ mole})(6.022 \times 10^{23} \text{ molécules/mole})}{22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 2.69 \times 10^{25} \text{ molécules/m}^3$$

Donc:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi\sqrt{2} (1.5 \times 10^{-10} \text{ m})^2 (2.69 \times 10^{25} \text{ molécules/m}^3)} \approx 9 \times 10^{-8} \text{ m}$$

ce qui représente 300 fois le diamètre d'une molécule. C'est la raison pour laquelle il faut attendre un certain temps avant qu'un parfum se répande dans une pièce; les molécules se déplacent à grandes vitesses mais en zigzag dans toutes les directions.

Libre parcours moyen et diffusion Si deux gaz de masses moléculaires différentes sont mélangés dans une enceinte, les molécules du gaz les plus légères sont animées de la vitesse moyenne v_{qm} la plus élevée. Si on perce une petite ouverture dans cette enceinte, c'est le gaz le plus léger qui s'échappera le plus rapidement. Cette conclusion fut confirmée expérimentalement par Rayleigh en 1896 en séparant partiellement deux gaz en les faisant diffuser à travers une barrière poreuse vers une enceinte vide.

Cette idée inspira l'un des procédés conçus pendant la 2^{ème} Guerre Mondiale pour produire la bombe atomique. Le matériau de la bombe, l'uranium 235 fissile, est inclus dans le minerai, mélangé avec l'uranium 238, non fissile, plus lourd, mais chimiquement identique. On a en fait 0,7% d'uranium 235 dans l'uranium naturel et les centrales nucléaires utilisent un uranium enrichi à 3%-5% d'uranium 235. L'uranium naturel est combiné au fluor pour former l'hexafluorure d'uranium gazeux UF_6 . On fait diffuser ce gaz environ 4000 fois à travers des barrières contenant chacune des milliards de trous minuscules, plus petits que le dixième du libre parcours moyen ($< 10 - 5$ mm). Etant plus léger, l'uranium 235 passe à travers les barrières plus facilement, se séparant de l'uranium 238.

10.7 Énergie thermique

Dans un solide les atomes se heurtent constamment les uns aux autres et vibrent en restant au voisinage de leur position d'équilibre. Dans un liquide les positions d'équilibre des atomes se déplacent et chaque atome vibre avec une plus grande amplitude. Dans un gaz les oscillations disparaissent et le mouvement est essentiellement libre, jusqu'à ce que les atomes entrent en collision. *Une grande partie de ce chapitre traite les manifestations macroscopiques de ces mouvements atomiques.*

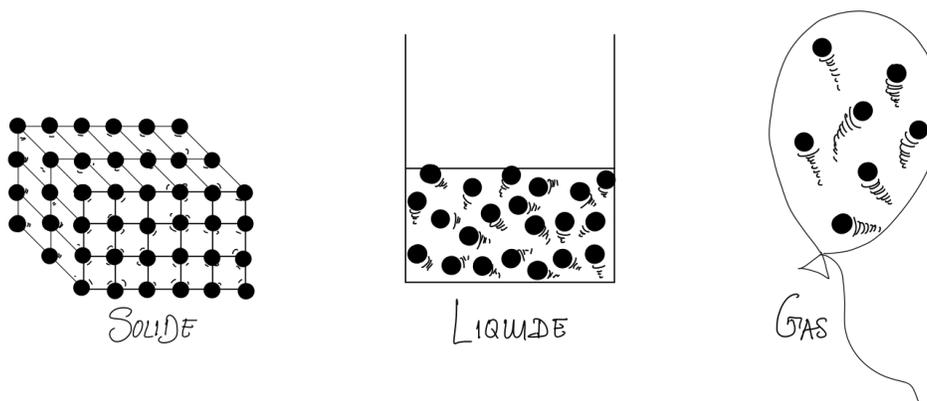


Figure 10.11: Représentation de la structure atomique des solides, liquides et gaz.

Jusqu'au XVII^{ème} siècle, on pensait que la chaleur était une manifestation du mouvement des atomes. Puis arriva une nouvelle théorie, erronée, qui postulait que la chaleur

était un fluide indestructible, sans masse, appelé “fluide calorifique”. Cette idée a été abandonnée dès le début du XIX^{ème} siècle, mais le nom “calorie” est resté.

Nous avons étudié l'énergie mécanique, qui est associée à un objet qui se déplace ou interagit dans son ensemble avec d'autres objets: c'est une énergie ordonnée qui s'applique à l'ensemble d'un corps. Mais les atomes individuels qui constituent un corps ont chacun un mouvement indépendant à l'intérieur du corps. **L'énergie thermique** est l'énergie cinétique désordonnée totale (rotationnelle, translationnelle et vibratoire) associée à un groupe de particules (atomes, ions, électrons,...) qui constituent un corps.

Si on lance une pomme, elle ne subit aucune variation d'énergie thermique, bien que son énergie cinétique augmente (par rapport à nous): un thermomètre planté dans la pomme n'indique aucune variation de température due à ce mouvement. Tous les atomes de la pomme se déplacent ensemble; c'est un mouvement ordonné. Par contre, si la pomme s'écrase contre un mur, elle se déforme, une partie de son énergie cinétique ordonnée sera transformée en énergie cinétique désordonnée, et son énergie thermique augmentera. L'énergie ordonnée de l'ensemble est devenue de l'énergie désordonnée des constituants.

Variation de l'énergie thermique. Il existe trois mécanismes principaux pour varier l'énergie thermique:

- **Un travail sur un corps:** le remuer, le frotter, le comprimer ou le déformer. Le travail est l'énergie mécanique organisée transférée vers un corps ou soutirée d'un corps au moyen d'une force agissant à distance.
- **Le rayonnement électromagnétique** (lumière visible, infrarouge,...). C'est ce qui arrive quand vous vous chauffez au soleil: l'énergie cinétique moyenne des molécules augmente et la température de votre peau augmente. On peut aussi placer les réactions chimiques dans cette catégorie. C'est aussi le cas des fours à micro-ondes ou des plaques de cuisson à induction.
- **La conduction:** un corps s'échauffe au contact d'un objet de température plus élevée (p.ex. cuillère chauffée dans un thé chaud). La quantité de **chaleur** (Q) est l'énergie thermique transférée par les collisions des particules d'une région de haute température à une région de basse température.

Un corps contient ou emmagasine de l'énergie thermique et non de la chaleur. La chaleur est l'énergie thermique échangée entre deux corps.

Température, énergie thermique et chaleur. Les trois notions, température, énergie thermique et chaleur, sont souvent confondues, même si elles ont des notions bien distinguées.

La **température** T constitue une mesure de l'énergie cinétique moyenne des molécules individuelles. Elle est donc indépendante du nombre total d'atomes présents. Ce type de variable est appelée **variable intensive**; c'est une variable qui caractérise chaque molécule.

L'**énergie thermique** ou énergie interne U correspond à l'énergie cinétique désordonnée totale de toutes les molécules d'un objet. C'est une **variable extensive**, une variable caractéristique de l'ensemble de molécules. L'énergie interne U n'existe que sous forme d'énergie cinétique désordonnée de translation. Il résulte alors de la théorie cinétique que

l'énergie interne d'un gaz parfait contenant nN_A atomes s'écrit:

$$U = (nN_A)\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = (nN_A)\frac{3}{2}k_B T = nN_A\frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}nRT$$

Nous voyons alors que U ne dépend que de T .

La **chaleur** consiste en un **transfert d'énergie** (généralement thermique) d'un objet à un autre dû à leur différence de température.

La quantité de chaleur L'unité de chaleur, la calorie, fut définie en 1824 par Nicolas Clément. Elle est définie comme la quantité de chaleur Q nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 1°C de 14.5°C à 15.5°C . Expérimentalement on trouve que la quantité de chaleur fournie est proportionnelle au changement de température: $Q \propto \Delta T$ et aussi que $Q \propto m$; plus la masse est grande, plus la chaleur requise est grande pour produire la même élévation de température. Cela est vrai pour l'eau ou tout autre corps. Nous avons donc: $Q \propto m \Delta T$.

$$Q = cm\Delta T = cm(T_f - T_i) \quad (10.5)$$

Dans le cas particulier de l'eau, on a exactement $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}(\text{°C})^{-1}$

La calorie est une quantité de chaleur très petite. On utilise surtout la kilocalorie (kcal), parfois appelée grande calorie ($1 \text{ kcal} = 1 \text{ Cal} = 1000 \text{ cal}$) qui est d'ailleurs celle définie originellement par Clément.

Exemple 10.7.1. L'équivalent d'un verre d'eau (270 g de liquide) à 20°C reçoit 1000 cal d'un réchaud. Sous l'hypothèse que toute l'énergie soit transférée à l'eau sans perte, quelle est la température finale du liquide?

Solution. On utilise l'équation 10.5. Pour la différence de température, on peut utiliser indifféremment des degrés Centigrade ou Kelvin. Alors:

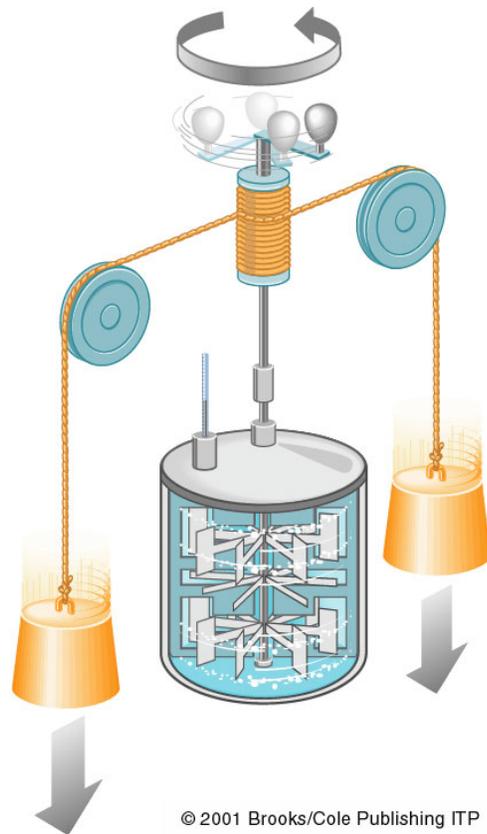
$$Q = cm\Delta T = cm(T_f - T_i) \Rightarrow T_f = \frac{Q}{cm} + T_i = 23.7^\circ\text{C}$$

Équivalent mécanique de la chaleur Il fallu attendre le XIX^{ème} siècle pour se rendre compte de l'équivalence chaleur - énergie. On s'en rendit compte en cherchant une réponse à la question suivante: Si la chaleur est une forme d'énergie, comment peut-on convertir des calories en joules? L'équivalent mécanique de la chaleur fut déterminé expérimentalement en 1850 par J.P.Joule:

$$4.186 \text{ J} = 1 \text{ cal} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J}$$

Joule réalisa l'expérience démontrée sur la figure 10.12: Les deux poids font tourner les palettes en tombant. L'énergie potentielle gravitationnelle est transformée en énergie cinétique des palettes qui se transforme en énergie cinétique de l'eau qui finit par se réchauffer dans l'enceinte isolée. En comparant le travail effectué par les poids à l'énergie thermique fournie à l'eau, Joule conclut qu'un travail de 4.186 J était l'équivalent de 1 cal. Autrement dit, *on peut augmenter la température de 1 kg d'eau de 1 Kelvin en lui apportant une énergie (chaleur) de 4186 Joules (1 kg chutant de 427 m).*

Figure 10.12: Dispositif de Joule pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur. En tombant, les poids font tourner les palettes, ce qui accroît la température de l'eau. L'énergie potentielle gravitationnelle est transformée en énergie cinétique des palettes puis de l'eau. Cette énergie cinétique finit par être transformée en énergie thermique dans l'enceinte isolée.



Capacité calorifique massique

Chaque substance subit une variation de température spécifique en recevant une quantité déterminée de chaleur. Si à une quantité donnée d'eau froide à 5°C vous ajoutez la même quantité d'eau à 95°C , le mélange se stabilise à une température de 50°C . Les deux masses subissent un changement de température égal car on mélange des quantités égales d'une même substance.

La chaleur échangée par le système 1 initialement chaud est:

$$Q_1 = cm_1(T_{f1} - T_{i1}) \text{ avec } T_{i1} > T_{f1}, \text{ donc } Q_1 < 0.$$

La chaleur échangée par le système 2 initialement froid est:

$$Q_2 = cm_2(T_{f2} - T_{i2}) \text{ avec } T_{i2} < T_{f2}, \text{ donc } Q_2 > 0.$$

La chaleur reçue par un système est positive; la chaleur perdue est négative.

Les deux systèmes forment un système global que l'on considère comme isolé du reste de l'Univers; leur énergie totale doit rester inchangée. L'énergie perdue par l'un est reçue par l'autre; les quantités de chaleurs échangées sont donc égales, en valeurs absolues et de signes contraires: $-Q_1 = Q_2$. Comme $m_1 = m_2$, nous en déduisons que $-c(T_{f1} - 95^{\circ}\text{C}) = c(T_{f2} - 5^{\circ}\text{C})$. À l'équilibre nous avons alors:

$$T_{f1} = T_{f2} = T_f = (95^{\circ}\text{C} + 5^{\circ}\text{C})/2 = 50^{\circ}\text{C}$$

Lorsque les diverses parties d'un système isolé se trouvent à des températures différentes, la chaleur se transmet de la plus chaude à la plus froide. Aucune énergie ne peut s'en échapper, donc la quantité de chaleur perdue par une partie du système est entièrement récupérée par une autre: *chaleur perdue = chaleur récupérée*.

Le changement de température pour une absorption de quantité de chaleur déterminée diffère d'une substance à l'autre. On peut écrire la même expression que pour l'eau, soit $Q = mc\Delta T$ où c est la **capacité calorifique massique** de la substance considérée exprimée en $(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$ ou $(\text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$.

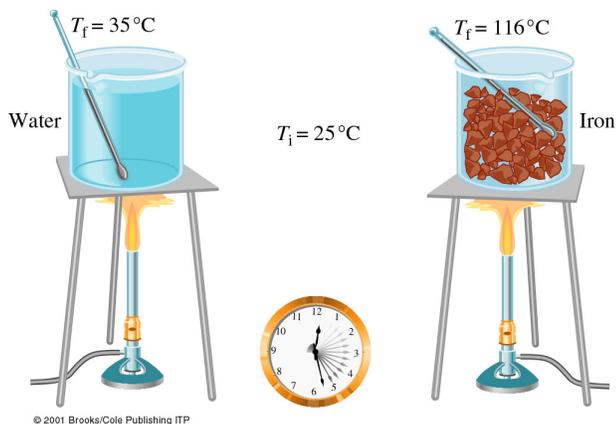
Plaçons une masse égale d'eau et de fer à température égale ($T_i = 25^\circ\text{C}$) sur un même brûleur (figure 10.13). Ajoutant la même quantité de chaleur Q aux deux récipients, on observe une augmentation différente de température, ΔT :

$$\Delta T_{Fe} = T_{Fe}^f - T_{Fe}^i = Q/mc_{Fe}$$

$$\Delta T_{eau} = T_{eau}^f - T_{eau}^i = Q/mc_{eau}$$

Les températures finales ne sont pas les mêmes car $c_{Fe} = 0.11 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ et $c_{eau} = 1.0 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$, alors $c_{eau} \sim 9c_{Fe}$. Ce qui veut dire que pour un même apport de chaleur Q , l'eau monte à une température ~ 9 fois moins élevée que le fer.

Figure 10.13: Considérons une quantité d'eau et une masse égale de fer, disons à 25°C . Si une quantité égale de chaleur est transférée aux deux masses, la température du fer augmente 9.1 fois plus que celle de l'eau. Si la température de l'eau s'élève jusqu'à 35°C , la même masse de fer s'élève jusqu'à 116°C .



Matériau	c (kcal/(kg·K))
Glace (eau, -5°C)	0.50
Plomb	0.031
Aluminium	0.21
Cuivre	0.093
Fer	0.11
Mercure	0.033
Eau	1
Helium	1.237
Vapeur d'eau (110°C)	0.481
Air (100°C)	0.24

Tableau 10.3: Capacité calorifique massique de certaines substances

Le tableau 10.3 donne des capacités calorifiques massiques pour certains matériaux. L'eau possède une des capacités calorifiques les plus élevées. Par conséquent l'eau se

chauffe lentement et se refroidit lentement, environ 4-5 fois plus lentement que la croûte terrestre; ce qui rend, par exemple, le climat maritime plus clément que le climat continental.

Exemple 10.7.2. On verse 200 cm^3 de thé à 95°C dans une tasse en verre de 300 g initialement à 25°C . Déterminez la température finale T de ce système lorsqu'il atteint l'équilibre en supposant qu'aucune chaleur ne s'échappe du système. $c_{\text{tasse}} = 0.20 \text{ kcal}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$

Solution. La chaleur perdue par le thé vaut:

$$\Delta Q_1 = m_{\text{thé}}c_{\text{thé}}(T - 95^\circ\text{C}) \quad (< 0)$$

La chaleur récupérée par le thé vaut:

$$\Delta Q_2 = m_{\text{tasse}}c_{\text{tasse}}(T - 25^\circ\text{C}) \quad (> 0)$$

Comme $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0$:

$$m_{\text{thé}}c_{\text{thé}}(T - 95^\circ\text{C}) + m_{\text{tasse}}c_{\text{tasse}}(T - 25^\circ\text{C}) = 0$$

d'où le seule inconnu est T . On trouve alors: $T = 79^\circ\text{C}$, une valeur comprise entre 25°C et 95°C .

Comment déterminer la capacité calorifique: Le calorimètre Dans toutes les expériences sur les échanges thermiques, on suppose qu'il n'y a aucune perte de chaleur. Pour que cela soit proche de la réalité, on utilise un calorimètre (voir la figure 10.14). C'est un récipient à 2 parois séparées par un vide qui empêche pratiquement tout échange de chaleur avec l'extérieur. On utilise un vase calorimétrique métallique mince, de faible capacité calorifique et de petite masse pour contenir le liquide. Ce vase change facilement de température mais emmagasine très peu d'énergie thermique. Tout comme la feuille d'aluminium qu'on utilise pour la cuisson. Pour déterminer la capacité calorifique d'un échantillon, on le porte à une température donnée puis on le plonge dans l'eau du calorimètre. On déduit la capacité calorifique c à partir de l'élévation de température.

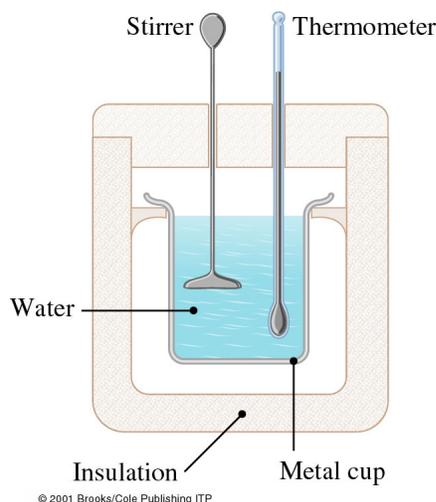


Figure 10.14: Calorimètre à eau.

Exemple 10.7.3. Un calorimètre formé d'un vase calorimétrique en cuivre de masse 150 g contenant 500 g d'eau, est à une température de 20.0°C. Un bloc solide, de 225g d'une substance non identifiée à 508°C, est plongé dans l'eau et on couvre le dispositif. Après quelques minutes, le système atteint une température constante de 40.0°C. Déterminer la capacité calorifique massique du bloc.

Solution. La variation de température est la même en degrés centigrades qu'en kelvin. La chaleur cédée par l'échantillon est égale en valeur absolue à la chaleur reçue par l'eau et le vase: $-Q_b = Q_{eau} + Q_{Cu}$, d'où on prend:

$$-m_b c_b \Delta T_b = m_{eau} c_{eau} \Delta T_{eau} + m_{Cu} c_{Cu} \Delta T_{Cu}$$

où le seul inconnu est c_b . Faisant les calculs on trouve: $c_b = 409 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

Capacité calorifique et point de vue atomique

La différence de capacité calorifique entre les matériaux divers, l'eau et le fer, par exemple, a été initialement expliquée en supposant simplement que l'eau a plus d'espace entre ses atomes que le fer. L'explication moderne est un peu plus subtile et elle fait intervenir la structure des molécules et leurs interactions. En gros, une fois la chaleur est entrée dans le corps, elle se répartit parmi ses molécules. Plus les molécules sont nombreuses, moindre sera l'augmentation de l'énergie thermique par molécule. En fait, *le produit de la capacité calorifique massique et de la masse atomique est approximativement le même pour tous les solides* (loi de Dulong et Petit). La masse atomique d'un élément correspond numériquement au nombre de grammes dans une mole. Le produit de la multiplication (exprimé en $\text{J}/(\text{mole} \cdot \text{K})$) est appelé *capacité calorifique molaire*, C . Par analogie avec les équations donnant la chaleur calorifique massique ($Q = mc\Delta T$) la quantité de chaleur nécessaire pour élever de ΔT degrés n moles de gaz est $Q = n C \Delta T$. La capacité calorifique dépend des conditions dans lesquelles un transfert de chaleur a lieu (en volume constant ou en pression constante, par exemple, comme on verra dans le prochain chapitre). On distingue alors les deux cas: quand le transfert d'énergie se fait en volume constant, $Q_V = n C_V \Delta T$ et quand le transfert se fait à pression constante, $Q_P = n C_P \Delta T$.

10.8 Changement de phase

Le transfert de chaleur vers ou à partir d'un échantillon peut le modifier de plusieurs manières. Il peut modifier sa température mais aussi son état (liquide, solide ou gazeux). On parle dans ce dernier cas de *changement de phase*.

Fusion

La **fusion** est la transformation d'un solide en liquide par addition d'énergie thermique. Il a été établi expérimentalement que lorsqu'un solide est chauffé jusqu'à son point de fusion, l'addition continue et lente de chaleur à la matière provoque sa liquéfaction progressive à température constante. C'est seulement après la fusion complète, que la température

recommence à monter. La quantité de chaleur nécessaire pour faire passer 1 kg de substance de l'état solide à l'état liquide à son point de fusion est la **chaleur latente de fusion** L_f qui s'exprime en énergie par unité de masse (J/kg):

$$Q = \pm L_f m$$

avec $Q \geq 0$ pour la fusion (où on doit apporter de la chaleur) et $Q \leq 0$ lors de la solidification.

Au point de fusion, la chaleur latente n'accroît pas l'énergie cinétique (ni la température) des molécules: elle sert à surmonter l'énergie potentielle due aux forces intermoléculaires. L'énergie associée à la chaleur latente libère les molécules des liaisons rigides de l'état solide, leur permettant de s'éloigner légèrement les unes des autres; une substance qui dégèle refroidit son voisinage et une substance qui gèle cède de la chaleur à l'environnement.

Exemple 10.8.1. Un récipient contenant 0.250 kg d'eau à 20°C est placé dans le compartiment de congélation d'un réfrigérateur. Quelle est la chaleur qu'il faut retirer de l'eau pour la transformer en glace à 0°C? La chaleur latente de fusion de la glace est $L_f = 334$ kJ/kg.

Solution. Il faut extraire une quantité de chaleur permettant à l'eau de se refroidir de 20°C à 0°C, puis de se solidifier:

$$Q = c_{eau} m_{eau} (T_{eau}^f - T_{eau}^i) + (-m_{eau} L_f)$$

d'où on peut calculer:

$$Q = (4.2 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})) (0.25 \text{ kg}) (0^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) + (-0.25 \text{ kg}) (334 \text{ kJ}/\text{kg}) \Rightarrow Q = -104.5 \text{ kJ}$$

Le signe négatif indique qu'on doit extraire cette énergie.

Vaporisation

La **vaporisation** est la transformation d'un liquide en gaz. Le produit résultant est appelé vapeur et se comporte radicalement différemment des gaz parfaits. Comme dans le cas de la fusion, on doit fournir de l'énergie aux molécules pour les libérer de la cohésion de l'état liquide. La vaporisation est même un changement plus important qui nécessite une plus grande quantité d'énergie. On définit la **chaleur latente de vaporisation** L_v comme la quantité d'énergie thermique nécessaire pour transformer en vapeur 1 kg d'un liquide à température constante, ou bien la quantité d'énergie thermique qu'il faut extraire de 1 kg de vapeur pour la condenser à température constante. Cette température est habituellement le *point d'ébullition*.

$$Q = \pm L_v m$$

La chaleur latente de vaporisation diminue quand la température augmente, par exemple pour l'eau à 33°C, elle vaut 2.42×10^3 kJ / kg et pour l'eau à 100°C elle vaut 2.25×10^3 kJ / kg. Notez que $L_v > L_f$.

Pour résumer les phénomènes de la fusion et de la vaporisation de l'eau, y compris leurs chaleurs latentes, le diagramme de la température en fonction de la chaleur apportée à une masse m de glace est montré sur la figure 10.15.

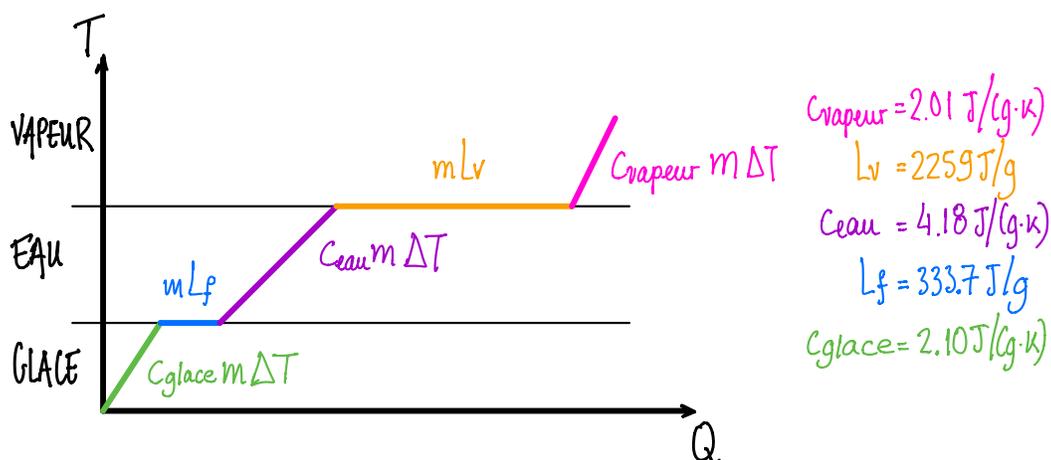


Figure 10.15: Une masse m de glace soumise à un flux de chaleur constant va passer par les phases suivantes: la glace va chauffer (consommant $Q = c_{\text{glace}}m\Delta T$), la glace va fondre (consommant $Q = m L_f$ jusqu'à la fusion complète), l'eau va chauffer ($Q = c_{\text{eau}}m\Delta T$), l'eau va s'évaporer ($Q = m L_v$ jusqu'à l'évaporation complète) et la vapeur va finalement chauffer ($Q = c_{\text{vapeur}}m\Delta T$). Le diagramme de la température en fonction de la chaleur apportée à la masse m est montré sur cette figure.

Évaporation

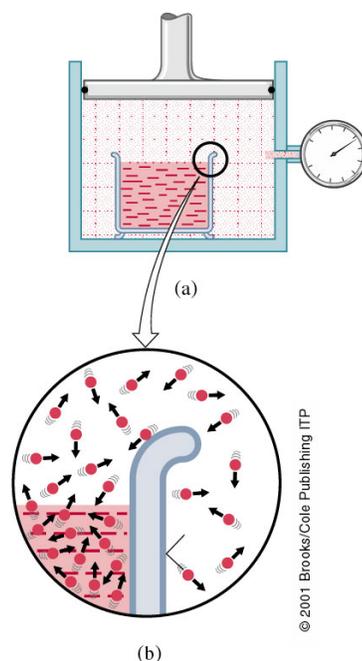
Le changement d'un liquide en vapeur à une température inférieure au point d'ébullition, qui se produit continuellement à la surface libre des liquides (c'est-à-dire la surface qui n'est pas en contact avec un solide ou un autre liquide) est appelée **évaporation**.

Un liquide se compose d'un grand nombre de molécules en agitation permanente avec une distribution d'énergie cinétique qui ressemble à celle d'un gaz. Seules les molécules ayant une énergie cinétique supérieure à une certaine valeur peuvent s'échapper du liquide et passer à l'état gazeux. Certaines molécules le quittent, d'autres retournent au liquide (voir figure 10.16). Le nombre de molécules passées à l'état de vapeur s'accroît pendant un certain temps jusqu'à ce que la quantité de molécules qui retournent à l'état liquide soit égale à la quantité de molécules qui s'en échappent dans un intervalle de temps donné. Il se crée ainsi un équilibre: **l'espace est saturé**.

La pression qui s'exerce au-dessus du liquide dépend de la température et s'appelle **pression de vapeur saturée**. Tant que la pression de vapeur au-dessus du liquide est inférieure à la pression de vapeur saturée à cette température, l'évaporation continue.

La pression de vapeur saturée d'un liquide augmente avec la température. Par exemple, à 0°C la pression de vapeur saturée est de $6.11 \times 10^2 \text{ Pa}$, à 100°C elle est de $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ et à 150°C elle est de $4.76 \times 10^5 \text{ Pa}$. D'après la théorie cinétique, le nombre des particules énergétiques augmente avec la température: plus la température s'élève, plus l'évaporation s'accélère. Si les molécules les plus rapides quittent le liquide, la vitesse moyenne de celles qui restent diminue, entraînant un abaissement de la température du liquide. **L'évaporation constitue donc un processus de refroidissement**. Par exemple, c'est le principe de la transpiration qui régule la température corporelle.

Figure 10.16: (a) Un liquide en équilibre avec sa vapeur à pression constante. (b) À cet équilibre, il y a en moyenne autant de molécules qui quittent le liquide que de molécules qui quittent la vapeur pour revenir au liquide par la surface libre.



Ébullition

L'évaporation a lieu par la surface libre d'un liquide à toute température; mais dans certaines circonstances, elle peut survenir aussi au sein même du liquide. Comme la vapeur engendrée au sein du liquide a une densité beaucoup plus faible que le liquide qui l'entoure, elle pousse le liquide tout autour, créant une petite sphère gazeuse sous pression hydrostatique. La formation de ces bulles signale le début d'un processus familier appelé **ébullition**.

L'ébullition peut se décrire comme suit: Lorsqu'un liquide approche son point d'ébullition, de petites bulles tendent à s'y former; elles dénotent le passage de l'état liquide à l'état vapeur. Toutefois, tant que la pression de vapeur à l'intérieur des bulles reste inférieure à celle de l'extérieur, elles sont immédiatement écrasées. À mesure que la température s'élève, leur pression de vapeur devient peu à peu égale et même supérieure à la pression ambiante et au lieu de disparaître, elles grossissent et montent à la surface marquant le début de l'ébullition; la pression de vapeur d'eau qui est de 0.006 atm à 0°C s'élève à 0.2 atm à 60°C et atteint 1atm à 100°C.

Si de la chaleur est continuellement fournie à l'eau, elle continue à bouillir et si on augmente le feu sous la casserole, on augmente la vitesse de vaporisation, sans changer la température de l'eau.

Le point d'ébullition dépend, de façon évidente, de la pression extérieure. L'eau bout à plus basse température en altitude parce que la pression atmosphérique est moins élevée. Au sommet de l'Everest (8850 m) la pression atmosphérique vaut 1/3 de ce qu'elle est au niveau de la mer et l'eau bout à environ 70°C. Par conséquent la cuisson à l'eau exige plus de temps dans ces régions.

On utilise le processus inverse dans l'autocuiseur: la vapeur dégagée s'accumule au-dessus du liquide dans l'autocuiseur fermé et la pression augmente ainsi que la température d'ébullition de l'eau. Le point d'ébullition de l'eau pour une pression de 2 atm est à 121°C. La vitesse des réactions chimiques double à chaque augmentation de 10°C au-delà de 100°C.

L'autocuiseur permet ainsi de diminuer le temps de cuisson de manière significative.

10.9 Transfert d'énergie thermique

Un corps peut échanger de l'énergie thermique avec l'environnement de trois façons: conduction, convection et rayonnement.

Conduction

Lorsqu'on plonge une cuillère dans une tasse de café chaud, la partie exposée à l'air se réchauffe assez rapidement même si elle n'est pas directement en contact avec la source chaude. Il y a conduction de chaleur de l'extrémité chaude vers l'extrémité froide. La conduction de chaleur est le résultat de collisions. Un groupe d'atomes d'énergie thermique élevée transmet de l'énergie cinétique aléatoire à un groupe d'atomes voisins de plus basse énergie thermique. La conduction ne se produit que lorsqu'il y a un écart de température.

Le flux d'énergie ou flux de chaleur H (en J/s ou W) transféré par seconde à travers une surface A d'épaisseur L vaut:

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k_T \frac{A}{L} \Delta T = -k_T \frac{A}{L} (T_0 - T_1)$$

où k_T est le *coefficient de conductivité thermique* en W / (m · K). La chaleur s'écoule dans la direction dans laquelle la température décroît ($\Delta T < 0$).

Peu de chaleur est transmise par conduction dans les liquides et les gaz: l'air est l'un des meilleurs isolants (double vitrage, fibres des tissus, neige, ...)

Quand vous vous réveillez le matin et marchez sur le plancher plutôt que le tapis, vous comprenez ce que veut dire conductivité thermique. Le plancher et le tapis sont à la même température, mais vous avez l'impression que le plancher est plus froid que le tapis. Les carreaux du plancher ont une conductivité thermique 10 fois plus grande que celle du tapis et ils enlèvent 10 fois plus de chaleur de vos pieds qui sont à température plus élevée. C'est cette perte de chaleur que vous sentez comme *froid* et non la différence de température.

La formule $H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{k_T A}{L} \Delta T$ peut s'écrire sous la forme

$$H = -\frac{1}{R_T} \Delta T$$

où R_T est la **résistance thermique**. Les résistances thermiques d'éléments mis en série ont la propriété intéressante de s'additionner. Ainsi:

$$R_{T_{tot}} = R_{T1} + R_{T2} + R_{T3} + \dots$$

Cette notation permet de comprendre pourquoi le double vitrage est si efficace pour l'isolation thermique.

Convection

Il s'agit d'un mouvement collectif dans un fluide. Lorsqu'une région d'un fluide est chauffée (e.g. l'air autour d'une flamme) sa masse volumique diminue à cause de la dilatation thermique et ce fluide s'élève (principe d'Archimède). Ce courant de fluide transporte un flux ascendant d'énergie thermique dû par la gravité. C'est le système utilisé dans le

chauffage central domestique. Le même effet fait monter les planeurs et les oiseaux. Il est aussi responsable des courants de convection au bord de la mer.

Le flux de chaleur transporté par convection est donné par:

$$H = qA\Delta T$$

où q est la constante de convection en $W/(m^2 \cdot K)$ qui dépend de la forme et de l'orientation de la surface A . Une des raisons pour porter des vêtements est d'empêcher les courants de convection de soutirer beaucoup d'énergie thermique du corps par temps froid. C'est pour casser les courants de convection qu'on isole les chaudières et les canalisations d'eau chaude, qu'on ferme les fenêtres et qu'on dort sous les couvertures quand il fait froid. La couverture, à moins qu'elle ne soit électrique ne fournit pas de chaleur: elle réduit vos pertes d'énergie thermique.

Rayonnement

Tous les corps émettent de l'énergie électromagnétique à cause de l'oscillation continue et désordonnée des atomes qui les constituent. Ce rayonnement thermique est caractérisé par une gamme de fréquences continues et large qui résulte des interactions électromagnétiques entre les atomes des solides, des liquides et des gaz (le corps humain émet dans l'infrarouge, invisible pour l'homme). La puissance émise est proportionnelle à T^4 , selon la loi de Stefan-Boltzmann:

$$H_e = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon \sigma A T^4$$

où σ est une constante, A est l'aire de la surface émettant le rayonnement, T la température en Kelvin et ϵ est le coefficient d'émissivité qui dépend de la nature de la surface ($0 \leq \epsilon \leq 1$).

Les surfaces très noires ont un pouvoir émissif presque égal à 1 tandis que pour celles qui brillent il se rapproche de 0. Pour $\epsilon = 1$, on a un corps noir. La quantité de rayonnement H_e émis par un corps dépend des caractéristiques de sa surface (couleur, texture, etc. . .) et de sa température (à la puissance 4). Un matériau noir et rugueux rayonne beaucoup d'énergie. Un métal poli comme l'argent ou le cuivre placé dans les mêmes conditions rayonne 20 à 30 fois moins. Une surface blanche se situe entre les deux.

Les corps émettent non seulement de l'énergie par rayonnement, mais ils absorbent celle qui provient d'autres corps. La quantité de rayonnement absorbée H_a par un corps dépend des caractéristiques de sa surface et de la nature du rayonnement qu'il reçoit (e.g. longueur d'onde, intensité) qui à son tour dépend de la température de la source. Quand un corps à température T est placé dans un environnement à température T_{env} , la puissance calorifique échangée vaut:

$$H_{net} = H_a - H_e$$

C'est avec la convection, un autre moyen important de perte de chaleur pour le corps humain. Un bon émetteur de rayonnement est aussi un bon absorbant et vice versa. Il en résulte qu'un mauvais absorbant est un bon réflecteur ou un bon transmetteur: il doit évacuer ce qu'il n'absorbe pas.

À discuter. L'effet de serre.

Chapitre 11

Thermodynamique

Maintenant que nous connaissons un peu les bases de l'énergie thermique, de la température et de la chaleur, nous pouvons porter notre attention sur la **thermodynamique**, l'étude de l'énergie thermique, son transfert, sa transformation, sa dégradation et sa dispersion. Bien qu'elle soit née au début du 19ème siècle, la thermodynamique a évolué pour devenir une discipline de portée générale qui traite l'énergie et ses transformations. L'énergie est présente dans toutes les variations de positions, vitesses, masses, température, etc, et ses variations se déroulent dans le temps. Au fond, la thermodynamique étudie les variations et le déroulement des événements dans le temps, c'est-à-dire, en définitive, l'évolution de l'Univers.

La thermodynamique étudie le comportement thermique de la matière. Quand nous considérons une entité spécifique ou un ensemble d'entités, on l'appelle un *système*: une bouteille de gaz, un moteur à réaction ou une ferme pleine d'animaux. Tout ce qui ne fait pas partie du système est appelé *milieu extérieur* ou *environnement*. Un système peut interagir avec le milieu extérieur: il peut recevoir ou fournir de la chaleur à travers ses parois, comme il peut échanger un travail mécanique. D'un autre côté, un système peut être complètement isolé de son environnement; dans ce cas, pas d'échanges thermiques ni de travail.

Contenu

11.1 Premier principe de la thermodynamique	193
11.2 Transformations	195
11.2.1 Transformations isothermes	198
11.2.2 Transformations isochore et isobare	199
11.2.3 Transformation adiabatique d'un gaz parfait	201
11.2.4 Résumé des transformations	202
11.3 Cycles: machines thermiques et réfrigérateurs	203
11.4 Deuxième principe de la thermodynamique	210
11.4.1 L'entropie	211
11.4.2 Ordre et désordre	214

11.1 Premier principe de la thermodynamique

La formulation la plus complète de la loi de conservation de l'énergie inclut toutes les formes d'énergie. Elle est connue comme le **1er Principe de la Thermodynamique**:

L'énergie ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement transférée d'un système à un autre ou transformée d'une forme en une autre.

Quand une pomme de 1N tombe d'une hauteur de 10 m d'un arbre dans votre main, l'énergie potentielle gravitationnelle initiale de 10 J est transformée en 10 J d'énergie cinétique juste avant qu'elle s'arrête dans votre main (moins une petite partie transférée à l'air par frottement). Lorsque la pomme s'arrête dans votre main, les 10 J se répartissent sous forme d'énergie thermique entre la main et la pomme (en négligeant la petite énergie sonore), ce qui augmente légèrement leurs températures. Un météorite avec beaucoup plus d'énergie cinétique peut même fondre en entrant dans l'atmosphère. Mais à tout moment, l'énergie totale est constante, sous toutes ses formes.

Travail, chaleur et énergie interne Considérons les particules d'un gaz parfait: masses ponctuelles sans interaction (énergie potentielle nulle). Elles n'ont aucune énergie cinétique de rotation ou de vibration; l'énergie interne U de ce gaz parfait contenant n moles de gaz est égale à la somme de toutes les énergies cinétiques désordonnées de translation des molécules qui le composent: $U = \frac{3}{2}nRT$. Ainsi U ne dépend que de la température T (voir chapitre 10 pour plus de détail).

Nous savons déjà que la chaleur Q et le travail W correspondent à un transfert d'énergie par des moyens très spécifiques. La première application de ces idées fut la machine à vapeur, à laquelle on fournit de la chaleur et qui fournit du travail. Par conséquent, il parut naturel de considérer la chaleur fournie par l'environnement à un système (Q) comme positive et le travail effectué par l'environnement à un système (W_s) comme positif. Avec cette convention, le travail effectué par le système à l'environnement (W) est négatif. Si une quantité de chaleur est fournie au système, elle peut se manifester soit par une augmentation de son énergie interne soit par un travail exécuté par le système sur l'environnement ou les deux à la fois. Par conséquent, le premier Principe de la Thermodynamique permet d'écrire:

$$Q = \Delta U + W \quad (11.1)$$

et la variation de l'énergie interne du système est alors:

$$\Delta U = Q - W$$

où W est le travail effectué par le système sur l'environnement. Dans la suite on va plus souvent parler du travail effectué par l'environnement sur le système, ce qui va rendre le premier Principe de la Thermodynamique comme ça:

$$Q = \Delta U - W_s \quad (11.2)$$

d'où on obtient la variation de l'énergie interne du système:

$$\Delta U = Q + W_s$$

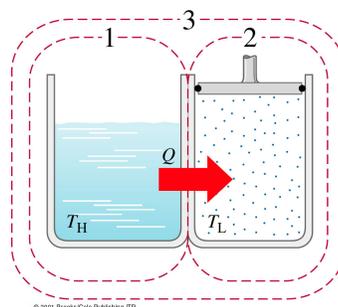
Pour pouvoir effectuer des calculs en Thermodynamique, il est nécessaire d'exprimer le premier Principe à l'aide des différentielles: un accroissement infinitésimal de l'énergie

interne d'un système, dU , se produit quand le système reçoit une quantité infinitésimale de chaleur dQ et une quantité infinitésimale de travail dW . Cela s'écrit:

$$dU = dQ + dW_s$$

Si des forces agissent sur un système, il est nécessaire de délimiter le système avant de commencer l'analyse (exactement comme nous avons fait en appliquant la conservation de la quantité de mouvement). Soit deux enceintes en contact (comme indiqué sur la figure 11.1) qui peuvent échanger une quantité de chaleur Q transférée d'une enceinte à haute température T_H à une autre à basse température T_L . Le système global formé de ces deux enceintes est isolé du reste de l'environnement. Comme il n'y a aucun travail effectué, l'énergie interne du système 1, U_1 , diminue de Q , et celle du système 2, U_2 , augmente de Q tandis que celle du système 3, U_3 , ne change pas: $\Delta U_3 = 0$.

Figure 11.1: À cause de la nature action-réaction des interactions, lorsque des forces agissent, il est nécessaire de bien délimiter le système analysé.



Par définition, un système isolé ne peut échanger aucune quantité de chaleur ($Q = 0$) et il ne peut effectuer aucun travail sur l'extérieur ou subir un travail ($W = 0$). Il en résulte alors que $\Delta U = 0$. Un autre énoncé équivalent du premier Principe est alors:

L'énergie interne d'un système isolé peut-être transformée d'une forme d'énergie à une autre, mais elle est constante.

L'énergie interne d'un système fini est finie. Si un travail est extrait de ce système, une quantité équivalente d'énergie doit lui être fournie, sinon l'énergie interne diminue et cela ne peut pas durer indéfiniment. Une *machine à mouvement perpétuel de première espèce* est celle qui produit plus de travail qu'énergie reçue et qui continue ainsi indéfiniment. Une telle machine viole le premier principe de la Thermodynamique (c'est pour cela qu'elle est dite de 'première espèce') et ne peut donc pas exister.

11.2 Transformations

Une transformation survient quand certaines grandeurs mesurables (P , V , T) qui caractérisent un système changent. Un système peut changer de plusieurs façons, mais on identifie quatre transformations fondamentales:

- **isotherme**: transformation à température constante;
- **isobare**: transformation à pression constante;
- **isochore**: transformation à volume constant;

- **adiabatique**: aucune chaleur n'est transférée vers le système ou extraite du système ($\Delta Q = 0$).

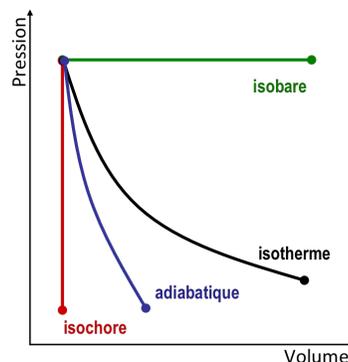


Figure 11.2: Les transformations d'un système représentées en fonction de la pression et du volume.

Soit un système thermodynamique effectuant une transformation d'un état A à un état B. Pour tracer l'évolution de A à B, il faut connaître P , V , T en chaque point de la transformation, i.e. le système doit être en équilibre. Mais à l'équilibre, rien ne bouge. Donc il faut que la transformation se fasse très lentement par rapport au temps de stabilisation du système. On parle de:

- **transformation réversible**: En suivant le chemin de A à B, on pourra rebrousser chemin en n'importe quel point et parcourir la même courbe en sens inverse. C'est une transformation **quasi-statique**, car elle doit se dérouler lentement, sans frottements ni turbulences. Par exemple, augmenter la pression de la glace à 0°C , la faire fondre, et un fil lesté s'enfonce pour traverser le bloc de glace. Derrière le fil, la glace se reforme lorsque la pression n'agit plus.¹
- **transformation irréversible**: Rebrousser un chemin ne nous ramène pas à l'état initial.

Travail et premier Principe Exprimons maintenant le travail W dans l'équation 11.2 en fonction de grandeurs directement mesurables. Considérons un système qui change de volume sous une pression extérieure; il effectue donc un travail.

Soit un gaz enfermé dans un cylindre muni d'un piston de section A (comme sur la figure 11.3). En se dilatant, le gaz exerce une force $F = P \cdot A$ qui pousse le piston. Le travail élémentaire dW effectué par le gaz pour déplacer le piston d'une distance $d\vec{l}$ est:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (P \cdot A)(dl) = P(A dl) = P dV$$

Le travail effectué par le gaz en détente est au bénéfice du milieu extérieur: il correspond à une perte pour le gaz.

Si maintenant on considère le travail dW_s effectué par l'environnement vers le gaz, on a:

$$dW_s = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -(P \cdot A)(dl) = -P(A dl) = -P dV$$

¹En toute rigueur, une transformation réversible est une notion théorique dont on peut s'approcher sans jamais l'atteindre. Par exemple, pour qu'une transformation isotherme soit réversible, le piston doit être sans masse et sans frottement; de plus, le volume doit varier très lentement et le gaz doit rester en équilibre et n'engendrer aucun mouvement organisé qui absorberait de l'énergie. Toute transformation qui entraîne des pertes par frottement est irréversible.

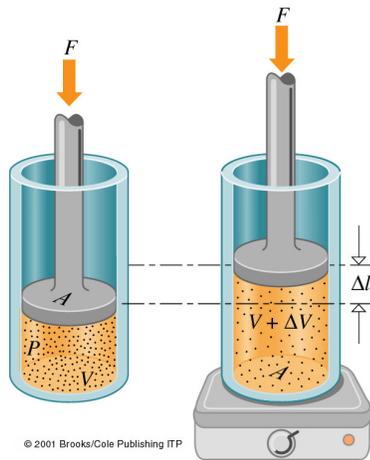


Figure 11.3: Un gaz enfermé dans un cylindre par un piston sans masse ni frottement. La force F constante est appliquée vers le bas et elle est égale à la pression fois la surface, $P \cdot A$. Lorsque le piston se déplace vers le bas, un travail est effectué sur le gaz.

où la force pertinente est la force externe du piston qui est de signe opposé par rapport au déplacement du piston $d\vec{l}$. Pour une variation de volume finie de V_i à V_f :

$$W_s = \int dW_s = - \int_{V_i}^{V_f} P \cdot dV \quad (11.3)$$

Si le volume augmente, alors W_s est négatif; ce travail correspond à une perte d'énergie pour le gaz. Si le volume diminue, W_s est positif; le travail est fourni par l'environnement au bénéfice du gaz qui gagne de l'énergie.

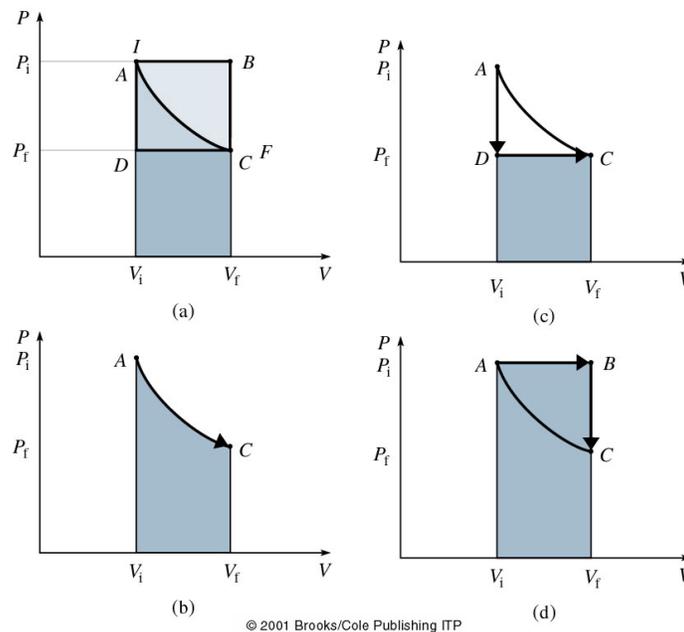


Figure 11.4: Un système (a) peut évoluer d'un état initial I à un état final F le long de plusieurs itinéraires différents, chacun correspondant à une valeur différente du travail effectué par le système. Les figures (b), (c) et (d) représentent des transformations différentes, les aires, et par conséquent, les quantités de travail correspondantes.

Selon le traitement qu'il subit, le système peut être transformé d'un état initial I à un état final F , en suivant divers chemins; chacun d'eux correspond à une valeur différente

du travail effectué par le système (voir figure 11.4). Le travail effectué sur un système ou par un système dépend de la façon dont il est passé de son état initial à son état final. Le travail n'est pas une fonction de l'état; il ne reflète pas l'état du système. L'énergie interne U d'un système est une fonction unique de l'état du système. Bien que U ne dépende pas du chemin, W en dépend et le premier Principe implique que Q en dépend aussi. Les quatre diagrammes de la figure 11.4 montrent que le travail (qui correspond à l'aire sous le diagramme $P - V$) dépend du chemin d'une transformation.

11.2.1 Transformations isothermes

Soit un cylindre contenant un gaz parfait qui se détend de façon isotherme (figure 11.5). Supposons que le cylindre soit fait d'une matière qui conduit très bien la chaleur, avec des parois minces et entouré d'un bain à température constante (*réservoir thermique*). Si le gaz se détend très lentement, il déplace le piston et la chaleur entre dans le système à un rythme tel que le gaz reste à une température constante. En général, un gaz qui se détend effectue un travail sur la paroi mobile du récipient, e.g. un piston. Quand une molécule vient rebondir sur une paroi qui recule, sa vitesse finale sera inférieure à sa vitesse avant la collision. La diminution de l'énergie cinétique de la molécule équivaut à un travail effectué par le piston. Ce travail est donc fait aux dépens de l'énergie interne. Ainsi, à moins que la chaleur ne soit fournie au gaz, sa température diminue.

Dans une détente isotherme d'un gaz parfait, U dépend seulement de l'énergie cinétique de translation. L'énergie cinétique de translation dépend de T qui est constante; alors $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$ et $Q = W$: le travail effectué par le gaz est fourni par le réservoir de chaleur.

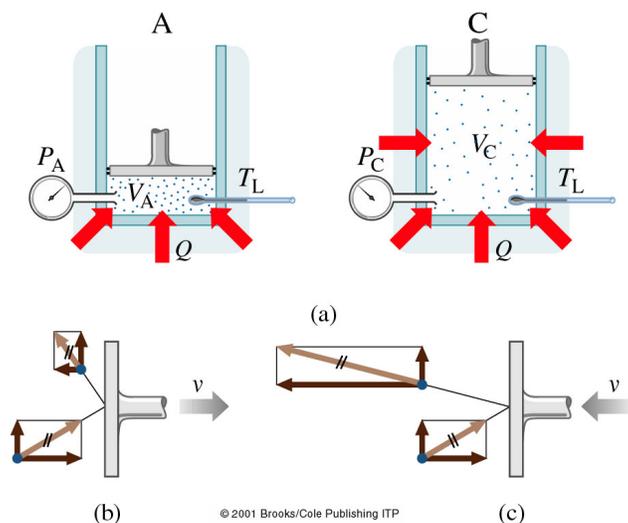


Figure 11.5: (a) Un gaz en détente isotherme d'un état A à un état C . Comme de la chaleur entre dans le système, le piston monte et la pression diminue. (b) Quand les molécules rebondissent sur le piston qui recule, elles perdent de la quantité de mouvement, donc de l'énergie cinétique. (c) Par contre quand elles rebondissent sur un piston qui avance, elles gagnent de la quantité de mouvement, donc de l'énergie cinétique.

La figure 11.6(a) illustre le diagramme d'un gaz parfait évoluant le long d'un isotherme en partant d'un point A pour arriver au point C . Notons que de A à D la température passe de T_B à une température plus haute T_H , en traversant plusieurs isothermes sur son chemin.

Comme $P = nRT/V = \text{constante}/V$ (transformation isotherme, $T = \text{constante}$), les isothermes sont des hyperboles.

Considérons le travail effectué par l'environnement sur un gaz parfait subissant une détente isotherme. L'aire sous la courbe de la figure 11.6(b) correspond au travail total de cette transformation (selon l'équation 11.3). Puisque $P = nRT/V$, l'équation 11.3 nous donne:

$$W_s = - \int_{V_i}^{V_f} P(V) dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

et à T constante:

$$W_s = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = -nRT \ln \frac{P_i}{P_f}$$

où $-W_s = W = Q$.

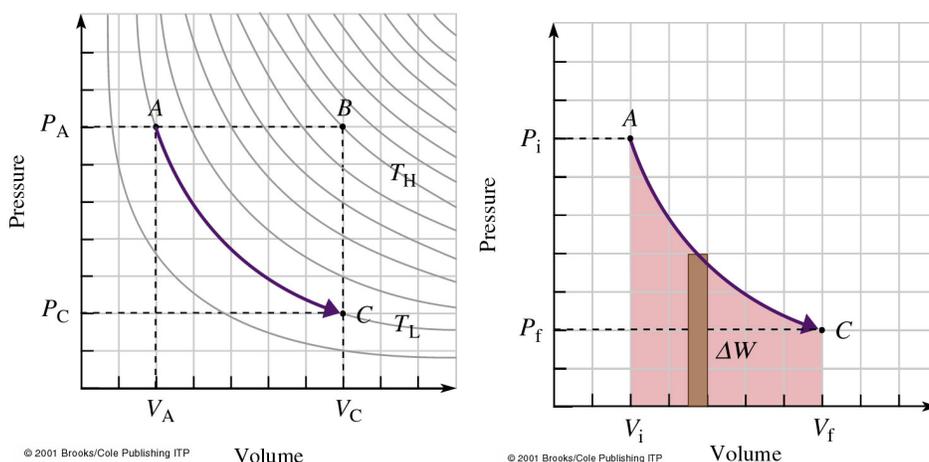


Figure 11.6: (a) Détente isotherme d'un gaz. (b) L'aire sous la courbe de P en fonction de V est égale au travail effectué par le système.

11.2.2 Transformations isochore et isobare

Retournons maintenant sur la figure 11.6(a); on peut aller de A à C en suivant le chemin ABC . Cette transformation se compose de:

- un processus isobar AB ($P = \text{constante}$); Le travail effectué sur le gaz pendant cette transformation sera $W_{AB} = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = -P_A(V_B - V_A) = -P_A(V_C - V_A) = -P_A \Delta V$.
- un processus isovolumique BC ($V = \text{constante}$); $W_{BC} = 0$ puisque $\Delta V = 0$.

Alors pour aller du point A au point C selon le trajet ABC , le travail sur le système vaut:

$$W_{AC} = W_{AB} + W_{BC} = -P_A \Delta V = -\frac{nRT}{V_A} (V_C - V_A)$$

ce qui n'est pas le même travail que celui obtenue en suivant l'isotherme AC . Nous retrouvons alors la conclusion que:

Le travail effectué sur un système ou par un système dépend de la façon dont il passe de l'état initial à l'état final: ce n'est pas une variable d'état.

Exemple 11.2.1. On fait bouillir 1 kg d'eau tel que toute l'eau se transforme en vapeur à 100°C à pression atmosphérique constante. Déterminez (a) le travail accompli et (b) la variation d'énergie interne.

Solution.

(a) Le volume de 1 kg d'eau à 100°C équivaut à 1 litre = 0.001 m³. Le volume de 1 kg de vapeur à 100°C vaut 1.67 m³. Le travail accompli s'écrit alors:

$$W_s = -P(V_f - V_i) = -1.69 \times 10^5 \text{ J}$$

(b) La chaleur requise pour évaporer 1.0 kg d'eau à 100°C vaut $Q = 22.6 \times 10^5 \text{ J}$ (voir figure 21.5). D'après la première loi de la thermodynamique:

$$\Delta U = Q + W_s = 22.6 \times 10^5 \text{ J} - 1.7 \times 10^5 \text{ J} = 20.9 \times 10^5 \text{ J}$$

Seulement 7.5% de la chaleur fournie sert à effectuer du travail; les 92.5% restants augmentent l'énergie interne de l'eau (essentiellement utilisée pour la transition de phase).

Capacité calorifique molaire à volume constant Soit n moles d'un gaz parfait à pression P et à température T confinées dans un volume V constant. Si on ajoute une quantité de chaleur Q_V , la température et la pression augmentent de ΔT et de ΔP respectivement. D'après la 1ère loi de la thermodynamique:

$$\Delta U = Q_V + W_s = nC_V\Delta T + W$$

Mais $\Delta V = 0 \rightarrow W_s = 0$, ce qui veut dire qu'aucun travail n'est effectué et la chaleur ajoutée sert entièrement à accroître l'énergie interne, d'où:

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\Delta U}{\Delta T}$$

L'énergie interne d'un gaz monoatomique parfait est $U = (3/2) nRT$, donc $\Delta U = (3/2) nR\Delta T$. On obtient ainsi:

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{1}{n} \frac{(3/2) nR\Delta T}{\Delta T} = \frac{3}{2}R = 12.5 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

On peut dès lors réécrire l'équation de l'énergie interne d'un gaz parfait en remplaçant $3/2R$ par C_V :

$$U = \frac{3}{2}nRT = nC_VT \quad \text{et} \quad \Delta U = nC_V\Delta T$$

Cette expression est valable pour tous les gaz parfaits monoatomiques, diatomiques et polyatomiques à condition de prendre la valeur appropriée de C_V .

Capacité calorifique molaire à pression constante Supposons que la température d'un gaz parfait est élevée de la même quantité ΔT que précédemment, mais le transfert de chaleur Q_P se fait cette fois-ci à pression constante. Par définition, la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de n moles de ΔT degrés est:

$$Q_P = nC_P\Delta T$$

D'après le premier principe de la thermodynamique:

$$\Delta U = Q_P + W$$

Ici, en plus d'augmenter l'énergie interne, la chaleur ajoutée effectue également du travail, soit (pour un gaz parfait):

$$W_s = -P \Delta V = -P \frac{nR\Delta T}{P}$$

On a aussi:

$$\Delta U = nC_V\Delta T \quad \text{et} \quad Q_P = nC_P\Delta T$$

ce qui donne finalement:

$$nC_V\Delta T = nC_P\Delta T - nR\Delta T \Rightarrow$$

$$C_P = C_V + R$$

C_P aura une valeur supérieure à celle de C_V d'environ $R = 8.31\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$.

Equipartition de l'énergie Les molécules monoatomiques, qui sont essentiellement ponctuelles et qui ne peuvent avoir qu'une faible énergie de rotation inertielle autour d'un axe, peuvent seulement stocker de l'énergie dans des mouvements de translation. Par contre les molécules diatomiques et polyatomiques peuvent en stocker dans leurs rotations ou vibrations.

Pour tenir compte de ces possibilités d'une manière quantitative, on utilise le théorème de l'équipartition de l'énergie: chaque molécule a un certain nombre de degrés de liberté, f , qui sont des moyens indépendants pour une molécule d'acquérir de l'énergie interne. Chaque degré de liberté actif d'un système possède en moyenne une énergie interne de $(1/2)k_B T$ par molécule (ou $(1/2)RT$ par mole). Dans ce contexte, l'énergie interne dans la dérivation de la capacité calorifique molaire à volume constant aurait dû s'écrire $U = \frac{f}{2}nRT$. Pour les molécules monoatomiques, $f = 3$.

La capacité calorifique molaire augmente avec le nombre d'atomes par molécules. L'énergie interne comprend d'autres formes d'énergie en plus de l'énergie cinétique de translation ; une molécule diatomique peut effectuer un mouvement de rotation autour de deux axes différents. On peut encore améliorer l'accord entre l'expérience et la théorie en tenant compte des oscillations des atomes ; par exemple dans un gaz diatomique, les deux atomes dans la molécule d'oxygène peuvent osciller l'un vers l'autre, la liaison interatomique se comporte donc comme un ressort.

11.2.3 Transformation adiabatique d'un gaz parfait

Dans une transformation adiabatique il n'y a aucun transfert de chaleur à travers la surface qui limite le système. Ceci se produit dans le cas d'un processus très lent dans un système extrêmement bien isolé ou d'un processus se déroulant avec une telle rapidité que la chaleur dont la propagation se fait lentement n'a ni le temps d'entrer ni de sortir. Les transformations adiabatiques sont importantes dans beaucoup de situations, comme par exemple le moteur à combustion interne.

Considérons un gaz parfait, enfermé dans un cylindre fermé avec un piston, le tout étant thermiquement isolé de façon qu'aucune chaleur ne peut y entrer ou sortir. Toute

transformation qui a lieu à son intérieur sera donc adiabatique, réversible ou non, selon la façon dont il est exécuté. Supposons qu'elle soit réversible et adiabatique, c'est-à-dire que l'évolution est lente, ce qui permet d'avoir l'équilibre à tout moment. Si on comprime le gaz ($W < 0$), U doit augmenter car le travail effectué sur le gaz se transforme en énergie interne ($\Delta U = -W$); la température doit donc augmenter. Alors le produit PV qui est égal à nRT n'est plus constant. La courbe qui correspond à cette transformation dans le plan PV est une courbe adiabatique et elle a partout une pente plus grande que celle de l'isotherme. Il en est ainsi car en réduisant le volume, la température augmente, entraînant une variation de pression plus grande que si T était constante. Par contre si le gaz se détend adiabatiquement, il se refroidit, entraînant une variation de pression plus faible que dans la transformation isotherme.

Dans le cas d'une transformation isotherme, le gaz obéit à la loi de Boyle-Mariotte: $PV = \text{constante}$. Dans le cas d'une transformation adiabatique (où T change), P diminue plus rapidement avec l'augmentation de V et on trouve expérimentalement que:

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (11.4)$$

où γ est une constante qui vaut $\frac{5}{3} \approx 1.67$ pour les gaz monoatomiques, $\frac{7}{5} \approx 1.4$ pour les gaz diatomiques et ≈ 1.3 pour les gaz polyatomiques.

On peut montrer théoriquement (nous ne le ferons pas ici) que γ est le rapport de la capacité calorifique du gaz à pression constante à la capacité calorifique à volume constante; $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

Exemple 11.2.2. On laisse un gaz parfait monoatomique se dilater lentement jusqu'à ce que sa pression soit exactement la moitié de sa valeur initiale. Par quel facteur son volume varie-t-il s'il s'agit d'un processus (a) adiabatique ou (b) isotherme ?

Solution.

(a) D'après l'équation 11.4: $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Nous pouvons calculer

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(5/2)R}{(3/2)R} = \frac{5}{3}$$

Alors $\frac{V_2}{V_1} = 2^{3/5} = 1.52$.

(b) Isotherme signifie que $T_1 = T_2$, alors conformément à la loi des gaz parfaits $P_1 V_1 = P_2 V_2$. Il en résulte que: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2} = 2$. ◀

11.2.4 Résumé des transformations

Pour tous les chemins:

$$\Delta U = Q - W \Leftrightarrow \Delta U = Q + W_s$$

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

Plus spécifiquement, selon la figure 11.7:

Chemin	Quantité constante	Type de processus	Résultats spéciaux
1	P	Isobare	$Q = nC_P \Delta T$; $W_s = -P \Delta V$
2	T	Isotherme	$Q = -W_s = nRT \ln(V_f/V_i)$; $\Delta U = 0$
3	PV^γ , $TV^{(\gamma-1)}$	Adiabatique	$Q = 0$; $W_s = \Delta U$
4	V	Isochore	$Q = \Delta U = nC_V \Delta T$; $W_s = 0$

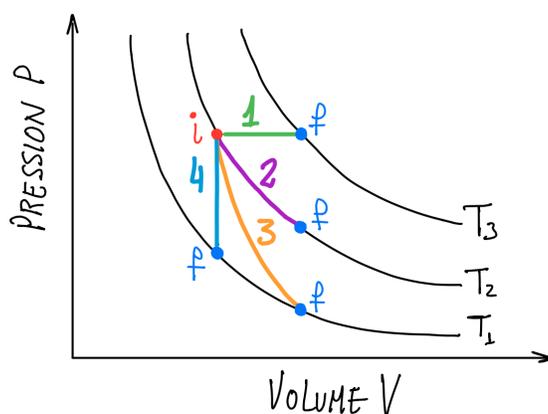


Figure 11.7: Diagramme récapitulatif des transformations

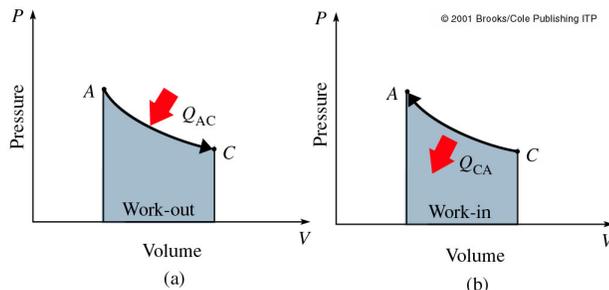
11.3 Cycles: machines thermiques et réfrigérateurs

Dans ce qui suit, nous ne considérons que des transformations réversibles et nous voulons que le système revienne à son état initial après les transformations: $\Delta U = 0$. Le diagramme dans le plan $P - V$ représente alors un cycle. Le cas le plus simple consiste à enfermer un gaz parfait dans un cylindre fermé par un piston, placer le piston en contact avec un bain à température constante (i.e. isotherme) et le détendre (figure 11.8).

Le travail effectué sur le gaz est $W_s^{AC} < 0$, et il correspond à l'aire sous la courbe AC . $\Delta T = 0$ implique que $\Delta U = 0$ et par conséquent $Q_{AC} > 0$.

En revenant au point A en suivant le même isotherme en sens inverse, le système revient à son état initial. Le gaz reçoit du travail et fournit de la chaleur, tels que $W_s^{AC} = -W_s^{CA}$ et $Q_{AC} = -Q_{CA}$. Le travail total à la fin du cycle, représenté par l'aire à l'intérieur de la courbe fermée ACA dans le diagramme $P - V$, est nul: $W_s^{CA} + W_s^{AC} = 0$

Figure 11.8: (a) Diagramme PV pour une détente isotherme, pendant laquelle une quantité de chaleur Q_{AC} entre dans le système en évoluant de A à C . (b) Pendant la compression isotherme inverse, le système retourne à A restituant la même quantité de chaleur.

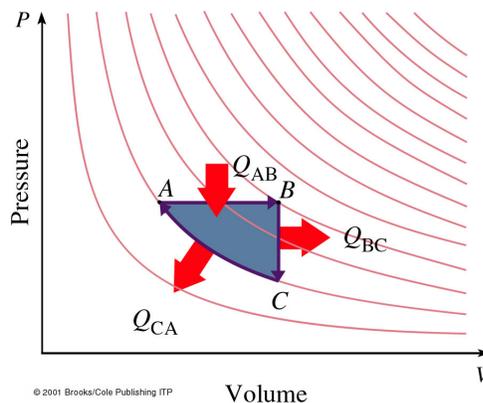


Le cycle de la figure 11.9 correspond à un travail effectué par le gaz; notez que l'aire du cycle est non-nulle. Analysons ce cycle:

- $A \rightarrow B$: un travail est produit sur le gaz car son volume augmente ($V_B > V_A$). Sa température augmente (on passe d'une isotherme à une isotherme de température plus élevée), alors son énergie interne U augmente aussi. Q_{AB} doit donc être positif: une quantité de chaleur Q_{AB} entre dans le système.
- $B \rightarrow C$: aucun travail n'est effectué et la température diminue, donc U diminue et une quantité de chaleur Q_{BC} est cédée par le système.
- $C \rightarrow A$: le long de l'isotherme ($\Delta U = 0$) le gaz est comprimé ($V_C < V_A$) et un travail est effectué par le système vers l'environnement qui doit être compensé par une perte de chaleur correspondante Q_{CA} .

Sur le parcours fermé $ABCA$ on doit avoir $\Delta U_{ABCA} = 0$, le travail total effectué par le système est égal à la chaleur totale reçue. Ce cycle représente le fonctionnement d'un moteur thermique.

Figure 11.9: Un cycle correspondant à un travail effectué par le système.



Moteurs thermiques Un moteur thermique est un dispositif cyclique qui convertit l'énergie thermique en travail qu'il cède à l'extérieur. On utilise un fluide qui permet de transférer la chaleur et qui subit des processus de détente et de compression. Pour un processus cyclique qui ramène le fluide dans son état initial:

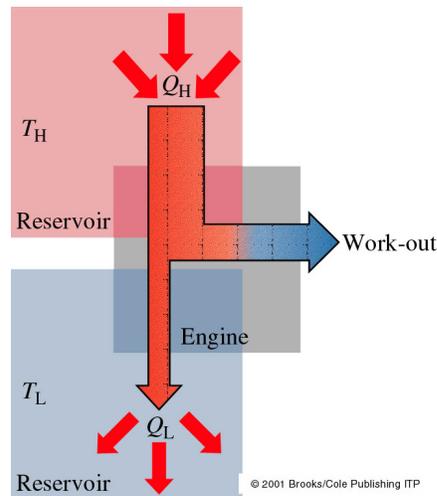
$$U_f - U_i = \Delta U = 0 \Rightarrow Q + W_s = 0 \Rightarrow Q = -W_s$$

Le moteur travaille entre un réservoir à haute température, T_H , et un réservoir à basse température, T_L . Une quantité de chaleur Q_H est fournie dans le système et une quantité de chaleur $Q_L < 0$ est cédée par le système. La chaleur nette absorbée par cycle est $Q = Q_H + Q_L$ et le travail fourni par la machine: $W_s = -Q$. L'expérience montre qu'il est impossible de transformer toute la chaleur reçue Q_H en travail; Q_L n'est jamais nul.

Un moteur thermique 'idéal' (qui ne correspond à aucun moteur réalisable mais qui nous aide à étudier les moteurs thermiques) est le **cycle de Carnot**, fonctionnant selon un cycle réversible (figure 11.11). Le moteur de Carnot est un simple cylindre fermé par un piston qui contient un gaz qu'on amène alternativement en contact avec un réservoir thermique à haute température (vapeur) puis avec un réservoir thermique dans lequel la chaleur est rejetée (eau de refroidissement). Ce cycle consiste en une suite de quatre étapes:

- $A \rightarrow B$: détente isotherme. $\Delta U = 0$, $W_s < 0$ donc $Q > 0$; le gaz reçoit une quantité de chaleur Q_H à haute température T_H .

Figure 11.10: Représentation schématique d'un moteur thermique fonctionnant entre une source chaude et une source froide. Une quantité de chaleur Q_H entre dans le moteur et une quantité inférieure Q_L en sort et le moteur exécute un travail. L'énergie entrante est égale à l'énergie totale sortante.



- $B \rightarrow C$: détente adiabatique (P, V, T non-constants). $Q = 0, W_s = \Delta U < 0$.
- $C \rightarrow D$: compression isotherme. $\Delta U = 0, W_s > 0$ donc $Q < 0$; le gaz rejette une quantité de chaleur Q_L .
- $D \rightarrow A$: compression adiabatique. $Q = 0, W_s = \Delta U > 0$.

La partie ABC représente la détente: c'est la course motrice, car le gaz effectue un travail positif sur le milieu extérieur. Sur la partie CDA du cycle, le gaz est comprimé par une force extérieure et il rejette une quantité de chaleur. En total, un travail est fourni par le moteur, égal à la surface comprise dans le graphe.

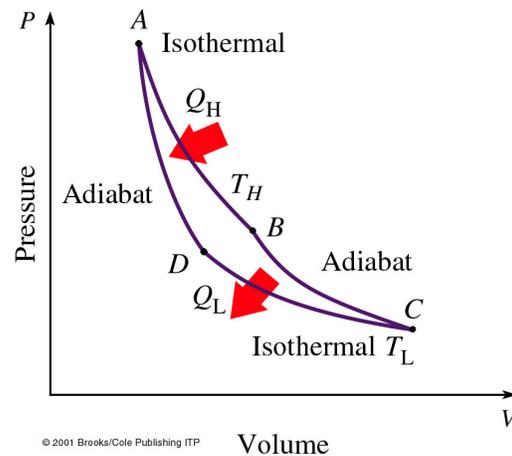
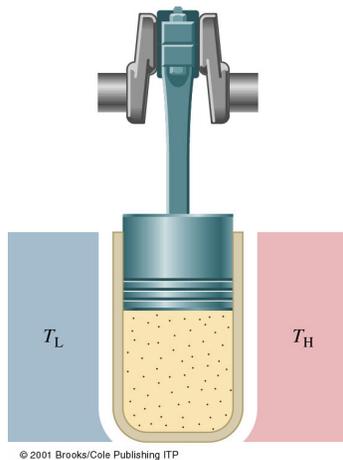


Figure 11.11: À gauche: une machine (ou moteur) de Carnot consiste en un cylindre fermé par un piston et contenant un gaz. Le dispositif est amené en contact successivement avec un réservoir de haute température et avec un réservoir de basse température. À droite: diagramme PV des quatre étapes réversibles du cycle de Carnot.

Rendement d'une machine thermique La raison pour laquelle le moteur de Carnot est si important est qu'il représente un dispositif idéal avec la meilleure efficacité possible.

Son rendement est la limite supérieure du rendement de tout moteur thermique réel. D'une manière générale, on définit le rendement énergétique r d'une transformation comme:

$$r = \frac{\text{énergie disponible sortante}}{\text{énergie entrante}} = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie fournie}}$$

Cette expression est applicable à tout moteur thermique, qu'il soit réel ou théorique. Dans le cas d'un moteur thermique cyclique idéal (sans frottement ni perte), le premier Principe de la Thermodynamique implique que $W = Q_H$ (entrante) $- Q_L$ (sortante). Alors:

$$r = \frac{W}{Q_e} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}$$

où Q_H et Q_L sont toutes les deux positives.

Les moteurs réels dissipent de l'énergie par frottement et perdent une quantité appréciable d'énergie à l'environnement par convection, conduction et radiation. Par exemple, le rendement du moteur d'une voiture est en théorie 55% mais en réalité 35%. Pour une centrale thermique le rendement théorique est 40% et le rendement réel est 30%.

Calculons maintenant le rendement d'un cycle de transformation réversible sur une mole d'un gaz parfait. Pour les deux isothermes, calculons le rapport Q_L/Q_H (puisque $r = 1 - Q_L/Q_H$). Alors pour les transformations isothermes (voir sous-section 11.2.4 et figure 11.11):

$$\begin{aligned} \frac{Q_L}{Q_H} &= \frac{RT_L \ln(V_C/V_D)}{RT_H \ln(V_B/V_A)} = \frac{T_L}{T_H} \Rightarrow \\ \frac{Q_L}{Q_H} &= \frac{T_L}{T_H} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Pour les deux transformations adiabatiques, nous avons:

$$T_H V_B^{\gamma-1} = T_L V_C^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad T_L V_D^{\gamma-1} = T_H V_A^{\gamma-1}$$

d'où on prend:

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

En combinant les équations précédentes:

$$r = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Il ne faut pas oublier que les températures sont ici des températures absolues. Ce résultat est valable pour tout moteur réversible idéal. Un moteur parfait, $r = 1$, demande que $Q_L = 0$, ce qui impose que $T_L = 0$ K ou $T_H \rightarrow \infty$, conditions impossibles à réaliser.

Exemple 11.3.1. Quel est le rendement le plus élevé possible pour une machine à vapeur opérant entre 200°C et 27.0°C?

Solution. Le rendement le plus élevé possible (sans pertes) pour une machine à vapeur opérant entre 200°C et 27.0°C est:

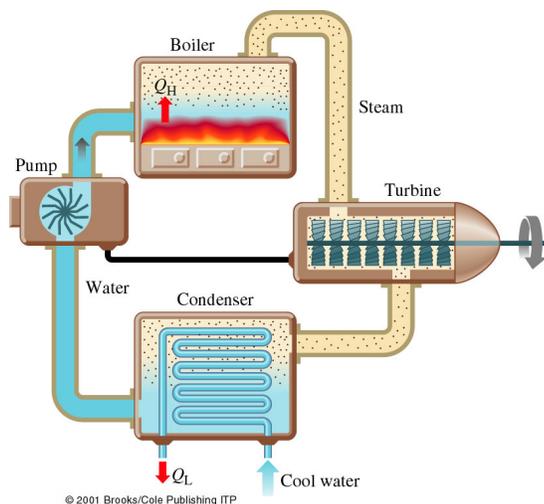
$$r = 1 - \frac{300 \text{ K}}{473 \text{ K}} = 1 - 0.634 = 36.5\%$$

Dans la pratique, les pertes réduisent cette valeur d'un tiers environ. 

Une centrale thermique moderne utilise de la vapeur chauffée à environ 500°C . Cette vapeur à haute pression se détend dans une turbine, frappe et pousse ses lames pour la faire tourner. La turbine propulse un générateur électrique de haute tension.

Une grande différence de pression est maintenue à travers la turbine en condensant la vapeur. La vapeur est expulsée vers un condensateur froid à 373 K . Le rendement théorique vaut 53% bien que les pertes thermiques (en fumée par exemple) le réduisent à environ 40%.

Figure 11.12: Un central électrique thermique moderne. La vapeur agit sur la turbine, lui transférant de l'énergie. La turbine propulse un générateur électrique de haute tension. Une grande différence de pression est maintenue à travers la turbine en condensant la vapeur. La vapeur retourne à l'état liquide dans le condensateur (la source froide). L'eau qui circule dans le système est très pure et le système est scellé.



Exemple 11.3.2. Soit 0.2 moles d'un gaz diatomique parfait ($\gamma = 1.40$) effectuant un cycle de Carnot (comme à la figure 11.11) entre les températures 227°C et 27°C . La pression initiale vaut $P_A = 10.0 \times 10^5\text{ Pa}$ et, pendant le cycle d'expansion isotherme à haute température, le volume double. $C_V = 20.8\text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

- Trouvez la pression, le volume et la température en chacun des points A , B , C , D .
- Trouvez Q , W et ΔU pour chacune des quatre étapes du cycle.
- Déterminez le rendement à l'aide des résultats précédents.
- Comparez ce rendement au rendement maximum possible.

Solution.

(a) Commençons par convertir les températures en Kelvin: $T_H = 500\text{ K}$ et $T_L = 300\text{ K}$.

- **En A:** Avec l'équation des gaz parfaits, on obtient:

$$V_A = \frac{nRT_H}{P_A} = 8.31 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$

- **En B:** Le volume double pendant l'expansion isotherme $A \rightarrow B$, ainsi:

$$V_B = 2V_A = 16.6 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$

On a aussi que $P_A V_A = P_B V_B$. Ainsi:

$$P_B = \frac{P_A V_A}{V_B} = 5 \times 10^5\text{ Pa}$$

- **En C:** Pendant la dilatation adiabatique $B \rightarrow C$, $T_H V_B^{\gamma-1} = T_L V_C^{\gamma-1} = \text{constante}$, d'où on peut calculer $V_C = 59.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$. Utilisant l'équation des gaz parfaits: $P_C = nRT_L/V_C = 0.837 \times 10^5 \text{ Pa}$.
- **En D:** Pendant la compression adiabatique $D \rightarrow A$, $T_H V_A^{\gamma-1} = T_L V_D^{\gamma-1} = \text{constante}$, d'où on peut calculer $V_D = 29.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3$. Utilisant l'équation des gaz parfaits: $P_D = nRT_L/V_D = 1.67 \times 10^5 \text{ Pa}$.

(b)

- **Pendant l'expansion isotherme** $A \rightarrow B$, $\Delta U_{AB} = 0$. Alors: $W_{AB} = -Q_H = -nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A} = -576 \text{ J}$.
- **Pendant l'expansion adiabatique** $B \rightarrow C$, $Q_{BC} = 0$ et $\Delta U_{BC} = W_{BC}$. Avec $C_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$: $W_{BC} = \Delta U_{BC} = nC_V(T_L - T_H) = -832 \text{ J}$.
- **Pendant la compression isotherme** $C \rightarrow D$, $\Delta U_{CD} = 0$. Pour trouver $W_{CD} = -Q_L$, on utilise la relation pour les transformations isothermes: $W_{CD} = -Q_L = -nRT_L \ln \frac{V_D}{V_C} = 346 \text{ J}$.
- Finalement, **pendant la compression adiabatique** $D \rightarrow A$, $Q_{DA} = 0$ et $\Delta U_{DA} = W_{DA} = nC_V(T_H - T_L) = 832 \text{ J}$.

En résumé on trouve:

Processus	Q	W	ΔU
$A \rightarrow B$ - isotherme	576 J	-576 J	0
$B \rightarrow C$ - adiabatique	0	-832 J	-832 J
$C \rightarrow D$ - isotherme	-346 J	346 J	0
$D \rightarrow A$ - adiabatique	0	832 J	832 J
Total	230 J	-230 J	0

Pour le cycle entier, on trouve bien que $Q = -W$ et $\Delta U = 0$. On voit aussi que les quantités de travail dans les deux transformations adiabatiques sont égales mais de signes opposés, ce qui doit toujours être ainsi.

(c) Le rendement est:

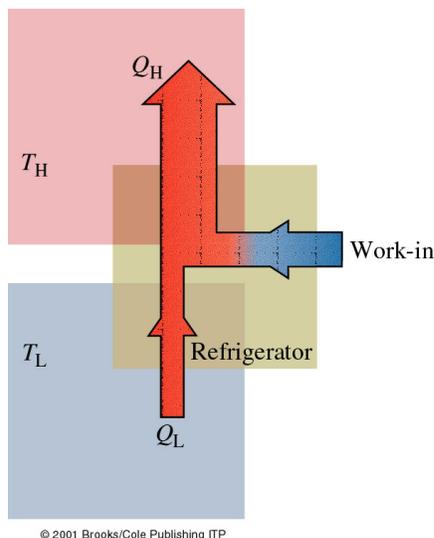
$$r = \frac{W}{Q_H} = \frac{230 \text{ J}}{576 \text{ J}} = 0.4 = 40\%$$

(d) Le rendement maximum est donné par:

$$r = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 40\%$$



Figure 11.13: Représentation schématique d'une machine frigorifique. Elle prend une quantité de chaleur Q_L d'une région de basse température et expulse une quantité de chaleur Q_H vers une région de haute température, au prix d'une certaine quantité de travail absorbé.



Réfrigérateurs et climatiseurs Une machine à produire du froid (un réfrigérateur) fait le contraire par rapport à une machine thermique, comme montré sur la figure 11.13: elle reçoit un travail mécanique W qu'elle utilise pour pomper une petite quantité d'énergie thermique Q_L d'une source froide et céder une quantité de chaleur plus grande $Q_H = Q_L + W$ à un réservoir plus chaud. Si on refroidit une pièce, on a un climatiseur.

Le travail fourni par le moteur est: $W = Q = Q_H - Q_L$ (car $\Delta U = 0$). Le *coefficient de performance* η est le rapport de la quantité de chaleur enlevée à la source froide au travail effectué pour l'extraire:

$$\eta = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{|Q_H - Q_L|}$$

Plus η est grand, plus la machine de réfrigération est efficace et une valeur de l'ordre de cinq est courante.

La meilleure performance est celle d'une machine de Carnot opérant en sens inverse. On peut réécrire l'équation ci-dessus avec les températures et on obtient ainsi le coefficient de performance d'un système idéal, soit:

$$\eta_c = \frac{T_L}{T_H - T_L}$$

Il faut toujours fournir du travail pour transférer de la chaleur d'une source froide à une source chaude.

Exemple 11.3.3.

- Déterminez le meilleur coefficient de performance possible d'un climatiseur maintenant une pièce à 21°C , quand la température extérieure est 36°C . Supposons que la chaleur qui pénètre dans la pièce en 1 heure est de 5.0 MJ.
- La machine rejette la chaleur qu'elle engendre pendant qu'elle fonctionne vers l'extérieur de la pièce à l'aide d'un ventilateur. Quel travail doit effectuer ce climatiseur pour maintenir la température de la pièce?
- Quelle est la quantité de chaleur totale rejetée vers l'extérieur par heure?

Solution.

(a) $\eta_c = T_L / (T_H - T_L) = 294 \text{ K} / (309 \text{ K} - 294 \text{ K}) = 19.6$

(b) La quantité de chaleur horaire est la chaleur Q_L qui entre dans le climatiseur à basse température. Le travail qui doit être effectué par heure pour évacuer Q_L est:

$$W = \frac{Q_L}{\eta_c} = \frac{5.0 \text{ MJ}}{19.6} = 0.26 \text{ MJ}$$

Ainsi pour extraire 5.0 MJ, cette machine n'effectue qu'un travail de 0.26 MJ.

(c) Dans cette transformation, les 0.26 MJ sont convertis en énergie thermique, rejetée vers l'extérieur. Nous avons donc: $Q_H = Q_L + W = 5.0 \text{ MJ} + 0.26 \text{ MJ} = 5.3 \text{ MJ}$, qui est égale à la chaleur totale rejetée vers l'extérieur.

Pompe à chaleur Si on inverse le climatiseur pour refroidir l'extérieur, quelle que soit sa température, et rejeter la chaleur dans la pièce, on a un système de chauffage: un tel dispositif réversible est appelé pompe à chaleur. En prenant comme source froide une rivière ou un lac $T = 277 \text{ K}$ et comme source chaude un bâtiment que l'on veut chauffer à 293 K , il faut fournir un travail W pour pomper de la chaleur de la source froide vers le site chaud. Supposons que l'on dispose de W Joules sous forme électrique. On pourrait les convertir directement en chaleur dans un radiateur électrique (rendement 100%) prenant W Joules en chaleur.

Mais la pompe thermique permet d'obtenir plus: en effet elle permet de restituer Q_H à la source chaude. Comme ça:

$$r = \frac{W}{Q_H} \Rightarrow Q_H = \frac{W}{r} \quad \text{et} \quad r = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 0.055$$

pour notre exemple. D'ici on trouve: $Q_H = W/0.055 = 18 \cdot W$. On a un gain d'un facteur 18! Même si la machine n'est pas parfaite, le gain reste appréciable.

11.4 Deuxième principe de la thermodynamique

Le deuxième principe de la thermodynamique a été introduit en physique sous la forme d'un énoncé plutôt banal sur l'écoulement de la chaleur. Mais il a évolué pour devenir un principe de grande importance, aussi universel que le premier et peut-être plus.

Le germe de l'idée était déjà présent quand les scientifiques comprirent à partir d'innombrables observations que: **La chaleur s'écoule spontanément d'un corps de haute température à un corps de basse température. D'elle-même, la chaleur ne s'écoule jamais d'un corps froid à un corps chaud.** C'est l'un de plusieurs énoncés différents mais équivalents du deuxième Principe. L'énoncé suivant, connu comme **l'énoncé de Kelvin**, stipule qu'il est impossible de concevoir une machine cyclique qui produise un travail en soutirant de la chaleur à un réservoir plus chaud sans en rejeter une partie à un réservoir plus froid.

Il n'existe aucun processus cyclique ayant pour seul résultat de transformer entièrement en travail, une quantité de chaleur Q provenant d'une source à température unique (de telle manière que $W = Q$).

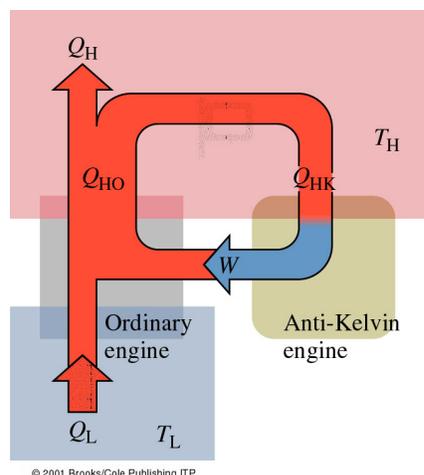
On n'a pas non plus trouvé le moyen de fabriquer un réfrigérateur parfait, d'où la **formulation de Clausius**:

Il ne peut y avoir de processus cyclique dont le résultat consiste à libérer la chaleur produite par un système à une température donnée pour en transmettre une quantité égale à un second système de température plus élevée.

Cet énoncé dit que la chaleur ne se propage pas spontanément d'un objet froid à un objet chaud. Pour produire du travail, une machine thermique doit recevoir de la chaleur d'une source chaude et en céder à un réservoir froid. On peut montrer que ces deux énoncés (de Kelvin et de Clausius) qui traitent des cas spécifiques sont équivalents.

Pour montrer ça, référons-nous à la figure 11.14 qui représente un moteur réversible ordinaire tournant dans le sens inverse, couplé à une hypothétique machine violant l'énoncé de Kelvin. Cette dernière convertit une quantité de chaleur (Q_{HK}) directement en travail, qui actionne une machine ordinaire, comme un réfrigérateur. Celui-ci, à son tour, rejette une chaleur (Q_{HO}), dont une partie peut re-circuler en sens inverse vers la machine violant l'énoncé de Kelvin. L'effet total de ce système combiné est de prendre de la chaleur à la source de basse température et la rejeter au réservoir de haute température, en violation directe de l'énoncé de Clausius. Ainsi, si une machine violant l'énoncé de Kelvin était possible, elle pourrait être employée pour concevoir une machine violant l'énoncé de Clausius.

Figure 11.14: Si une machine violant l'énoncé de Kelvin existait, elle pourrait être couplée à une machine ordinaire et l'ensemble violerait l'énoncé de Clausius du deuxième Principe. Elle pourrait alors absorber une chaleur Q_L puis la rejeter à la source chaude et ne rien faire d'autre.



11.4.1 L'entropie

Un grand nombre de processus ne se produisent pas naturellement même s'ils ne contredisent pas le premier principe de la Thermodynamique.

Considérons quelques processus thermiques naturels: Pourquoi une cuillère placée dans un thé chaud se réchauffe-t-elle? Pourquoi ne se refroidit-elle pas pendant que le thé se réchauffe (l'énergie serait aussi conservée)? Pourquoi la température d'un bloc de métal augmente au moment de sa chute d'une certaine hauteur sur le sol? Pourquoi ce même bloc chauffé sur une plaque électrique, ne saute-t-il pas au plafond?

En fait tous les processus thermiques naturels sont irréversibles et correspondent à des transformations spontanées d'un système; il n'est pas possible d'effectuer la transformation en sens inverse. Ils sont constitués d'une suite d'états hors équilibres sauf l'état final qui est plus désordonné que l'état initial. *C'est pour tenir compte de cela qu'il fallait l'énoncé plus général de la deuxième loi de la thermodynamique permettant de trouver le sens d'évolution d'un processus irréversible.*

Supposons qu'un gaz parfait occupe une enceinte et qu'on le libère en ouvrant une valve vers un autre récipient initialement vide. Le système étant totalement isolé, le gaz se détend spontanément et remplit le récipient sans aucune variation d'énergie interne ($\Delta U = 0$) parce qu'aucun travail ou échange de chaleur avec l'extérieur n'ont eu lieu. Si on veut faire revenir le gaz dans l'enceinte initiale, on doit effectuer un travail.

Ainsi en subissant une détente spontanée, le gaz perd de son aptitude à effectuer un travail, bien que son énergie interne n'ait pas changé. Ce dont nous avons besoin est une nouvelle grandeur caractéristique du système qui reflète cette différence et qui nous permet de savoir si un changement spontané aura lieu entre un état et un autre. *Cette grandeur gouverne le sens de l'évolution naturelle de tous les systèmes.*

En 1865, Clausius introduisit un nouveau concept, **l'entropie**, S , dans le but de distinguer conservation et réversibilité. La formulation du deuxième Principe, impliquant l'entropie, est la suivante (appelée souvent 'le Principe de l'entropie'):

Tout changement d'un système isolé, passant d'un état à un autre, est tel que son entropie augmente ou, au mieux, ne change pas.

Alors si un système isolé subit une transformation quelconque, son entropie augmente ou, au mieux, elle reste inchangée. Si le système n'est pas isolé, on peut réduire son entropie en lui imposant de l'ordre sous l'effet d'un agent externe. Dans ce cas (d'après le principe d'entropie), l'entropie de son environnement extérieur (éventuellement le reste de l'Univers) doit augmenter. On peut propager ce raisonnement à l'Univers entier:

Chaque transformation augmente l'entropie de l'Univers ou, au mieux, la laisse inchangée.

L'entropie n'obéit pas à une loi de conservation comme le fait l'énergie. L'entropie augmente toujours pour un processus irréversible. A cause de cette propriété, la variation d'entropie est parfois appelée "la flèche du temps".

Il existe deux façons équivalentes de définir le changement d'entropie d'un système:

1. soit en fonction de la température et de l'énergie qu'il perd ou gagne sous forme de chaleur.
2. soit en comptant le nombre de façons différentes dont les atomes ou les molécules qui constituent le système peuvent être arrangés.

Considérons le cycle de Carnot pour lequel nous avons trouvé (equation 11.5) que:

$$\frac{Q_L}{Q_H} = \frac{T_L}{T_H}$$

On peut écrire cette relation comme:

$$\frac{Q_L}{T_L} = \frac{Q_H}{T_H}$$

Nous interprétons cette équation comme l'absence de variation de l'entropie d'une machine de Carnot subissant une transformation représentée par un cycle fermé et réversible. Ce résultat a conduit Clausius à définir la variation de l'entropie ΔS subie par un système lors d'une transformation réversible et isotherme comme:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \tag{11.6}$$

On peut généraliser la définition de l'entropie et résumer:

L'entropie d'un système qui subit une transformation réversible quelconque d'un état i à un état f est définie comme:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$$

L'entropie augmente quand le système reçoit de la chaleur; elle diminue quand le système perd de la chaleur; et elle reste inchangée par un travail effectué en absence de frottement.

Dans ce contexte le travail est un changement mécanique ordonné de l'énergie et, comme tel, ne modifie pas le désordre d'un système. Par contre, tout mécanisme (tel que le frottement) qui dissipe de l'énergie sous forme d'agitation, augmente l'entropie. La variation d'entropie est nulle pour un cycle complet réversible. Si une partie du cycle n'est pas réversible, l'entropie à la fin du cycle ne peut pas reprendre sa valeur initiale.

Cycle de Carnot et Entropie Reprenons la machine de Carnot. Lors de la détente isotherme entre A et B , la source chaude perd une entropie $\Delta S_H = (Q_H/T_H)$ qui est récupérée par la machine. Dans la détente adiabatique de B vers C , $Q = 0$ et $\Delta S = 0$. On a les mêmes relations sur les autres branches du cycle. Ainsi **au total la variation d'entropie du système entier pendant un cycle réversible est nulle.**

Exemple 11.4.1. Un objet chaud à 573 K est mis en contact avec un objet froid à 273 K; 20.0 kJ de chaleur s'écoulent alors irréversiblement du premier au second sans que leur température ne change de manière appréciable. De combien l'entropie de l'Univers a-t-elle variée?

Solution. La variation de l'entropie de l'Univers est égale à la variation totale de l'entropie des corps chaud et froid; donc:

$$\Delta S = \Delta S_B + \Delta S_H = \frac{Q}{T_H} + \frac{Q}{T_B}$$

En se rappelant que la chaleur entrante est positive:

$$\Delta S = \frac{20 \times 10^3 \text{ J}}{273 \text{ K}} + \frac{-20 \times 10^3 \text{ J}}{573 \text{ K}} = 73.26 \text{ J/K} - 34.9 \text{ J/K} = 38.9 \text{ J/K}$$

Exemple 11.4.2. Considérons la fusion d'un bloc de glace de 10 kg dans une grande cuve d'eau suivant une transformation très lente ($T_{\text{eau}} \approx T_{\text{glace}}$: ce processus est réversible). Quelle est la variation de l'entropie?

Solution. On doit exprimer T en kelvins: $T = 273 \text{ K}$. Pour trouver la variation de l'entropie dans cette transformation isotherme, nous utilisons l'équation 11.5. Déterminons d'abord Q pour la fusion:

$$Q = m L_f = 3.34 \text{ MJ}$$

Donc:

$$\Delta S_{\text{glace}} = \frac{Q}{T} = 12 \text{ kJ/K}$$

11.4.2 Ordre et désordre

Chaque transformation augmente l'entropie de l'Univers ou, au mieux, la laisse inchangée.

Vers 1878, Boltzmann reformula la notion d'entropie. Il détermina que l'entropie était une mesure du désordre de l'Univers à l'échelle atomique. Si on allume un morceau de bois, l'agencement bien ordonné des molécules de bois se transforme spontanément en un désordre de gaz, de fumée et de flamme. Le désordre de l'Univers augmente; l'entropie augmente. L'énergie, qui était concentrée, s'est dispersée un peu partout, ce qui est l'essence même du désordre thermodynamique. Le désordre maximum correspond à une agitation aléatoire et à une homogénéité presque parfaite.

Dans les processus physiques, nous ne mesurons jamais l'entropie, mais seulement sa variation, ΔS . Un système varie de lui-même (i.e. l'énergie se transfère spontanément), de façon que l'entropie universelle augmente ($\Delta S > 0$). La quantité ΔS mesure le degré de désordre associé à tout changement (ΔE) d'un système. Un système isolé dans une configuration d'entropie maximum ne peut pas changer macroscopiquement de lui-même: il est donc en équilibre.

On peut clarifier les concepts d'entropie et de désordre grâce à l'analyse statistique ou probabilistique de l'état moléculaire des systèmes. Prenons un exemple simple: après avoir secoué 4 pièces de monnaie, on les jette sur la table; il y a en tout $2^4 = 16$ manières différentes pour les 4 pièces de tomber sur la table. Le nombre de côtés pile et de côtés face constitue une description de l'état macroscopique du système. En précisant de quel côté se présente chaque pièce, on définit un état microscopique de ce système. Ainsi il y a 16 états microscopiques possibles. La probabilité d'obtenir 4 faces est $1/16$. La probabilité d'obtenir 2 piles et 2 faces vaut $6/16$.

S'il y avait 100 pièces de monnaie dans notre système, il y aurait encore seulement un seul état microscopique correspondant à toutes les pièces piles. Comme il y a en tout $2^{100} \sim 10^{30}$ états microscopiques, la probabilité de trouver toutes les pièces piles est $1/10^{30}$. On voit donc que plus le nombre de pièces augmente, plus la probabilité d'avoir une combinaison ordonnée (uniquement piles ou faces) devient très faible. Par contre, la probabilité la moins ordonnée (moitié pile, moitié face) devient alors la plus probable (10%) car il y a 10^{29} manières d'avoir autant de piles que de faces. Si on applique ce raisonnement à un système contenant beaucoup de molécules, on voit que l'état le plus probable est celui qui présente le plus grand désordre, ou l'entropie maximum. Boltzmann a prouvé que l'entropie d'un système peut s'exprimer par

$$S = k_B \ln w$$

où k_B est la constante de Boltzmann et w le nombre d'états microscopiques correspondant à un état macroscopique donné. La quantité w porte le nom de *probabilité thermodynamique*.

La conception probabiliste du deuxième Principe n'interdit pas qu'un système évolue spontanément vers un état d'entropie inférieure. Elle implique plutôt qu'une telle évolution est très invraisemblable. Cette formulation statistique s'applique à la vie: Tout processus qui peut avoir lieu sans violer le premier Principe peut se produire de par le deuxième Principe, mais peut-être avec une très faible probabilité. Il est possible qu'un œuf écrasé se reconstitue, mais la probabilité infiniment faible d'un tel événement permet de dire qu'il est impensable qu'il ait jamais eu lieu. La vie, elle-même, est une suite de processus spontanés qui s'écartent de l'équilibre et engendrent de l'entropie pendant que l'être vivant rejette presque autant d'énergie qu'il en consomme.

